aura $45 = 3^2 \times 5$; d'où $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. La décomposition est ici terminée, parce que 5 est un nombre premier. On donne ordinairement au calcul la disposition ci-contre, afin de mieux voir la série des facteurs.

360	2	210	2
180	2	105	3
90	2	35	5
45	3	7	7
15	3		
5	5		

On trouve de même que $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ *.

Ce procédé conduit au but par un nombre limité d'essais. On sait d'ailleurs que la résolution en facteurs ne peut produire qu'un seul résultat (26).

La table qu'on trouve à la fin de l'Arithmétique peut faciliter cette opération.

Ce procédé donne aussi le plus grand commun diviseur de deux nombres ; car en décomposant ces nombres en leurs facteurs premiers, ce diviseur est le produit de tous ceux de ces facteurs qui sont communs, chacun avec le plus petit exposant dont il se trouve affecté dans l'un et l'autre. Ainsi

$$312 = 2^3 \times 3 \times 13, \quad 132 = 2^2 \times 3 \times 11;$$

le plus grand commun diviseur est $2^2 \times 3 = 12$, comme p. 26.

28. Il arrive quelquefois que les essais qu'on tente ne réussissent point, et qu'on ne trouve aucun diviseur exact, soit du nombre proposé, soit de l'un des quotients auxquels on est conduit ; alors ce nombre, ou ce quotient, est premier, et on ne peut en opérer la décomposition en facteurs. Mais on doit remarquer que ces tentatives inutiles de division ne doivent être poussées que *jusqu'à la racine carrée du nombre qu'on veut diviser*. En effet, puisque ce nombre est le produit de sa racine par elle-même, et qu'on ne peut faire croître l'un des facteurs sans que l'autre décroisse, pour que le produit reste le même (13), on voit que si ce dividende a l'un de ses facteurs plus grand que la racine, l'autre facteur doit être moindre ; en sorte qu'un nombre ne peut être divisible par une quantité qui surpasse sa racine carrée, à moins qu'il ne le soit aussi par une quantité moindre que cette racine. Or, quoiqu'on n'ait essayé que des diviseurs premiers, on est sûr que d'autres nombres non premiers ne pourraient diviser (n° 25, 4°) ; ainsi l'on a par là reconnu qu'il n'existe pas de diviseur moindre que la racine du dividende : il n'y en a donc pas non plus qui surpasse cette racine.

* Soient $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, les nombres de fois qu'on a pu diviser un nombre N par les nombres premiers $a, b, c \ldots$; on a $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots$ N n'est divisible (n° 25) que par les divers termes du produit

$$(1 + a + a^2 \ldots + a^\alpha) \times (1 + b + b^2 + b^3 \ldots + b^\beta) \times (1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) \times \ldots$$

le nombre des termes du produit, ou la quotité des diviseurs de N, est

$$1 + \alpha)\ (1 + \beta)\ (1 + \gamma) \ldots$$

Par exemple, 127 n'est divisible ni par 2, 3, 5, 7, ni 11, à plus forte raison par 4, 6, 8, 9 et 10 ; et comme $\sqrt{127}$ est entre 11 et 12, on est assuré que 127 est un nombre premier.

1524 est divisible par 3 et 4, et on a $1524 = 2^2 \times 3 \times 127$: on voit ensuite que 5, 7, 11, ne divisent pas 127. Sans pousser plus loin les tentatives, on reconnaît que 127 est premier, et la décomposition de 1524 est terminée.

29. Cherchons maintenant *tous les diviseurs* d'un nombre donné. On le décomposera en facteurs premiers, et l'on sait (n° 27) que si l'on affecte quelques-uns de ces facteurs d'un exposant quelconque, égal au plus à ceux dont ils sont affectés dans le nombre proposé, on aura un diviseur de ce nombre ; et qu'il faut effectuer toutes les combinaisons possibles de cette espèce pour être assuré de n'avoir omis aucun diviseur. Voici un moyen de n'oublier aucune de ces combinaisons : reprenons l'équation $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; avec 2^3 on formera la suite 1, 2, 2^2, 2^3 ; avec 3^2 on formera 1, 3, 3^2 ; enfin, 5 donnera 1, 5. D'abord chacun de ces termes est diviseur de 360 : en outre si l'on multiplie tous les nombres de la première suite par tous ceux de la deuxième, et le résultat par tous ceux de la troisième, on aura visiblement toutes les combinaisons ; on sera donc assuré d'avoir tous les diviseurs cherchés, qui sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Pour $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$, on formera le produit de 1 et 2, par 1 et 3, par 1 et 5, et par 1 et 7 ; et on aura

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.

Pour $675 = 3^3 . 5^2$, formez $(1 + 3 + 9 + 27) \times (1 + 5 + 25)$, d'où

1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675.

30. Puisque le plus grand commun diviseur de deux nombres doit diviser tous les restes donnés par l'opération indiquée, cher-

chons les quotients successifs de ces divisions. Reprenons l'exemple de 2961 et 799, p. 27; et cherchons combien 47 est contenu de fois dans la série des diviseurs. Il est d'abord visible qu'il est 1 fois dans 47, et 2 fois dans 94; on posera 1 sous 47 et 2 sous 94. On a $235 = 2 \times 94 + 47$, d'où $\frac{235}{47} = 2 \times \frac{94}{47} + \frac{47}{47} = 2 \times 2 + 1$, ou 5, qu'on écrira sous 235. Ce chiffre 5 a été obtenu en multipliant entre eux les deux chiffres écrits sous 94, et ajoutant au produit le 1 qui est à droite dans la dernière ligne. De même, pour obtenir le quotient de 564 par 47, on a $564 = 2 \times 235 + 94$, d'où $\frac{564}{47} = 2 \times 5 + 2 = 12$, qu'on posera sous 564. On continuera à multiplier entre eux les deux chiffres écrits sous 564, et à ajouter le chiffre à droite.

$$\begin{array}{cccccc} 2961 & \left\{\frac{799}{3}\right. & \left\{\frac{564}{1}\right. & \left\{\frac{235}{2}\right. & \left\{\frac{94}{2}\right. & \left\{\frac{47}{2}\right. \\ 63 & 17 & 12 & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

Voici la série des calculs à partir du chiffre 5:

$$2 \times 2 + 1 = 5, \quad 2 \times 5 + 2 = 12,$$
$$1 \times 12 + 5 = 17, \quad 3 \times 17 + 12 = 63.$$

Ce calcul, auquel nous trouverons par la suite (n° 595) une grande utilité, peut ici nous servir à composer deux nombres pour lesquels on donne le commun diviseur, le nombre de divisions nécessaires pour le trouver, et les quotients successifs. Après avoir écrit ces quotients formant la deuxième ligne, on en déduira la troisième ligne par le calcul ci-dessus; enfin, prenant les deux plus grands résultats, on les multipliera par le facteur commun proposé.

Voici encore deux exemples, l'un pour 115 et 69, dont le commun diviseur est 23 qu'ils contiennent 5 et 3 fois; l'autre pour 3085 et 910, qui contiennent 617 et 182 fois le diviseur 5.

$$\begin{array}{cccc} 115 & \left\{\frac{69}{1}\right. & \left\{\frac{46}{1}\right. & \left\{\frac{23}{2}\right. \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 3085 & \left\{\frac{910}{3}\right. & \left\{\frac{355}{2}\right. & \left\{\frac{200}{1}\right. & \left\{\frac{155}{1}\right. & \left\{\frac{45}{3}\right. & \left\{\frac{20}{2}\right. & \left\{\frac{5}{4}\right. \\ 617 & 182 & 71 & 40 & 31 & 9 & 4 & 1 \end{array}$$

31. Pour obtenir le plus grand commun diviseur entre les quatre nombres 150, 90, 40 et 200, on trouvera d'abord celui de 150 et 90, qui est 30; le nombre cherché est donc déjà un des facteurs de 30; puis on trouvera le plus grand commun diviseur de 30 et 40, qui est 10; enfin celui de 10 et 200, qui est 10, c'est le nombre cherché. Les quatre nombres proposés n'ont donc d'autres diviseurs

communs que 1, 2, 5 et 10. Ce procédé s'applique à tant de nombres qu'on voudra.

32. Étant donnés plusieurs nombres, tels que 2, 3, 4, 6, 8 et 12, *cherchons le plus petit nombre divisible par chacun*. Il est d'abord clair que, puisque 2, 3, 4 et 6 sont contenus exactement dans 8 ou 12, tout nombre divisible par ces deux derniers, le sera nécessairement par les autres, auxquels il est par conséquent inutile d'avoir égard. En composant un nombre qui renferme tous les facteurs de 8 et 12, on est assuré qu'il est divisible par tous les nombres donnés; et si, en outre, il ne contient que les facteurs de 8 et 12, il est le plus petit dividende demandé. Ainsi, on a $2^3 \times 3$, ou 24, pour le nombre cherché.

On voit donc que, *pour obtenir le plus petit nombre divisible par des quantités données, après avoir supprimé celles qui divisent exactement les autres, on ne s'occupera que de celles-ci, qu'on décomposera en leurs facteurs premiers. Le nombre cherché sera formé du produit de tous ces facteurs, chacun élevé à la puissance la plus haute qui l'affecte dans ces divers résultats.*

De même pour 2, 3, 5, 10, 15, 8, 24, 12 et 6, comme 2, 3, 6, 8 et 12 divisent 24, et que 5 divise 10, on n'aura égard qu'à 10, 15 et 24, ou 2×5, 3×5 et $2^3 \times 3$; le plus petit dividende cherché est donc $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

Des Conditions pour qu'un nombre soit divisible par 2, 3, 5, 7.....

33. On dit qu'un nombre est *pair*, quand il est divisible par 2. Soit un nombre quelconque, tel que 476; on le décompose en dizaines et unités, savoir, $470 + 6 = 47 \times 10 + 6$: la première partie 47×10 est divisible par 2; il faut donc que la seconde le soit, pour que le nombre proposé soit un multiple de 2. Ainsi, *tout nombre terminé par un chiffre pair jouit seul de la propriété d'être pair, ou divisible par* 2.

En décomposant le nombre en deux parties, dont l'une soit formée des 2, 3,... derniers chiffres, on voit de même que, *pour qu'il soit divisible par* 4, *il faut que les deux derniers chiffres fassent un multiple de* 4; *pour qu'il le soit par* 8, *que les trois derniers fassent un multiple de* 8, *etc.*

De même, *un nombre n'est multiple de* 5 *qu'autant qu'il est terminé par* 0 *ou* 5. Il n'est divisible par 10, que lorsqu'il l'est par 2 et par 5, c'est-à-dire lorsqu'il est terminé par un zéro. On trouverait aussi les conditions de la divisibilité par 25, 50, etc.

34. Un nombre, tel que 27542, revient à . . . . . $2.1+4.10+5.10^2+\ldots\ldots$: pour trouver le reste de la division par un autre nombre, tel que 7, divisons 1, 10, 10^2, 10^3..., par 7. Le reste de 1 est 1, celui de 10 est 3; celui de 100, ou 10^2, est le carré de 3 (*voy.* n° 22), ou plutôt $9-7=2$. De même celui de 10^3, ou $10^2\times10$, est 2×3, ou 6; celui de 10^4 est $6\times3=18$, ou $18-14=4$, etc. En multipliant chaque reste par 3, et ôtant 7, s'il est possible, on aura donc ainsi les restes successifs 1, 3, 2, 6, 4, 5, de la division par 7, des nombres 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4 et 10^5; mais arrivé à 10^6, le reste est $5\times3=15$, ou plutôt $15-14=1$. Une fois qu'on retrouve le reste 1, c'est une conséquence du calcul même qui conduit à ces résultats consécutifs, qu'on les verra se reproduire *périodiquement*, en sorte qu'en poussant indéfiniment les divisions par 7 des puissances successives de 10, on retrouvera toujours ces restes dans le même ordre. Les nombres (1, 3, 2, 6, 4, 5) qui se reproduisent continuellement, sont ce qu'on nomme *la Période*. Le reste de 10^{26} est le même que celui de 10^{20}, de 10^{14}, 10^8, 10^2, en ôtant les multiples de 6 compris dans 26, attendu que la période a 6 termes; ce reste est 2. Celui de 10^{25} est le même que pour 10^1, ou 3.

On pouvait d'avance être assuré de l'existence de cette période; car les restes de ces divisions par 7 étant <7, il ne doit au plus y avoir que ces six restes 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui viennent seulement dans un ordre différent de celui-ci : on est certain de ne pas trouver zéro (n° 25), la division ne pouvant être exacte. Il s'ensuit donc qu'on doit, après six divisions *au plus*, retomber sur l'un des restes obtenus; alors la période recommence, puisqu'il faut reproduire les mêmes multiplications. Or, si 10^{18} et 10^{12} donnent le même reste, la différence $10^{18}-10^{12}$ ou $10^{12}(10^6-1)$ est multiple de 7 (n° 16); et comme 10^{12} n'a aucun facteur commun avec 7, il faut (n° 25, 4°) que 10^6-1 soit divisible par 7, c'est-à-dire que $10^6:7$ donne 1 pour reste, 1er terme de la période. Et puisque tout autre diviseur que 7 qui serait premier avec 10, conduit à la même conséquence, on voit que *quel que soit le diviseur premier avec* 10 *de la suite indéfinie* 1, 10, 10^2, 10^3.... *les restes successifs formeront toujours une période,*

dont les termes seront en nombre moindre que ce diviseur n'a d'unités; la période commence au premier reste un *.

1° Prenons 9 pour diviseur, le reste de $10:9$ est 1; donc la période est le seul chiffre 1; c'est-à-dire que *toute puissance de* 10, *divisée par* 9, *donne le reste* 1. On peut en conclure (n° 22) que 20, 200..., divisés par 9, donnent le reste 2; que 30, 300...., donnent 3; que 40, 400...., donnent 4, etc. Or, un nombre tel que 8753 peut être décomposé en unités, dizaines...., ou $8000+700+50+3$; en divisant par 9, les restes sont $8+7+5+3=23$; ainsi *le reste de la division d'un nombre par* 9 *est le même que le reste que donnerait la somme de ses chiffres considérés comme exprimant de simples unités.* Rien n'est donc plus aisé que de trouver le reste de la division d'un nombre par 9 : pour 8753, par exemple, ce reste est le même que pour 23, ou $2+3=5$. *Si la somme des chiffres est un multiple de* 9, *le nombre est divisible par* 9.

Lorsque deux nombres sont exprimés par les mêmes chiffres, mais dans un ordre différent, ils donnent donc les mêmes restes de la division par 9; leur différence est donc (n° 16) un multiple de 9. Ainsi, $74029-9742=64287=9\times7143$.

2° On verra aisément que ces propriétés appartiennent aussi au nombre 3.

3° Si le diviseur est 7, la période est 1, 3, 2, 6, 4 et 5. Soit le dividende 13527542; en le décomposant en $2+40+500+7000+\ldots$; les restes de ces nombres, divisés par 7, sont respectivement les mêmes que ceux de la période, répétés, 2, 4, 5, 7... fois; on écrira en sens inverse les nombres de la période sous les chiffres consécutifs de la quantité proposée, comme on le voit ci-contre; on multipliera ensuite chaque chiffre par celui qui est au-dessous. La somme 105 des produits a le même reste de la division par 7, que le nombre proposé divisé par 7; et comme celui de 105 est 0, l'un et l'autre sont des multiples de 7.

```
13 527 542
31 546 231
-----------
 1 × 2 =  2
 3 × 4 = 12
 2 × 5 = 10
 6 × 7 = 42
   etc.
Somme=105
13 527 542
31 231 231
-----------
1.2= 2 |
3.4=12 |
2.5=10 | 1.7 =  7
1.3= 3 | 3.2 =  6
3.1= 3 | 2.5 = 10
  30   |      23
```

* Quand la quotité des termes de la période d'un diviseur premier n'est pas précisément ce diviseur moins un, elle est partie aliquote de ce nombre. C'est ainsi que, pour 13, la période n'a pas 12 termes, mais seulement 6, et 6 divise 12. De même, pour le diviseur

Observez qu'au lieu d'évaluer les quotients par défaut, on peut les prendre par excès; c'est-à-dire qu'il est indifférent de poser 10^4 égal à $7 \times 1428 + 4$, ou à $7 \times 1429 - 3$. Des nombres 1, 3, 2, 6, 4 et 5, qui forment la période, on peut donc remplacer les trois derniers par leur supplément à 7, ou 1, 3 et 2, qui seront les restes soustraits des multiples de 7, c'est-à-dire les restes *négatifs* (n° 4). La période est réduite aux trois nombres 1, 3, 2; seulement les produits sont tantôt additifs et tantôt soustractifs. Ainsi, l'on partagera les nombres en tranches de trois chiffres, et il faudra soustraire des autres les produits donnés par les tranches de rangs pairs. Le calcul se dispose comme on voit ci-dessus, où la barre est placée sur les facteurs dont les produits sont soustractifs. Ici le reste de la division de 13527542 par 7 est le même que celui de $30 - 23 = 7$, ou zéro.

4° De même, pour le diviseur 11, après avoir trouvé que la période est 1, 10; on peut remplacer 10 par $11-10$, ou 1, dont le produit devra être soustrait, c'est-à-dire que la période est $+1, -1$.

Donc, *si l'on ajoute tous les chiffres de rangs impairs d'un nombre proposé, qu'on en retranche la somme des chiffres de rangs pairs, le reste sera celui de la division de ce nombre par* 11. Pour 732931, on a $1+9+3=13$, $3+2+7=12$, $13-12$, ou 1, est le reste de la division de 732 931 par 11. De même, pour 429 180, on aura $0+1+2=3$; $8+9+4=21$, et, comme on ne peut ôter 21 de 3, il faudra ajouter à 3 un multiple suffisant de 11, tel que 22; alors on aura $22+3-21=4$, qui est le reste cherché. 63 613 est un multiple de 11, puisque $3+6+6-1-3=15-4=11$.

On peut encore opérer ainsi qu'il suit : comme 100 : 11 donne 1 pour reste, 100^2, 100^3.... donnent aussi 1 : *on décomposera le nombre proposé,* tel que 9387928, *en tranches de 2 chiffres à partir de la droite,* sous la forme $28 \times 1 + 79 . 100 + 38 . 100^2 + 9 . 100^3$, et divisant chaque partie par 11, le reste sera $28 + 79 + 38 + 9$, ou *la somme* 154 *des nombres qui composent les tranches de 2 chiffres;* ainsi 9387928 et 154 ont le même reste de la division par 11. En traitant 154 par le

$$\begin{array}{r} 28 \\ 79 \\ 38 \\ 9 \\ \hline 154 \end{array}$$

11, la période n'a que 2 termes; et 2 est facteur de $11-1$, ou 10 : enfin pour 37, la période est formée de 3 nombres seulement, et 36 admet le facteur 3 (*voy.* les *Recherches arith.* de Gauss, n° 312).

même procédé, on a 55 ou 5×11, pour reste, ou plutôt zéro; le nombre proposé est multiple de 11.

5° Si le diviseur est 37, comme $1000 = 27 \times 37 + 1$, les restes de la division de 1, 1000, 1000^2,... sont donc tous l'unité : pour obtenir le reste de la division par 37 d'un nombre proposé, tel que 99 | 732 | 458 | 968, on opérera donc comme dans l'exemple précédent, mais en formant des tranches de trois chiffres; ainsi le reste cherché est le même que pour la somme 2 | 257 de ces tranches, ou plutôt pour $257 + 2$. On reconnaît que ce dividende est un multiple de 37.

$$\begin{array}{r} 968 \\ 458 \\ 732 \\ 99 \\ \hline 2257 \end{array}$$

6° Pour trouver tous les nombres premiers, moindres qu'une limite donnée, on écrira la suite des nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11.... jusqu'à cette limite : puis, partant de 3, on supprimera tous les nombres de 3 en 3 rangs, qui sont tous des multiples de 3; partant de 5, on supprimera tous les termes de 5 en 5 (multiple de 5), etc. : on laissera subsister les nombres de départ; et les termes non effacés seront tous les nombres premiers demandés *.

Voyez la table donnée à la fin de l'Arithmétique.

Preuves des quatre Règles.

35. Comme on peut commettre des erreurs dans un calcul, il est utile de s'assurer de l'exactitude du résultat par une opération qui en est *la preuve*. Pour qu'elle conduise au but qu'on se propose, elle doit être plus facile à pratiquer que la règle même, car elle serait plus sujette à erreur. Ainsi, quoiqu'on puisse vérifier une multiplication en divisant le produit par l'un des facteurs, et voyant si l'autre facteur vient au quotient, on sent que ce procédé est propre à faire croire que l'erreur serait moins dans la multiplication que dans la division.

1° On vérifie l'addition par l'addition même. Si l'on a fait le calcul en opérant de haut en bas, on le recommencera de bas en haut, ou

* Lorsqu'on divise un nombre impair par 6, le reste ne peut être que 1, 3 ou 5, et si ce nombre n'est pas multiple de 3, il ne peut donner pour reste que $+1$ ou -1 (équivalent à 5) : ainsi tous les nombres non divisibles par 2, ni 3, sont compris dans la forme $6z \pm 1$, z étant un entier quelconque. Tous les nombres premiers et leurs multiples, excepté ceux de 2 et 3, sont de cette espèce.

bien on coupera l'addition en plusieurs autres ; ou l'on ajoutera aux divers nombres donnés des quantités qu'on ôtera ensuite.

On peut aussi commencer ce calcul par la colonne de l'ordre le plus élevé. Ainsi, dans l'exemple ci-contre, la colonne des mille a 6 pour somme ; et comme on en a trouvé 7, 7 — 6, ou 1, qu'on pose sous le 7, annonce qu'on a reporté 1 à cette colonne, et que par conséquent celle des centaines a donné, non pas 3, mais 13. Cette colonne ne donne que 11, 13 — 11 = 2 est donc la retenue des dizaines, qui ont fourni 25, etc. ; à la colonne des unités, on doit trouver 0 pour différence.

2 758
3 099
469
1 029
7 355
1 230

2° La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste au nombre soustrait ; on doit retrouver le plus grand des deux nombres donnés.

3° Pour la multiplication, on échangera le multiplicateur et le multiplicande (n° 11) ; ou bien on multipliera ou on divisera les facteurs par des nombres arbitraires, et le produit aura éprouvé un changement déterminé par ce qu'on a dit n° 13 ; il sera aisé de vérifier si cette condition est remplie.

4° Si l'on multiplie le quotient par le diviseur, et si l'on ajoute le reste, on devra trouver, pour résultat, le dividende (n° 16). Il est aisé de vérifier ainsi toute division. On a encore une autre preuve de cette règle, en multipliant ou divisant le diviseur et le dividende par un même nombre ; le quotient doit rester le même (n° 15, 1°).

5° On pourra aussi vérifier la division et la multiplication, en divisant, par un nombre quelconque, les deux facteurs et le produit, puis voyant si le produit des restes des facteurs est égal au reste du produit (n° 22) ; comme les restes sont faciles à trouver pour les diviseurs 9 et 11 (n° 34, 1° et 4°), on les préfère ordinairement pour cet usage. Nous en donnerons ici un exemple. On a trouvé, page 16, que 53 687 × 908 = 48 747 796. Pour vérifier ce calcul, ajoutons tous les chiffres de ces trois nombres et supprimons 9 chaque fois qu'il se rencontre ; les restes seront 2, 8 et 7. Or, 2 × 8 = 16, et 7 est le reste de $\frac{16}{9}$, puisque 6 + 1 = 7 ; donc l'opération n'est pas fautif ; à moins cependant qu'il n'y ait quelque compensation dans les erreurs, ou des chiffres déplacés, etc.

Si l'on veut prendre 11 pour diviseur, il faut retrancher les chiffres de rangs pairs de ceux de rangs impairs dans les trois nombres

(n° 34, 4°) ; on a 18 — 11 = 7 ; 17 — 0 = 17, ou 6 ; 25 — 27 = — 2 ou 9 (supplément de 2 à 11). Pour que la multiplication soit exacte, il faut que 7 × 6, ou 42, divisé par 11, donne le reste 9 ; ce qui a lieu en effet.

En divisant 700 200 031 par 683 679, on a 1024 pour quotient, et 112 735 pour reste (p. 24) : ajoutons les chiffres qui composent ces nombres, pour trouver les restes de leur division par 9 : ces restes sont 4 pour le dividende, 3 pour le diviseur, 7 pour le quotient, et 1 pour le reste ; le produit 7 × 3, ou 21, ajouté à un, donne 22, ou 4 : ainsi 4 doit être le reste de la division du dividende par 9 ; ce qui se vérifie. On dispose le calcul de ces deux preuves comme il suit :

Mult^de	2	16 ou 7
Multr	8	
Prod.	7	

Divid^de	4	*Divisr* 3	21 + 1 ou 4
Reste...	1	Quot. 7	

CHAPITRE II.

DES NOMBRES FRACTIONNAIRES.

Nature et transformation des Fractions.

36. Mesurer une chose, c'est donner l'idée précise de sa grandeur, en la comparant à celle d'une autre de même espèce, qui est déjà connue, et qu'on prend pour *unité*. Si l'unité est contenue un nombre de fois exact, cette quotité est la *mesure* ; sinon, on peut prendre une autre unité qui remplisse cette condition ; car sa grandeur est absolument arbitraire et indépendante de la chose qu'on veut mesurer ; en sorte qu'on peut exprimer la grandeur de celle-ci par des nombres très-différents, suivant qu'on prend telle ou telle unité.

Pour acquérir la connaissance préalable de plusieurs grandeurs ou unités de chaque espèce, on divise l'unité primitive en portions égales, dont le nombre soit tel, que l'une des divisions soit contenue exactement dans la chose à mesurer ; et c'est cette partie qu'on prend pour nouvelle unité. La mesure est alors ce qu'on appelle une *Fraction*, c'est-à-dire *une ou plusieurs parties de l'unité*. Lors-