bien on coupera l'addition en plusieurs autres ; ou l'on ajoutera aux divers nombres donnés des quantités qu'on ôtera ensuite.

On peut aussi commencer ce calcul par la colonne de l'ordre le plus élevé. Ainsi, dans l'exemple ci-contre, la colonne des mille a 6 pour somme ; et comme on en a trouvé 7, 7 — 6, ou 1, qu'on pose sous le 7, annonce qu'on a reporté 1 à cette colonne, et que par conséquent celle des centaines a donné, non pas 3, mais 13. Cette colonne ne donne que 11, 13 — 11 = 2 est donc la retenue des dizaines, qui ont fourni 25, etc. ; à la colonne des unités, on doit trouver 0 pour différence.

2 758
3 099
469
1 029
7 355
1 230

2° La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste au nombre soustrait ; on doit retrouver le plus grand des deux nombres donnés.

3° Pour la multiplication, on échangera le multiplicateur et le multiplicande (n° 11) ; ou bien on multipliera ou on divisera les facteurs par des nombres arbitraires, et le produit aura éprouvé un changement déterminé par ce qu'on a dit n° 13 ; il sera aisé de vérifier si cette condition est remplie.

4° Si l'on multiplie le quotient par le diviseur, et si l'on ajoute le reste, on devra trouver, pour résultat, le dividende (n° 16). Il est aisé de vérifier ainsi toute division. On a encore une autre preuve de cette règle, en multipliant ou divisant le diviseur et le dividende par un même nombre ; le quotient doit rester le même (n° 15, 1°).

5° On pourra aussi vérifier la division et la multiplication, en divisant, par un nombre quelconque, les deux facteurs et le produit, puis voyant si le produit des restes des facteurs est égal au reste du produit (n° 22) ; comme les restes sont faciles à trouver pour les diviseurs 9 et 11 (n° 34, 1° et 4°), on les préfère ordinairement pour cet usage. Nous en donnerons ici un exemple. On a trouvé, page 16, que 53 687 × 908 = 48 747 796. Pour vérifier ce calcul, ajoutons tous les chiffres de ces trois nombres et supprimons 9 chaque fois qu'il se rencontre ; les restes seront 2, 8 et 7. Or, 2 × 8 = 16, et 7 est le reste de $\frac{16}{9}$, puisque 6 + 1 = 7 ; donc l'opération n'est pas fautif ; à moins cependant qu'il n'y ait quelque compensation dans les erreurs, ou des chiffres déplacés, etc.

Si l'on veut prendre 11 pour diviseur, il faut retrancher les chiffres de rangs pairs de ceux de rangs impairs dans les trois nombres

(n° 34, 4°) ; on a 18 — 11 = 7 ; 17 — 0 = 17, ou 6 ; 25 — 27 = — 2 ou 9 (supplément de 2 à 11). Pour que la multiplication soit exacte, il faut que 7 × 6, ou 42, divisé par 11, donne le reste 9 ; ce qui a lieu en effet.

En divisant 700 200 031 par 683 679, on a 1024 pour quotient, et 112 735 pour reste (p. 24) : ajoutons les chiffres qui composent ces nombres, pour trouver les restes de leur division par 9 : ces restes sont 4 pour le dividende, 3 pour le diviseur, 7 pour le quotient, et 1 pour le reste ; le produit 7 × 3, ou 21, ajouté à un, donne 22, ou 4 : ainsi 4 doit être le reste de la division du dividende par 9 ; ce qui se vérifie. On dispose le calcul de ces deux preuves comme il suit :

Mult^de	2	16 ou 7
Multr	8	
Prod.	7	

Divid^de	4	*Divisr* 3	21 + 1 ou 4
Reste...	1	Quot. 7	

CHAPITRE II.

DES NOMBRES FRACTIONNAIRES.

Nature et transformation des Fractions.

36. Mesurer une chose, c'est donner l'idée précise de sa grandeur, en la comparant à celle d'une autre de même espèce, qui est déjà connue, et qu'on prend pour *unité*. Si l'unité est contenue un nombre de fois exact, cette quotité est la *mesure* ; sinon, on peut prendre une autre unité qui remplisse cette condition ; car sa grandeur est absolument arbitraire et indépendante de la chose qu'on veut mesurer ; en sorte qu'on peut exprimer la grandeur de celle-ci par des nombres très-différents, suivant qu'on prend telle ou telle unité.

Pour acquérir la connaissance préalable de plusieurs grandeurs ou unités de chaque espèce, on divise l'unité primitive en portions égales, dont le nombre soit tel, que l'une des divisions soit contenue exactement dans la chose à mesurer ; et c'est cette partie qu'on prend pour nouvelle unité. La mesure est alors ce qu'on appelle une *Fraction*, c'est-à-dire *une ou plusieurs parties de l'unité*. Lors-

qu'on dit d'une chose qu'elle est les cinq-septièmes de l'unité, il faut entendre qu'après avoir partagé l'unité en sept parties égales, cinq de ces parties ont formé un assemblage égal à cette chose.

Il suit de là que toute fraction doit être énoncée à l'aide de deux nombres : l'un, qu'on nomme *Dénominateur*, marque en combien de parties l'unité est divisée; l'autre, qui est le *Numérateur*, indique combien on prend de ces parties : dans cinq septièmes, 5 est le numérateur, 7 le dénominateur. On écrit ces deux nombres en les séparant d'un trait, le numérateur placé en-dessus, le dénominateur en-dessous, $\frac{5}{7}$. Les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, s'énoncent une demie, un tiers, un quart. Pour toutes les autres, on lit les deux chiffres, en ajoutant la finale *ième* au dénominateur; $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$ se lisent 5 huitièmes, 7 onzièmes.

37. Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par 7, comme chaque septième pris 7 fois donne l'unité, nos $\frac{5}{7}$ produisent 5 unités, ou $\frac{5}{7} \times 7 = 5$; donc *toute fraction multipliée par son dénominateur produit le numérateur.*

Il suit de là que $\frac{5}{7}$ est le quotient de 5 divisé par 7, d'après la définition (n° 5), c'est-à-dire que *toute fraction est le quotient de la division du numérateur par le dénominateur ;* et c'est pour cette raison qu'on a écrit de même une fraction et une division. Le quotient de 47, divisé par 7, est donc $6 + \frac{5}{7}$, puisqu'en multipliant cette quantité par 7, on a $42 + 5$, ou 47. Donc, *si au quotient entier d'une division, on ajoute une fraction qui ait le reste pour numérateur, et le diviseur pour dénominateur, on aura le quotient exact.*

72312146 : 8369 donne 8640 pour quotient, et 3986 pour reste; le quotient exact est donc $8640 + \frac{3986}{8369}$.

Donc, 1° si le numérateur et le dénominateur sont égaux, la fraction vaut 1 ; ce qui est d'ailleurs visible de soi-même.

$$\frac{11}{11} = \frac{12}{12} = 1.$$

2° Si le numérateur surpasse le dénominateur, la fraction est plus grande que l'unité ; on l'appelle un *Nombre fractionnaire*, le mot fraction s'appliquant plus ordinairement aux nombres qui sont < 1. *On extrait les entiers contenus dans une fraction, en divisant le numérateur par le dénominateur :* $\frac{37}{5}$ ou 37 divisé par 5, est $= 7 + \frac{2}{5}$. Il est en effet évident que, notre unité étant partagée en 5 parties, la fraction contient autant d'unités qu'on prend de fois 5 parties, ou autant que 37 contient 5.

Réciproquement, *pour convertir les entiers en fractions, il faut les multiplier par le dénominateur :* pour réduire 7 en cinquièmes, on

multipliera 7 par 5, et on aura $7 = \frac{35}{5}$; de même $8 + \frac{3}{7} = \frac{56}{7} + \frac{3}{7} = \frac{59}{7}$.

3° Diviser un nombre par 2, 7, 9, 11..., c'est en prendre la moitié, le 7e, le 9e, le 11e....

4° Prendre les $\frac{5}{7}$ d'un nombre, c'est le couper en 7 parts égales, et prendre cinq de ces parts. Il faudra donc diviser ce nombre par 7, et multiplier le quotient par 5. De ces deux opérations, on peut faire celle qu'on veut la première (p. 17, 4°). Ainsi, les $\frac{5}{7}$ de 84 sont 5 fois $\frac{84}{7} = 5 \times 12 = 60$, ou $= \frac{5 \times 84}{7}$; les $\frac{3}{11}$ de 40 valent $\frac{3 \times 40}{11} = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$.

38. Lorsqu'on augmente le numérateur seul, la fraction croît, parce qu'on prend un plus grand nombre des mêmes parties de l'unité. Si l'on augmente le dénominateur sans changer le numérateur, la fraction diminue ; car l'unité étant divisée en plus de parties, elles sont plus petites, et on en prend un même nombre. Ainsi, on peut, dans certains cas, reconnaître de suite quelle est la plus grande de deux fractions : $\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$, $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$, $\frac{4}{3} > \frac{3}{7}$.

Il est aisé de voir qu'en doublant les deux termes d'une fraction, sa valeur demeure la même ; car si l'on double le dénominateur 7 de $\frac{5}{7}$, chacune des parties sera partagée en deux, puisque l'unité en contiendra 14 au lieu de 7. Pour avoir la même grandeur, il faudra donc prendre deux parties au lieu d'une, 4 au lieu de 2...., enfin, 10 au lieu de 5 ; et $\frac{10}{14}$ sera $= \frac{5}{7}$. En triplant 7 et 5, on aurait de même $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$, etc. Donc, *la valeur d'une fraction ne change pas lorsqu'on en multiplie, et par conséquent lorsqu'on en divise les deux termes par un même nombre :* $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{300}{400}$; $\frac{90}{120} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Nous conclurons de là que, 1° pour amener les fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$ à être affectées d'un même dénominateur, multiplions les deux termes 5 et 7 de la première par 4, et les deux termes 3 et 4 de la seconde par 7, nous aurons $\frac{5 \times 4}{7 \times 4}$ et $\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$ ou $\frac{20}{28}$ et $\frac{21}{28}$; il est clair que ce calcul, qui ne change pas la valeur des fractions, leur donne le même dénominateur $4 \times 7 = 7 \times 4$. Donc, *on réduira deux fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre fraction.* Il est donc bien facile de distinguer quelle est la plus grande de deux fractions données ; par exemple, $\frac{3}{4} < \frac{5}{7}$, puisque $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$.

Le même raisonnement prouve que, *si l'on a plus de deux fractions, en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, on les réduira au même dénominateur,* qui sera le produit de tous ces dénominateurs. Soient $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$; on multipliera les deux termes de $\frac{2}{3}$ par $4 \times 7 = 28$, ceux de $\frac{5}{7}$ par $3 \times 4 = 12$, enfin ceux de $\frac{3}{4}$ par $3 \times 7 = 21$; il viendra $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, et $\frac{63}{84}$; donc $\frac{3}{4} > \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$.

La réduction au même numérateur se fait aussi facilement, et pourrait également servir à distinguer quelle est la plus grande de plusieurs fractions.

2° On amène aisément toute fraction à recevoir pour dénominateur un nombre donné, qui est un multiple exact de son dénominateur actuel. Ainsi, $\frac{7}{12}$ peut prendre 60 pour dénominateur : car $60 = 5$ fois 12; et en multipliant les deux termes par 5 on a $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$.

Lorsque les dénominateurs ne sont pas premiers entre eux, la réduction au même dénominateur peut donc beaucoup se simplifier. Pour $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, on voit de suite qu'en multipliant par 2 les deux termes de $\frac{1}{2}$, on a $\frac{2}{4}$, qui a même dénominateur que $\frac{3}{4}$. De même, $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{6}$, deviennent $\frac{4}{6}$ et $\frac{5}{6}$. Pour $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{8}$, on multipliera 7 et 12 par 2, puis 5 et 8, par 3, et il viendra $\frac{14}{24}$ et $\frac{15}{24}$. En général, on cherchera (n° 32) *le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs proposés, et on pourra faire servir ce nombre de dénominateur commun.*

Par exemple, soient	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$
Après avoir trouvé que 24 est le plus petit nombre divisible par 2, 3, 4, 6, 8 et 12, on divisera 24 par ces divers nombres, et l'on aura pour quotients.	12	8	6	4	3	2
Multipliant les deux termes de chaque fraction par le quotient qui lui correspond on a	$\frac{12}{24}$	$\frac{16}{24}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{10}{24}$

La réduction au même dénominateur est ainsi faite sous la forme la moins composée.

3° Toute fraction dont les deux termes contiennent le même facteur, prend une *expression plus simple* par la suppression de ce facteur, et elle conserve la même valeur. Si l'on amène la fraction à ne plus avoir de diviseur commun à ses deux termes, il sera désormais impossible de lui faire prendre une forme plus simple; car si 7 et 11 étant premiers entre eux, on admettait par exemple, que $\frac{7}{11}$ pût être réduit à la valeur moins composée $\frac{3}{4}$, on aurait, en réduisant au même dénominateur $\frac{7 \times 4}{44} = \frac{3 \times 11}{44}$, ou $7 \times 4 = 3 \times 11$.

Ce qui est absurde (n° 25, 4°), puisque 3×11 devrait être divisible par 7.

Ainsi, *pour réduire une fraction à une valeur égale plus simple et irréductible, il suffit de supprimer tous les facteurs communs à ses deux termes.*

Pour cela, on décompose ces nombres en leurs facteurs premiers (n° 27), et on ne laisse subsister que ceux qui ne sont pas communs. Il est plus simple de *chercher le plus grand commun diviseur des deux termes* (n° 23), *et de diviser ces termes par ce diviseur.* Ainsi, pour $\frac{799}{2961}$, on a trouvé (p. 27) que 47 est le plus grand commun diviseur de 799 et 2961 : divisant ces nombres par 47, on a $\frac{17}{63}$ pour la plus simple expression de $\frac{799}{2961}$. Nous avons même indiqué (n° 30) un procédé facile pour déduire les termes cherchés de la série des quotients qui conduisent au commun diviseur. Voici le calcul pour les deux fractions $\frac{891}{3429}$ et $\frac{649}{1062}$, qu'on réduit à $\frac{33}{127}$ et $\frac{11}{18}$, les plus grands communs diviseurs étant 27 et 59 (*V.* n° 30).

3429	$\frac{891}{3}$	$\frac{756}{1}$	$\frac{135}{5}$	$\frac{81}{1}$	$\frac{54}{1}$	$\frac{27}{2}$		1062	$\frac{649}{1}$	$\frac{413}{1}$	$\frac{236}{1}$	$\frac{177}{1}$	$\frac{59}{3}$	
127	33	28	5	3	2	1		18	11	7	4	3	1	

Une fraction peut se mettre sous une infinité de formes, et, sans changer de valeur, on peut l'exprimer par des nombres très-différents; mais il est plus aisé de se faire une idée juste de sa grandeur, lorsqu'elle est mise sous la forme la plus simple.

4° *Lorsque deux fractions sont égales, la fraction qu'on forme avec la somme ou la différence des numérateurs et celle des dénominateurs, leur est encore égale.* En effet, $\frac{14}{22} = \frac{35}{55}$, car ces fractions équivalent à $\frac{7}{11}$; les numérateurs sont des multiples de 7, et les dénominateurs, les mêmes multiples de 11 : or, il est clair que $35 + 14$ est également un multiple de 7, et que $55 + 22$ est le même multiple de 11; donc $\frac{49}{77} = \frac{7}{11}$.

La soustraction réitérée, terme à terme, simplifie de plus en plus la fraction composée, sans changer de valeur : si l'une est irréductible, les termes de l'autre fraction sont les produits des deux termes de la première par un même facteur *.

* Cherchons les nombres x et y qu'on peut ajouter ou ôter aux deux termes d'une fraction $\frac{a}{b}$ sans en changer la valeur, ou $\frac{a}{b} = \frac{a \pm x}{b \pm y}$. En réduisant au même dénomina-

Addition, Soustraction, Multiplication et Division.

39. Rien n'est plus aisé que d'ajouter ou de soustraire des fractions qui ont même dénominateur; on ajoute ou l'on retranche les numérateurs, et le dénominateur reste le même.

$\frac{7}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{11}{12}$.

Si les dénominateurs ne sont pas les mêmes, on commencera à ramener les fractions à cet état (n° 38, 1° et 2°). Ainsi,

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} \text{ ou } \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{41}{28} = 1 + \frac{13}{28};$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{3}{4} \text{ valent } \frac{56}{84} + \frac{60}{84} + \frac{63}{84} \text{ ou } \frac{179}{84} = 2 + \frac{11}{84}.$$

Pour $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{5}{12}$, on trouvera 120 pour le plus simple dénominateur (n° 32) : les numérateurs deviendront $60 + 80 + 72 + 84 + 56 + 100 - 45 - 30 - 50$ ou 327 : ainsi, le résultat cherché est $\frac{327}{120}$ ou $2 + \frac{29}{40}$.

Lorsque les fractions sont accompagnées d'entiers, on opère séparément sur les unes et sur les autres. Pour ajouter $3 + \frac{1}{2}$ avec $4 + \frac{3}{4}$, on prend $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ ou $1 + \frac{1}{4}$; on pose $\frac{1}{4}$ et on retient 1, qui, ajouté avec 3 et 4, donne, pour la somme cherchée, $8 + \frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{r|r} 3\ \frac{1}{2} & 11\ \frac{3}{4} \ldots\ldots 9 \\ 4\ \frac{3}{4} & 4\ \frac{2}{3} \ldots\ldots 8 \\ \hline 8\ \frac{1}{4} & 2\ \frac{5}{6} \ldots\ldots 10 \\ & 0\ \frac{7}{12} \ldots\ldots 7 \\ & 3\ \frac{1}{2} \ldots\ldots 6 \\ \hline & 23\ \frac{1}{3} \ldots\ldots 40 \end{array}$$

De même pour ajouter $11 + \frac{3}{4}$, $4 + \frac{2}{3}$, $2 + \frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ et $3 + \frac{1}{2}$, on trouve $\frac{40}{12}$ ou $3 + \frac{1}{3}$ pour somme des fractions; on pose $\frac{1}{3}$, et on prend $3 + 11 + 4 + 2 + 3 = 23$; donc la somme est $23 + \frac{1}{3}$.

Pour ôter $1 + \frac{1}{4}$ de $3 + \frac{1}{2}$, on ôte $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$, et 1 de 3; on a pour reste $2 + \frac{1}{4}$. De $13 + \frac{1}{2}$ si l'on veut ôter $7 + \frac{3}{4}$, comme on ne peut ôter $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$, on ajoute 1 à $\frac{1}{2}$, et on cherche $\frac{3}{2} - \frac{3}{4}$: on trouve $\frac{3}{4}$; puis on ajoute de même 1 au nombre 7 à soustraire (p. 10), et on dit $13 - 8 = 5$; ainsi $5 + \frac{3}{4}$ est la différence cherchée.

$$\begin{array}{r|r} 3\ \frac{1}{2} \ldots 2 & 13\ \frac{1}{2} \\ -1\ \frac{1}{4} \ldots 1 & -7\ \frac{3}{4} \\ \hline 2\ \frac{1}{4} \ldots 1 & 5\ \frac{3}{4} \end{array}$$

40. Multiplier $\frac{2}{5}$ par 3, c'est ajouter 3 fois $\frac{2}{5}$, ou $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$; ce qui

teur, il vient $ay = bx$, et divisant par by, $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$: donc, *les nombres qu'on peut ajouter ou ôter aux deux termes d'une fraction, sans en changer la valeur, doivent former une fraction égale à la proposée.* On voit que x ne peut être $= y$ qu'autant que $a = b$; c'est-à-dire qu'on ne peut ajouter ou ôter le même nombre aux deux termes d'une fraction que lorsqu'elle est $= 1$.

se réduit à répéter 3 fois le numérateur 2; $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$. *Pour multiplier une fraction par un entier, il faut multiplier le numérateur par l'entier;* on pourrait aussi *diviser le dénominateur*, s'il était un multiple de l'entier; car $\frac{3}{4} \times 2$ donne $\frac{3 \times 2}{4}$, en supprimant le facteur 2 commun aux deux termes, on a $\frac{3}{2}$; l'opération s'est réduite à diviser par 2 le dénominateur de $\frac{3}{4}$. On trouve, de même,

$$\frac{11}{18} \times 36 = \frac{11}{1} \times 2 = 22; \ \frac{19}{24} \times 12 = \frac{19}{2}.$$

Réciproquement, *pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur, ou diviser le numérateur par cet entier.* Car, si le numérateur est un multiple du diviseur, comme pour $\frac{15}{11} : 5$, le quotient est visiblement $\frac{3}{11}$, puisque, si l'on multiplie $\frac{3}{11}$ par le diviseur 5, on retrouve le dividende. Mais si le numérateur n'est pas un multiple du diviseur, comme pour $\frac{6}{7} : 5$, on peut aisément le rendre divisible par 5, en multipliant les deux termes par 5; on a $\frac{6 \times 5}{7 \times 5}$, la division par 5 donne donc $\frac{6}{35}$, calcul qui a consisté à multiplier le dénominateur 7 par 5.

41. Venons-en aux cas où le multiplicateur et le diviseur sont fractionnaires; prenons, par exemple, $3 \times \frac{2}{5}$. D'après la définition (n° 3) de la multiplication, on veut donc répéter le multiplicande 3, autant de fois que l'indique le nombre d'unités du multiplicateur $\frac{2}{5}$; mais puisque ce dernier facteur n'est que les $\frac{2}{5}$ de l'unité, il est clair qu'on ne veut ici prendre que les $\frac{2}{5}$ de ce que donnerait 1 fois 3, savoir les $\frac{2}{5}$ de 3. Donc, en général, *multiplier par $\frac{2}{5}$, c'est prendre les $\frac{2}{5}$ du multiplicande* *.

Nous avons vu (n° 37, 4°) que, pour prendre les $\frac{2}{5}$ de 3, il faut multiplier 2 par 3 et diviser par 5 : $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5} = 3 \times \frac{2}{5}$. De même, multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, c'est prendre les $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$; il faut donc former

* Ces considérations équivalent à donner, avec M. Cauchy, cette définition de la multiplication : *multiplier* A *par* B, *c'est opérer sur le nombre* A, *précisément comme on opère sur l'unité pour obtenir le nombre* B. Ainsi, 5 est l'unité ajoutée cinq fois; donc, pour multiplier 3 par 5, il faut aussi ajouter 3 cinq fois. $\frac{5}{7}$ est l'unité divisée en 7 parties égales, dont on prend l'une cinq fois; de même, pour multiplier 3 par $\frac{5}{7}$, il faut diviser 3 en 7 parties égales, et répéter 5 fois le résultat $\frac{3}{7}$; le produit est $\frac{15}{7}$, ou, ce qui revient au même, les $\frac{5}{7}$ du nombre 3. C'est ce que M. Lacroix exprime en disant *que le produit est composé avec le multiplicande comme le multiplicateur l'est avec l'unité.* Mais cette énonciation manque de clarté, parce que le mot *composé* doit y être pris avec une signification active ou passive, selon que le multiplicateur est un nombre entier ou une fraction.

7 parts dans la grandeur $\frac{3}{4}$, et en prendre 5, ou multiplier $\frac{3}{4}$ par 5 et diviser le résultat par 7 : la première de ces opérations donne $\frac{15}{4}$, et la seconde $\frac{15}{28}$.

Donc, 1° *pour multiplier deux fractions, il faut multiplier terme à terme,* c'est-à-dire, *diviser le produit des numérateurs par celui des dénominateurs.*

2° Le produit est plus petit que le multiplicande, quand le multiplicateur est une fraction moindre que 1.

3° On peut intervertir l'ordre des facteurs, comme dans la multiplication des nombres entiers (n° 11).

4° Lorsqu'il y a des facteurs communs, il convient de les supprimer avant d'effectuer les multiplications ; par exemple, pour avoir les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{4}{5}$ de l'unité, c'est ce qu'on nomme *une Fraction de fraction,* il faut effectuer le produit $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$, ou $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 4}{3 \times 4 \times 6 \times 5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, en supprimant les facteurs 3, 4 et 5.

5° Le carré, le cube, et en général toute puissance d'une fraction se forme en élevant les deux termes à cette puissance : par exemple, le carré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; le cube est $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, etc. ; donc, *si la fraction proposée est irréductible, la puissance l'est pareillement* (n° 26).

6° Pour multiplier 5348 par $\frac{13}{16}$, on pourrait multiplier 5348 par 13, et diviser le produit par 16 ; mais comme le multiplicande est un nombre assez fort, il est plus court de décomposer $\frac{13}{16}$ en *parties aliquotes,* c'est-à-dire en fractions qui, réduites, aient 1 au numérateur, savoir :

Mult^de . .	5348
$\frac{1}{2}$ . . .	2674
$\frac{1}{4}$ . . .	1337
$\frac{1}{16}$ . . .	334 $\frac{1}{4}$
Produit . .	4345 $\frac{1}{4}$

$$\frac{13}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

On prendra donc d'abord la moitié de 5348, puis le quart, qui est la moitié du résultat qu'on vient de trouver, puis le seizième (quart du produit précédent).

On voit ci-contre le produit de 356 par 23 $\frac{5}{6}$; où l'on a décomposé $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, et $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$.

	356
	23 $\frac{5}{6}$
20	1068
3	7120
$\frac{1}{2}$	178
$\frac{1}{3}$	118 $\frac{2}{3}$
	8484 $\frac{2}{3}$

Pour diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, multipliez les deux termes de $\frac{3}{4}$ par 5×7, savoir : $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} \times \frac{5}{7}$; or, pour diviser

par $\frac{5}{7}$, il suffit de supprimer ici le facteur $\frac{5}{7}$ ce qui donne pour quotient $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$, ou $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$: ainsi, *il faut multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée.*

$$8 : \frac{3}{5} = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}; \quad \frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5} = \frac{33}{20}.$$

Le quotient est d'ailleurs plus grand que le dividende, quand le diviseur est moindre que l'unité.

Si les fractions renferment des facteurs communs, il ne faut pas attendre que la multiplication soit effectuée pour les supprimer. $\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$ est la même chose que $2 : 4 = \frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$;

$$\frac{18}{19} : \frac{9}{38} = \frac{2 \cdot 9}{19} \times \frac{2 \cdot 19}{9} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = 4.$$

42. *Lorsqu'il y a des entiers joints aux fractions, on les convertit en nombres fractionnaires* (n° 37, 2°). Ainsi,

$$3\frac{2}{9} \times 7\frac{1}{3} = \frac{29}{9} \times \frac{22}{3} = \frac{638}{27} = 23\frac{17}{27},$$
$$45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3} = \frac{183}{4} \times \frac{53}{3} = \frac{9699}{12} = 808\frac{1}{4};$$
$$2\frac{1}{3} : 4\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{19}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{19} = \frac{28}{57}.$$

Observez qu'il est souvent plus court d'exécuter séparément la multiplication de chaque partie, et d'ajouter. Pour $3\frac{1}{4} \times 8$, on multipliera par 8, d'abord $\frac{1}{4}$, et ensuite 3 ; on aura $\frac{8}{4}$ ou 2, et 24 ; le produit est donc 26. L'exemple ci-contre montre le développement du calcul de $45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3}$: on multiplie 45 par 17, $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, 45 par $\frac{2}{3}$, et 17 par $\frac{3}{4}$: la somme de ces résultats est 808 $\frac{1}{4}$, produit cherché.

	45 $\frac{3}{4}$
	17 $\frac{2}{3}$
	315
	45
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
45 $\times \frac{2}{3}$	30
17 $\times \frac{3}{4}$	12 $\frac{3}{4}$
	808 $\frac{1}{4}$

On abrége souvent le calcul en décomposant la fraction qui multiplie, en ses *parties aliquotes,* c'est-à-dire en d'autres fractions qui, réduites, ont l'*unité pour numérateur,* et opérant pour chacun séparément. Ainsi, pour prendre les $\frac{11}{12}$ de 756, on pose $\frac{11}{12} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$; pour $\frac{6}{12}$, on prend la moitié de 756 qui est 378 ; pour $\frac{4}{12}$, le tiers qui est 252 ; enfin, pour $\frac{1}{12}$, le quart de 252 qui est 63 ; les $\frac{11}{12}$ de 756 sont $= 378 + 252 + 63 = 693$.

Dans la division, on peut chasser le dénominateur du diviseur, en multipliant les deux quantités proposées par ce même dénominateur, ce qui n'altère pas le quotient (n° 15, 1°). Pour diviser $2\frac{1}{3}$

par $3\frac{5}{6}$ je multiplie ces deux nombres par 6; j'ai 14 à diviser par 23 ou $\frac{14}{23}$. De même, $125\frac{1}{3} : 18\frac{3}{4} = 501\frac{1}{3} : 75 = \frac{501}{75} + \frac{1}{225} = 6 + \frac{154}{225}$; $1 : 2\frac{1}{3} = 3 : 7 = \frac{3}{7}$.

Des Fractions décimales.

43. L'embarras qu'entraînent, dans les calculs, les deux termes des fractions, a inspiré l'idée de fixer d'avance le dénominateur et de le sous-entendre, ce qui donne lieu à deux sortes de dispositions, les fractions décimales et les nombres complexes; mais les unes et les autres sont assujetties aux règles données précédemment, qui seulement deviennent plus simples. Occupons-nous d'abord des fractions décimales.

On a vu (n° 6) qu'un chiffre vaut dix fois moins que s'il occupait la place qui est à sa gauche; si l'on continue la même convention à la droite des unités dont le rang sera marqué par une virgule, on verra que le premier chiffre après les unités représentera des dixièmes, le deuxième des centièmes, le troisième des millièmes; etc... 3,3 désignera 3 entiers et $\frac{3}{10}$; 42,05 vaudra 42 et $\frac{5}{100}$; $0,403 = \frac{4}{10} + \frac{3}{1000} = \frac{403}{1000}$.

Ainsi, la partie qui suit la virgule est le numérateur, et il est inutile d'écrire le dénominateur, qui est toujours 1 suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres après la virgule. Il est donc bien facile de lire une fraction décimale écrite, ou réciproquement d'écrire une fraction décimale proposée, puisque l'énoncé même est le numérateur ou la partie qui suit la virgule, et que le dénominateur est marqué par le rang de la dernière décimale, qui indique combien on doit écrire de zéros à la droite de 1. Par exemple, 8,700201 = 8 et 700201 millionièmes; parce que 1 étant au sixième rang, le dénominateur est 1000000 : de même 354,0063 = 354 + 63 dix-millièmes. Réciproquement, 3 dix-millièmes s'écrit 0,0003, parce que dix mille porte 4 zéros, et que la dernière décimale doit être au quatrième rang.

Mille entiers et 4 centièmes = 1000,04.
13 mille cent-millionièmes = 0,00013000.

44. On remarquera que, 1° en déplaçant la virgule, suivant qu'elle recule vers la droite ou vers la gauche, le nombre est multiplié ou divisé par 10 pour un rang, par 100 pour deux rangs, par

1000 pour trois rangs, etc., parce que chaque chiffre a pris une place qui lui donne une valeur multipliée ou divisée par 10, 100, 1000; ainsi, 342,53 est dix fois 34,253.

2° *On peut, sans changer la valeur d'une fraction décimale, mettre ou ôter un ou plusieurs zéros à sa droite;* car on multiplie alors les deux termes de la fraction par 10, 100, 1000.

$0,3 = 0,30 = 0,300...$ revient à $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$....

3° Deux fractions décimales, formées d'autant de chiffres, ont même dénominateur. Pour réduire au même dénominateur, il suffit de rendre égal le nombre des chiffres des fractions décimales, en ajoutant des zéros à la droite de l'une d'elles.

4° Pour distinguer la plus grande de deux fractions décimales, ce n'est pas le nombre de chiffres qu'il faut consulter, mais la grandeur des chiffres, à partir de la virgule. $0,4 < 0,51$, $0,7 > 0,54321$; parce que $7 > 5$; $0,004 > 0,00078$; $0,09 < 0,1$; $0,687 > 0,6839$.

45. Voyons maintenant ce que deviennent les règles de l'addition, la soustraction..., lorsqu'il s'agit de fractions décimales.

Pour ajouter ou soustraire, complétez les nombres de décimales en ajoutant des zéros à la droite (n° 44, 3°); puis faites le calcul à l'ordinaire, comme s'il n'y avait pas de virgule, sauf à la placer au même rang dans le résultat. Observez qu'à proprement parler, les zéros qu'on ajoute sont inutiles, et qu'il suffit de donner à chaque chiffre la place qui convient, eu égard à son rang compté de la virgule.

3,02	4852,791
2,70	4,00745
8,00	2,7
4,69	0,049
18,41	4859,54745

Voici quelques exemples de soustraction :

57,02	4,8274	6,00435	3,842
48,1	2,0139	0,17	1,004554
8,92	2,8135	5,83435	2,837446

46. Pour multiplier les deux quantités 43,7 et 3,91, observons qu'elles équivalent à $\frac{437}{10}$ et $\frac{391}{100}$. Le produit des numérateurs (n° 41) doit être divisé par celui des dénominateurs, ou $\frac{437 \times 391}{1000} = \frac{170867}{1000} = 170,867$. Donc, *pour obtenir le produit de deux nombres décimaux, il faut multiplier sans avoir égard à la virgule, et séparer, à droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.*

Voici divers autres exemples de multiplication :

2,4542	3,7	21,32	0,04
0,0053	4,12	0,100103	0,007
73626	74	6396	0,00028
122710	37	2132	
0,01300726	14 8	2 132	
	15,244	2,13419596	

On pourrait exécuter la multiplication en commençant par le chiffre de l'ordre le plus élevé ; alors chacun des produits partiels devrait être avancé d'un rang vers la droite ; la première ligne serait celle qu'on a coutume d'écrire la dernière ; l'avant-dernière deviendrait la deuxième, etc. C'est ce qu'on peut remarquer dans l'opération ci-contre ; on a même cet avantage, qu'on trouve d'abord les chiffres de plus haute valeur et leur ordre, ce qui suffit quelquefois. Par exemple, le premier produit ayant donné 7 chiffres, et les quatre autres multiplicateurs partiels exigeant qu'on recule les produits de quatre rangs, il y aura en tout $7+4$ chiffres au produit. Le nombre 28 qui commence la première ligne est donc suivi de 9 chiffres, ou 28 suivi de 9 zéros (*voy.* p. 16).

	934525
	34276
3.	2803575
4. .	3738100
2. . .	1869050
7. . . .	6541675
6.	5607150
	32031778900

On peut donc arrêter chaque multiplication à tel rang qu'on veut, et par conséquent obtenir au produit tant de chiffres qu'on juge à propos. Par exemple, pour obtenir le produit $15,73432 \times 322,1179$, je déplace les virgules et je fais en sorte que dans l'un des nombres, il n'y ait qu'un seul chiffre entier : le produit sera donc. . . . . $= 1573,432 \times 3,221179$, puisque j'aurai déplacé la virgule d'autant de rangs vers la droite dans l'un, que vers la gauche dans l'autre. Je fais d'abord la multiplication par l'entier 3, et la place de la virgule se conserve visiblement la même que dans le multiplicande. Supposons qu'on veuille quatre décimales au produit. Je multiplie par le 2 des dixièmes, et je recule d'un rang à droite, ce qui me donne 314,6864. La multiplication par les 2 des centièmes ne doit commencer qu'au deuxième chiffre, 3, du multiplicande, dont on supprime le dernier chiffre, 2, à droite, en le marquant d'un point. On voit en effet que si l'on voulait con-

.. ...	
1573,432	
3,221179	
4720,296	. . . 3
314,6864	. . . 2
31,4686	. . . 2
1,5734	. . . 1
1573	. . . 1
1101	. . . 7
141	. . . 9
5068,3059	

server le produit en totalité, il faudrait encore le reculer d'un rang à droite, et que le produit 4, se trouvant dans la colonne des cinquièmes décimales, devrait ensuite être négligé. Le facteur 1 des millièmes exige qu'on supprime un second chiffre du multiplicande, on n'a donc pas égard au 3, et le multiplicande est 15734 : pour le 1 suivant, il est de même 1573. Le facteur 7 donne 1101 ; le 9, 141.

Pour plus d'exactitude, il est convenable d'ajouter au produit du premier chiffre les dizaines contenues dans le produit du chiffre négligé à droite. Par exemple, pour le facteur 7, le multiplicande est réduit à 157 ; mais à 7×7 on doit ajouter 2, provenant du produit supprimé de 7 par 3. De même 9×15 est accru de 6, qui est la retenue du produit 9×7. Dans notre exemple, le produit demandé est 5068,306, ainsi qu'on peut s'en assurer en exécutant la multiplication en totalité, et réduisant le résultat aux seuls millièmes.

Voici un autre exemple où l'on a multiplié deux nombres de sept chiffres décimaux, et où l'on n'a voulu conserver que sept décimales au produit.

.....		
17,3243527		
3,5428319		
51,9730581	produit par 3	
8,6621764	 5	augmenté de 4
6929741	 4	 1
346487	 2	 1
138594	 8	 2
5197	 3	 1
173	 1	 0
156	 9	 3
61,3772693	produit 61,377269	

Lorsque les facteurs ne sont qu'approchés, cette règle est surtout utile ; car le procédé général aurait l'inconvénient d'allonger le calcul pour donner au produit plus de chiffres qu'il ne faut, attendu qu'on n'y doit conserver au plus que des parties décimales de même ordre que dans les deux facteurs *.

La dernière décimale qu'on obtient par ce procédé est un peu

* Lorsqu'on multiplie deux nombres a et b, qui ne sont qu'approchés, les erreurs étant x et y, le vrai produit est

$$(a+x)(b+y) = ab + bx + ay + xy;$$

négligeons xy qui est une fort petite quantité. L'erreur du produit ab est donc $bx + ay$, et s'affaiblit quand l'un des facteurs est approché par défaut et l'autre par excès ; ca