fautive, à cause de la retenue qui provient des colonnes négligées. On remédie à cet inconvénient en calculant une figure décimale, outre celles qu'on veut conserver, sauf à la négliger ensuite.

47. Pour diviser des quantités accompagnées de chiffres décimaux, on en complète le nombre (par des zéros) pour qu'elles en aient autant l'une que l'autre, et l'on supprime la virgule; par là le quotient reste le même, puisque le dividende et le diviseur sont multipliés par la même puissance de 10 (n° 15, 1°). Soit 8,447 à diviser par 3,22; j'écris 3,220, et j'ai 8447 à diviser par 3220, le quotient est 2, et le reste 2007. Ainsi,

$$\frac{8,447}{3,22} = 2 + \frac{2007}{3220}; \text{ de même}$$

$$\frac{49,1}{20,074} = \frac{49,100}{20,074} \text{ ou } \frac{49100}{20074} = 2 + \frac{8952}{20074}.$$

Cette règle se simplifie * lorsque le diviseur n'a pas de fractions,

x et y ayant des signes contraires, la somme $bx + ay$ devient une différence. Il convient donc de choisir des facteurs a et b qui soient dans ce cas.

Mais s'il en est autrement, ou si l'on ignore dans quel sens chaque nombre est approché, le terme ay, le plus influent de l'erreur, s'affaiblit quand y décroît, c'est-à-dire quand b est très-approché. Ainsi l'*erreur du produit* ab *est d'autant moindre que le plus petit facteur* b *est plus approché.*

En général x et y sont toujours $< \frac{1}{2}$ dans une multiplication de deux fractions décimales, parce qu'il faut supposer qu'on a supprimé la virgule pour rendre entiers les facteurs a et b, et que si la première décimale négligée est au moins 5, on a dû augmenter de 1 le chiffre des unités. Faisons donc $x = y = \frac{1}{2}$, la limite de l'erreur est $\frac{1}{2}(a+b)$: ainsi il sera facile, dans chaque cas particulier, de distinguer les chiffres du produit ab qui sont certains, de ceux qui ne le sont pas. Par exemple, 53, 71 × 1,02 = 54,7842; si les facteurs ne sont qu'approchés, en supprimant la virgule, leur demi-somme ayant 4 figures, les 4 derniers chiffres peuvent être fautifs; les 4 décimales du produit n'étaient donc pas utiles à trouver, puisqu'on est incertain s'ils sont exacts. De là résulte qu'il est avantageux de simplifier le calcul de la multiplication, pourvu qu'on n'altère que ces chiffres défectueux, qu'on serait d'ailleurs obligé de rejeter ensuite. Dans l'exemple cité p. 51, la demi-somme des facteurs a 9 chiffres, et le produit complet 14 décimales; il n'y a donc que les 5 premières décimales dont on soit sûr : on n'en doit chercher que 6 (ou 7 au plus), et en négliger ensuite une. Le produit est 61,377269.

* La division éprouve une simplification analogue à celle de la multiplication : par exemple, 320,31768 à diviser par 93,4525, si l'on ne veut que 4 chiffres décimaux, après avoir trouvé les deux premiers chiffres 3,4 à l'ordinaire, on supprimera le dernier chiffre 5 du diviseur; de là le quotient partiel 2, et l'on aura

3203176,8 | 934525
399601 8 | 3,4276
25791 8
7101 3
559 7

à multiplier 93452 par 2, et à soustraire de 257918; il restera 71013. On supprimera de nouveau un chiffre au diviseur, et l'on aura le quotient 7 et le reste 5597, etc. On aura soin, chaque fois qu'on négligera un chiffre, d'accroître le produit suivant des dizaines que donnerait ce même chiffre. Du reste, les derniers chiffres du quotient sont défectueux. Tout cela s'explique facilement.

car on peut diviser à part les entiers; $\frac{6,9345}{3} = 2,3115$. S'il y a plus de décimales dans le dividende que dans le diviseur, on est ramené à ce dernier cas, en déplaçant la virgule d'autant de rangs des deux parts, de manière que le diviseur devienne un nombre entier; $8,447 : 0,09 = 844,7 : 9 = 93,8 + \frac{5}{90}$.

Des Approximations et des Périodes.

48. L'erreur que l'on commet en négligeant le dernier chiffre d'une fraction décimale, est d'autant moindre que cette fraction a plus de figures. Ainsi, lorsqu'on prend 0,4, au lieu de 0,43, on fait une erreur de 3 centièmes; elle n'est que de 3 millièmes quand on pose 0,04, au lieu de 0,043. Lorsqu'on se contente de deux ou trois décimales, et qu'on néglige les autres, c'est qu'on suppose qu'il n'en résulte que des erreurs trop petites pour mériter qu'on y ait égard; il est rare qu'on emploie plus de six ou sept figures décimales.

Le résultat d'un calcul étant 4,837123, on peut prendre 4, 8 ou 4,83, ou 4,837.... pour valeur de cette quantité; et comme elle est $> 4,8$ et $< 4,9$, on voit que ces deux expressions sont approchées à moins de $\frac{1}{10}$, l'une par défaut, l'autre par excès. De même, 4,83 et 4,84 le sont à moins de $\frac{1}{100}$, et même on préférera 4,84, attendu que le chiffre suivant est 7, et que 4,84 approche plus que 4,83. En général, *si le premier des chiffres qu'on supprime est* 5 *ou plus, on doit augmenter d'une unité le dernier chiffre conservé.*

49. Il arrive souvent que le résultat d'un calcul est une fraction irréductible compliquée; on se contente alors d'une approximation dont le degré dépend de la nature de la question. Ainsi, au lieu de $\frac{427}{681}$, supposons qu'on demande une autre fraction plus simple, et qui en diffère de moins de $\frac{1}{8}$. Il est clair que si l'on connaissait deux fractions, telles que $\frac{5}{8}$ et $\frac{6}{8}$, dont le dénominateur fût 8, et dont les numérateurs ne différassent que de 1, elles rempliraient l'une et l'autre la condition exigée, si $\frac{427}{681}$ était compris entre elles; il s'agit de trouver ces numérateurs 5 et 6. Multipliant ces trois fractions par 8, celles qu'on cherche seront réduites à leurs numérateurs inconnus dont 1 est la différence, et la proposée, qui devient $8 \times \frac{427}{681}$ ou $\frac{3416}{681}$, sera encore comprise entre ces numérateurs : mais, en extrayant les entiers, on trouve que $\frac{3416}{681}$ est entre 5 et 6; ce sont donc

les numérateurs demandés. En effet, on vérifie aisément que $\frac{5}{8}$ ne diffère de $\frac{427}{681}$ que de $\frac{11}{5448}$, bien moindre que $\frac{1}{8}$. De là cette règle *:

Multipliez la fraction proposée par le dénominateur donné ; l'entier approché du produit (par excès ou par défaut) est le numérateur demandé. Pour approcher de $\frac{34}{57}$ à moins de $\frac{1}{11}$, on multiplie par 11, et on a $\frac{374}{57} = 6$ ou 7 en nombre entier ; donc $\frac{6}{11}$ et $\frac{7}{11}$ sont les fractions cherchées. Pour approcher de $\frac{34}{7}$ à moins de $\frac{1}{3}$, on a $\frac{34}{7} = 4\frac{6}{7}$; or $\frac{6}{7}$ à moins de $\frac{1}{3}$ est entre $\frac{2}{3}$ et 1 ; donc $4\frac{2}{3}$ et 5 sont les nombres demandés.

Appliquons cette règle aux fractions décimales. Proposons-nous d'approcher de $\frac{4}{7}$ à moins de $\frac{1}{10}$; et multiplions $\frac{4}{7}$ par 10, il viendra $\frac{40}{7}$, qui est entre 5 et 6 ; donc 0,5 et 0,6 sont les fractions demandées. Pour approcher à moins de 0,01, il faut multiplier par 100, et on a $\frac{400}{7}$, entre 57 et 58 ; donc, 0,57 et 0,58 ne diffèrent pas de 0,01 de $\frac{4}{7}$. En général, *divisez le numérateur par le dénominateur, et ajoutez au reste de chaque division un zéro, jusqu'à ce que vous ayez obtenu au quotient un chiffre de l'ordre de l'approximation demandée.*

Ainsi $\frac{25}{7}$ soumis à cette méthode d'approximation, donne 3,5 ou 3,57, ou 3,571, ou 3,5714,..... suivant qu'on veut que la valeur soit approchée à moins de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.... De même, $\frac{147475}{362}$, après avoir donné le quotient entier 407, en continuant la division à l'aide d'un zéro placé après chaque reste, donne 407,389....

50. Lorsque, après avoir ajouté un nombre suffisant de zéros, la division amène le reste zéro, la fraction est exprimée exactement en décimales. On a exactement $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{5}{8} = 0,625$, $\frac{13}{20} = 0,65$. Il est aisé de prévoir dans quel cas cela arrivera ; car la division ne pouvant s'effectuer qu'après avoir multiplié le numérateur par 10, 100, 1000.....il faut, si la fraction est irréductible, que cette puissance de 10 soit divisible par le dénominateur (n° 25, 4°), ce qui suppose qu'il n'a d'autres diviseurs premiers que 2 et 5, et que le plus haut exposant de 2 et 5 est la puissance de 10 qu'on em-

* Pour approcher d'une fraction $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{1}{q}$; il faut déterminer x par la condition que $\frac{x}{q} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{q}$; multipliant tout par q, il faut que $x < \frac{aq}{b} < x+1$; c'est-à-dire que les numérateurs inconnus de nos fractions sont les quotients entiers x et $x+1$, par défaut et par excès, de aq divisé par b.

ploie *. Donc, *pour qu'une fraction irréductible puisse être convertie exactement en décimales, il est nécessaire et il suffit que le dénominateur ne contienne que des puissances de 2 et de 5, quel que soit d'ailleurs le numérateur ; le nombre de figures décimales est égal à la plus haute puissance de 2 et de 5.* Si ce dénominateur est $2^3 \times 5^2$ ou 200, il y a 3 figures ; par exemple, $\frac{147}{200} = 0,735$.

51. Dans tout autre cas, une fraction ne peut être exprimée en décimales que par approximation ; mais, comme les restes des divisions successives sont nécessairement moindres que le diviseur, et que le nombre de ces restes est indéfini, on ne tarde pas à retrouver l'un d'entre eux. On a alors une seconde fois le même dividende, qui conduit au quotient et au reste subséquent qu'on a obtenus alors, et ainsi de suite. On retrouve donc au quotient *périodiquement* les mêmes chiffres dans le même ordre ; et puisque cette période s'établit lorsqu'on retrouve le même reste, et que ces restes sont moindres que le dénominateur, la quotité de restes différents qu'on peut trouver est au plus ce diviseur moins un ; donc *la période est composée de moins de chiffres que le dénominateur n'a d'unités.* Nous indiquerons à l'avenir la période, en la plaçant entre deux crochets.

Par exemple, $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,[6]$; $\frac{3}{11} = 0,27\,27\,27.... = 0,[27]$; $\frac{8}{111} = 0,[342]...$ $\frac{4}{7} = 0,[571428]...$ $\frac{5}{6} = 0,83333.... = 0,8[3]$; $\frac{7}{12} = 0,58\,[3]....$: la période est tantôt de 1, tantôt de 2, de 3... chiffres ; là elle commence dès la virgule ; ici elle ne prend qu'un, deux.... rangs au delà.

52. *Si le dénominateur n'a ni 2, ni 5 pour facteur, la période commencera dès la virgule.* Car en réduisant $\frac{3}{7}$ en fraction décimale, supposons que les restes 5 et 2, donnant les dividendes 50 et 20, aient pu conduire à deux restes égaux ; la différence 50-20 serait divisible par 7 (p. 18), ce qui est impossible, puisque les restes 5 et 2 sont < 7, et que 7 n'a 2, ni 5 pour facteurs. Ainsi deux restes inégaux 5 et 2 ne peuvent donner le même reste, et si l'on obtient deux restes égaux, les restes précédents l'étaient eux-mêmes ; et ainsi en remontant jusqu'au 1er reste 3 **.

* La forme générale des fractions réductibles exactement en décimales est $\frac{a}{2^m \times 5^n}$, le nombre des figures est le plus grand des deux exposants m et n ; et si l'un surpasse l'autre de k, la partie décimale est $a \times 5^k$, ou $a \times 2^k$, selon que m est $>$ ou $< n$; si $m = n$, la partie décimale est a.

** Pour réduire une fraction $\frac{a}{b}$ en décimales, il faut ajouter un zéro près de chaque

Mais *si le dénominateur de la fraction a pour facteurs des puissances de* 2 *et de* 5, *avec d'autres nombres, la période est précédée d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant le plus élevé de* 2 *et de* 5. Car soit proposée la fraction $\frac{83}{140}$, comme $140 = 2^2 . 5 . 7$, si l'on multiplie par 100, on a

$$100 \times \frac{83}{140} = \frac{5 \times 83}{7} = \frac{415}{7} = 59\frac{2}{7} = 59,[285714];$$

cette période commence dès la virgule : donc, en divisant par 100, $\frac{83}{140} = 0,59[285714]$, dont la partie périodique est précédée de deux figures.

Supposons qu'une fraction, telle que $\frac{5}{7} = 0,[714285]$, ait à sa période le plus grand nombre possible de chiffres, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans son dénominateur moins 1. On a dû obtenir dans les divisions successives tous les restes 1, 2, 3.... jusqu'à 6, mais dans un autre ordre : si donc on veut réduire $\frac{3}{7}$ en décimales, il est inutile de recommencer le calcul ; il suffit de le reprendre à l'endroit où l'on a obtenu le reste 3, et de faire commencer la période au terme qu'on a déduit de $\frac{30}{7}$, qui est 4 ; on a de suite $\frac{3}{7} = [428571]$. On voit qu'on a seulement rejeté à la fin les deux premiers chiffres 71 de la première période. De même, $\frac{1}{19} = 0,[052631578947368421]$, et pour $\frac{12}{19}$ on rejettera les trois premiers chiffres 0,52 à la fin, et l'on aura [631...21052]. C'est ce qui se voit aisément, en commençant le calcul pour $\frac{12}{19}$, puisqu'on trouve que les premiers chiffres sont 63...

reste : admettons que 10 D et 10 D' soient deux dividendes partiels conduisant au même reste r ; les quotients étant q et q', on a

$$10\,D = bq + r, \quad 10D' = bq' + r,$$

d'où, retranchant,

$$10\,(D - D') = b\,(q - q').$$

Or, si b n'a pour facteur ni 2 ni 5, 10 et b sont premiers entre eux ; $q - q'$ est < 10, puisque chaque quotient partiel n'a qu'un chiffre ; le second membre ne peut donc être un multiple de 10, ce qui démontre que cette équation ne peut subsister que par $q - q' = 0$; d'où $D = D'$: c'est-à-dire que le même r ne se reproduit qu'autant que le dividende partiel est lui-même revenu ; donc q fait partie de la période, puisqu'elle s'annonce au retour de l'un des restes déjà obtenus. Et comme le reste D doit aussi provenir d'un dividende qui a déjà été employé, il s'ensuit qu'il faut remonter au premier dividende a, pour trouver l'origine de la période, laquelle commence par conséquent dès la virgule.

On peut faire la même chose lorsque la fraction proposée n'a pas autant de chiffres que d'unités dans le dénominateur moins 1 *, pourvu que le numérateur de la deuxième fraction soit un des restes obtenus pour la première. Ainsi $\frac{1}{27} = 0,[037]$; pour $\frac{10}{27}$ on a $0,[370]$; pour $\frac{19}{27}$ on a $0,[703]$; parce que 10 est le premier reste, et 19 le deuxième dans la division de 1 par 27. Pour $\frac{2}{27}$, il suffit de doubler les quotients et les restes : ainsi, $\frac{2}{27} = 0,(074)$; $\frac{20}{27} = 0,(740)$; $\frac{38}{27}$ ou plutôt $\frac{11}{27} = 0,(407)$. On obtient de même, en multipliant par 5, $\frac{5}{27} = 0,(185)$, $\frac{23}{27} = 0,(851)$; $\frac{14}{27} = 0,(518)$.

Voici diverses périodes dans le cas où le numérateur est 1 ; on y a inscrit, pour chaque chiffre de la période, le reste qui l'a donné, afin d'en pouvoir tirer les périodes, quand le numérateur n'est pas 1.

$\frac{1}{3} = 0,[3]$.

$\frac{1}{7} = 0,[1\,4\,2\,8\,5\,7]$.

Reste.	1	3	2	6	4	5

$\frac{1}{11} = 0,[0\,9]$

Reste.	1	10

$\frac{1}{13} = 0,[0\,7\,6\,9\,2\,3]$,

Restes. . . .	1	10	9	12	3	4

$\frac{1}{17} = 0,[0\,5\,8\,8\,2\,3\,5\,2\,9\,4\,1\,1\,7\,6\,4\,7]$.

Restes. . . .	1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12,

$\frac{1}{37} = 0,[0\,2\,7]$

Restes. . . .	1	10	26

$\frac{1}{41} = 0,[0\,2\,4\,8\,9]$.

	1	10	18	16	37

Réduisons en décimales une fraction dont le numérateur soit 1, et supposons qu'on obtienne *un reste égal au dénominateur moins un ;* par exemple, $\frac{1}{13}$, après trois divisions, donne le quotient 0,076 et le reste 12. Pour continuer l'opération, il faut réduire en décimales $\frac{12}{13}$, ou $\frac{13 - 1}{13} = 1 - \frac{1}{13}$; il faut donc retrancher de 1 la partie ,076 déjà obtenue au quotient, c'est-à-dire prendre les compléments de tous ses chiffres à 9, savoir, 923 ; en sorte que $\frac{1}{13} = 0,[076923]$. La période est alors accomplie ; car puisque 10^3 divisé par 13 a donné le reste 12, en ajoutant 1, $10^3 + 1$ doit

* On remarque que, lorsque le diviseur est un nombre premier, si la période n'a pas autant de chiffres que ce nombre a d'unités moins 1, du moins elle en a une quotité, qui est facteur (*partie aliquote*) de cette différence. Ainsi $\frac{1}{13}$ n'a que 6 chiffres à la période ; mais 6 est facteur de 13 — 1 (*voy.* la note page 35, et l'*Arith. compl.* de M. Berthevin.)

donner le reste 13, ou plutôt zéro, $\frac{10^3+1}{13}$ = entier : multipliant par 10^3-1, on trouve que $\frac{10^6-1}{13}$ = entier, c'est-à-dire que $\frac{10^6}{13}$ donne le reste 1 ; la période a donc 6 termes.

Ce qu'on vient de dire s'applique toujours au cas où la période est composée d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le dénominateur moins un, car on est sûr d'obtenir (dans un ordre différent) tous les restes 1, 2, 3, 4,.... et par conséquent le dénominateur moins un : le nombre des divisions qui donnent la période est réduit à moitié. Ainsi, pour $\frac{1}{19}$, neuf divisions donnent le quotient 0,052631578 et le reste 18 ; prenant donc les compléments à 9, on joint à la suite le nombre 947368421, et on a .... $\frac{1}{19} = 0,\ [052631578947368421]$. Pour $\frac{1}{73}$ on a 0,0136 et le reste 72, donc $\frac{1}{73} = 0,\ [01369863]$.

Le procédé suivant permet de prolonger rapidement la partie décimale obtenue, par quelques divisions initiales. Pour $\frac{1}{19}$ on trouve 0,05263 avec le reste 3, et il reste à développer $\frac{3}{19}$ ou $3 \times \frac{1}{19}$; on multipliera donc par 3 le quotient trouvé et on écrira ce produit à la suite ; savoir 15789 ; alors le reste est 9, et il faut multiplier par 9 le quotient total, ou plutôt par 3 le produit précédent, et ainsi de suite. On donne au calcul la disposition suivante :

$\frac{1}{19} = 0,\ 05263$
15789
47367
1 421 01
4 263...

$\frac{1}{19} = 0,\ (05263\ 15789\ 47368\ 421)05\ 263...$

Chaque produit par 3 ajoute cinq figures au résultat, et quand ce produit a 6 chiffres, le 6e s'ajoute aux unités du produit précédent. On trouve de même

$\frac{1}{71} = 0,0140845$ avec le reste 5
produit par 5. 0704225
3521125
1 7605625
8 8028125...

$\frac{1}{71} = 0,0140845\ 0704225\ 3521126\ 7605633\ 8028125...$

53. Il est facile de remonter d'une fraction décimale à sa génératrice. 1° Si cette fraction est finie, comme 0,75, on l'écrira sous la forme $\frac{75}{100}$, qu'il s'agira ensuite de réduire (n° 38, 3°) à la plus simple expression $\frac{3}{4}$.

2° Si la fraction décimale n'est qu'approchée, et qu'on n'en connaisse pas la période en totalité, le problème admet une infinité de solutions. C'est ainsi que 0,75, 0,756, 0,755, 0,7512, etc., répondent aux fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{189}{250}$, $\frac{151}{200}$, etc., qui, réduites en décimales, ont 0,75 pour premiers chiffres.

3° Mais si la période est connue, et qu'elle commence dès la virgule, comme pour 0,666..... 0,2727... etc..... on observera que $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$,.... réduites en décimales, donnent 0,[1], 0,[01], 0,[001]... On peut donc, par exemple, regarder 0,(27) comme le produit par 27 de 0, [01] ou $\frac{1}{99}$; ainsi 0, [27] = $\frac{27}{99}$ ou $\frac{3}{11}$. De même, 0, [6] est le produit par 6 de 0, [1] ou $\frac{1}{9}$: ainsi 0, [6] = $\frac{6}{9}$ ou $\frac{2}{3}$. Donc, *pour remonter d'une fraction décimale périodique à la fraction génératrice, il faut diviser la période par le nombre formé d'autant de 9 successifs que la période a de chiffres.*

On trouvera ainsi que 0, [342] = $\frac{342}{999}$ = $\frac{38}{111}$; 0, [571428] = $\frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$; 0, [036] = $\frac{36}{999} = \frac{4}{111}$.

4° Si la période ne commence pas dès la virgule, on transportera la virgule à l'origine de la période, et on cherchera la fraction qui est égale à toute la partie périodique : réunissant cette fraction à l'entier, on en formera une fraction à deux termes dont on multipliera le dénominateur par une puissance de 10 marquée par la quotité des figures de la partie non périodique. Ainsi, pour 0,5333... je multiplie par 10, et j'ai 5,333... = $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$; divisant par 10, il vient 0,5333... = $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$. Pour 0, 88 [513], on prend 88,[513] = $88\frac{19}{37} = \frac{3275}{37}$; divisant par 100, on trouve 0,88[513] = $\frac{3275}{3700} = \frac{131}{148}$.

Des Nombres concrets et complexes.

54. Jusqu'ici les nombres que nous avons introduits dans nos calculs sont *abstraits*, c'est-à-dire que l'unité n'a pas été définie. Mais ces nombres ne peuvent faire acquérir la notion de la grandeur des objets que quand l'unité est connue. Par le nombre 24, on marque bien que la grandeur à mesurer est formée de 24 fois l'unité : mais lorsqu'on dit, par exemple, que le jour est composé de 24 *heures*, on énonce 1° que l'unité de temps est la durée d'*une*

heure; 2° que 24 de ces unités durent autant qu'*un jour*. Ces sortes de nombres, composés d'une unité particulière, qu'on répète autant de fois que l'indique une quantité abstraite, sont ce qu'on nomme des *Nombres concrets :* ce sont de véritables produits, dont le multiplicande est l'unité, et le multiplicateur un nombre abstrait : l'énoncé 24 *francs* revient à 24 fois *un franc*.

Nous devons, avant tout, faire connaître les dénominations qui servent à désigner les diverses unités.

1° L'unité de longueur se nomme *Mètre ;* c'est la dix-millionième partie de l'arc du méridien de Paris, qui s'étend du pôle à l'équateur.

2° Un carré dont le côté a dix mètres est l'unité de surface ; on le nomme *Are*.

3° Le cube qui a pour côté la dixième partie du mètre est l'unité de volume ; c'est le *Litre*. On se sert aussi du mètre cube, ou *stère,* pour mesurer le bois de chauffage.

4° Le poids d'un cube d'eau qui a pour côté le centième du mètre est l'unité de poids ; c'est le *Gramme*. Comme le poids d'un volume croît avec la densité, il faut ajouter que l'eau doit être pure, et au *maximum* de densité, qui est vers 4 degrés du thermomètre centigrade.

5° L'or et l'argent monnayés doivent contenir $\frac{1}{10}$ d'alliage, c'est-à-dire être à 0,9 *de fin*. L'unité monétaire est le *Franc,* pièce d'argent du poids de 5 grammes.

Mais ces unités sont, pour divers usages, ou trop grandes, ou trop petites : par exemple, la distance de deux villes et l'épaisseur d'un livre, exprimées en mètres, seraient d'une part un trop grand nombre, et de l'autre une fraction gênante : on a réuni plusieurs de nos unités de chaque espèce en une seule pour mesurer les grandeurs considérables, et sous-divisé chacune en parties propres à mesurer les petites quantités. La longueur de dix mètres forme le *Décamètre ;* la capacité de dix litres, le *Décalitre ;* le poids de dix grammes, le *Décagramme,* etc. La longueur de cent mètres est l'*Hectomètre ;* le volume de cent litres, l'*Hectolitre ;* cent grammes, l'*Hectogramme ;* cent ares, l'*Hectare*, etc.; mille mètres font le *Kilomètre ;* mille litres, le *Kilolitre ;* mille grammes, le *Kilogramme,* etc.; dix mille mètres valent un *Myriamètre,* etc., ces nouvelles unités devenant ainsi de dix en dix fois plus grandes.

On partage de même le mètre, le litre,.... en dix parties; on

nomme *Décimètre,* le dixième du mètre ; *Décilitre,* le dixième du litre ; *Décime,* le dixième du franc, etc. Chacun de ces dixièmes se partage de même en dix ; le *Centimètre* est le centième du mètre ; le *Centime,* le centième du franc....; le *Millimètre* est le millième du mètre, etc.

Ainsi, en se réglant toujours sur l'ordre décimal, la nomenclature s'est trouvée comprise dans nos six noms d'unités principales, devant lesquels on place des additifs empruntés à la langue grecque pour désigner des mesures de dix en dix fois plus grandes : *déca,* dix ; *hecto,* cent ; *kilo,* mille ; *myria,* dix mille ; et les adjectifs dérivés du latin : *déci,* dix ; *centi,* cent ; *milli,* mille, pour indiqner des unités de dix en dix fois plus petites. Par exemple, un kilogramme vaut mille grammes ; un centimètre, le centième du mètre, etc. De même, 3827,5 grammes valent 3 kilogrammes, 8 hectogrammes, 2 décagrammes, 7 grammes et 5 décigrammes ; ou, si l'on veut, 38,275 hectogrammes, ou 3,8275 kilogrammes. On énonce ces grandeurs de la manière accoutumée aux fractions décimales ; la seconde, par exemple, se lit ainsi : 38 hectogrammes et $\frac{275}{1000}$.

Il s'en faut de beaucoup qu'on ait besoin de toutes les espèces d'unités comprises dans cette exposition ; mais on rejette celles qui n'ont pas d'usage. Nous dirons donc que *le mètre est la dix-millionième partie de l'arc du méridien qui va du pôle à l'équateur ; l'are est le décamètre carré ; le litre, un décimètre cube ; le stère, un mètre cube ; le gramme est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée au maximum de densité ; le franc est le poids de 5 grammes d'argent à $\frac{9}{10}$ de fin**. La conception simple et grande qui a donné naissance à ce système repose sur cette idée, qu'il faut prendre dans la nature

* Les pièces de 5 francs pèsent 25 grammes ; 4 de ces pièces pèsent un hectogramme ; 100 francs pèsent un demi-kilogramme. On accorde, sur le poids et le titre des pièces de 5 francs, une tolérance de 0,003 en plus et en moins. Le kilogramme d'argent pur vaut environ 222 francs. Les pièces de 5 francs ont 37 millimètres de largeur diamétrale ; 27 de ces pièces, placées sur une même ligne, bout à bout, donnent la longueur du mètre ; 8 pièces forment à peu près 3 décimètres.

Les pièces de 40 fr. pèsent 12,90322 grammes ; celles de 20 fr., 6,45161 grammes, ou 155 pièces de 20 francs pèsent un kilogramme, valant 3100 francs. On accorde une tolérance de 0,002 sur le titre et sur le poids, soit en plus, soit en moins. 34 pièces de 20 fr. et 11 de 40 fr., placées bout à bout sur une ligne, forment la longueur du mètre. Le kilogramme d'or pur vaut environ 3444 fr. La valeur de l'or monnayé est 15 fois et demie celle de l'argent.

un terme invariable, *le mètre*, et déduire ensuite de cette mesure toutes les autres : si quelque catastrophe venait à détruire tous nos étalons, ils seraient faciles à retrouver.

Cet admirable système a rencontré une opposition devant laquelle on a cru devoir fléchir ; on permit l'usage des anciens noms : ainsi on traduit le mot hectare par arpent, décalitre par velte, litre par pinte, hectolitre par septier, décalitre par boisseau, kilogramme par livre, etc. Ce ne fut pas une idée heureuse que de céder ainsi sur la nomenclature : ce ne sont pas les noms dont l'usage est gênant ; c'est une habitude, contractée dès l'enfance, qui a mis nos besoins en relation avec des mesures qu'il faut changer. Ainsi l'on ne remédia qu'à un mal imaginaire, et l'opposition demeura dans toute sa force.

55. Le plus bel éloge qu'on puisse faire des nouvelles mesures est l'exposition des anciennes. Nous présentons ici le tableau de celles qui étaient en usage à Paris ; car elles changeaient avec les provinces, et même avec les villes d'un même État *.

L'unité de longueur se nommait *Toise ;* elle se divisait en 6 *Pieds,* chacun de 12 *Pouces,* et chaque pouce de 12 *Lignes.*

L'unité de poids était la *Livre* ℔, partagée en 16 *Onces* ℥, chacune de 8 *Gros* ou *Dragmes* ℨ, divisés chacun en 72 *Grains* ℊ, ou en 3 *Scrupules* ℈ (de 24 grains). La livre était encore partagée en 2 *Marcs,* de 8 onces chacun, etc. Le signe ℈ désigne une demie ; ainsi ℨ *ii*℈ veut dire 2 gros et demi.

La livre-monnaie, dite *Tournois,* était composée de 20 *Sous,* chacun de 12 *Deniers.*

L'unité pour peser les diamants était le *Karat,* poids de 3,876 grains poids de marc, ou 2 décigrammes ; il se divise en 4 grains **.

* Ces irrégularités tiennent, soit aux besoins, soit aux usages des pays. Tantôt on préférait la sous-division par 12, tantôt par 20 : on choisissait des mesures en relation ici avec les travaux de l'agriculture, là avec les consommations. Par exemple, le boisseau ras de blé en grain pesait 20 ℔ ; un septier de farine pesait 220 ℔, etc. ; la livre de Lyon avait 14 onces ; ailleurs elle n'en contenait que 12, etc.

En faisant disparaître toutes ces variations, le nouveau système a rendu un service incontestable aux hommes ; mais il a malheureusement l'inconvénient de ne pas être devenu, par l'usage, en relation avec nos besoins.

** La valeur d'un diamant dépend de son poids, de sa taille, de sa figure, de son *eau* (son éclat et sa transparence)... Pour l'évaluer, d'après la règle de Jefferies, on exprime d'abord le prix du poids d'un karat, et l'on multiplie ce prix par le carré du nombre de karats. Par exemple, si le karat vaut 50 francs, un diamant de 133 karats vaut $50 \times (133)^2$, ou 884 450 francs. Le *Pitre,* diamant de la couronne, du poids de 136 karats $\frac{3}{4}$, fut payé 2 millions et demi, ce qui revient à 134 francs le premier karat. Le *Sancy,* autre diamant de la couronne, pèse 53 $\frac{1}{2}$ karats. Au reste, la règle de Jefferies ne subsiste que jusqu'à un certain poids, passé lequel le diamant n'a qu'un prix d'affection.

Le *Jour* se partage en 24 *Heures,* l'heure en 60 *Minutes',* chacune de 60 *Secondes"*....

Les étoffes étaient mesurées avec une longueur nommée *Aune,* d'environ 44 pouces ($43^{po}, 9028 = 43^{po}\ 10^{li}, 8333$).

Le *Boisseau,* capacité de 655,78 pouces cubes, contenait 16 litrons (de 40,986 pouces cubes chaque). Le *Septier* valait 12 boisseaux, c'est-à-dire 7869,36 pouces cubes ; la *Mine,* 6 boisseaux ; le *Minot,* 3 ; le *Muid,* 144, c'est-à-dire 12 septiers.

La *Pinte,* qui, selon l'ordonnance des Échevins, devait contenir 48 pouces cubes, n'en avait réellement que 46,95. La *Velte* valait 8 pintes ; le *Muid* 288 ; il se divisait en 2 *Feuillettes* ou 4 *Quartauts.* Le *Tonneau* valait 2 muids ou 576 pintes. A Bordeaux, le tonneau contenait 3 muids ou 864 pintes ; la *Queue* d'Orléans valait 432 pintes.

Récapitulons les mesures ci-dessus énoncées.

Toise.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
1 =	6 =	72 =	864
	1 =	12 =	144
		1 =	12

Jour.	Heures.	Minutes.	Secondes.
1 =	24 =	1440 =	86400
	1 =	60 =	3600
		1 =	60

Livre.	Marcs.	Onces.	Gros.	Scrupules.	Grains.
1 =	2 =	16 =	128 =	384 =	9216
	1 =	8 =	64 =	192 =	4608
		1 =	8 =	24 =	576
			1 =	3 =	72
				1 =	24

Muid.	Septiers.	Boisseaux.	Litrons.
1 =	12 =	144 =	2304
	1 =	12 =	192
		1 =	16

Livre.	Sous.	Deniers.
1 =	20 =	240
	1 =	12

Quant aux rapports entre les anciennes et les nouvelles mesures, voyez à la fin de l'Arithmétique.

Il nous reste à parler des moyens de faire les quatre règles sur des *nombres complexes :* on nomme ainsi ceux qui sont formés d'unités principales et de sous-divisions. Nous n'avons rien à dire

pour les nouvelles mesures qui, n'admettant que des fractions décimales, rentrent dans ce qu'on a enseigné (nos 45, 46 et 47).

56. Pour ajouter ou soustraire les quantités complexes, on écrit, au-dessus les unes des autres, les parties qui ont une même dénomination, et l'on opère successivement sur chacune, en commençant par les plus petites. Si la somme d'une colonne surpasse le nombre d'unités nécessaires pour former une ou plusieurs unités de l'ordre supérieur, on les retient, et l'on ne pose que l'excédant.

Exemples d'addition :

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
154	3	7	$9\frac{1}{2}$
23	2	8	$11\frac{1}{3}$
132	5	10	$3\frac{5}{6}$
0	2	7	1
311	2	10	$1\frac{2}{3}$

Marcs.	Onces.	Gros.	Grains.
15	3	6	42
217	7	7	60
41	6	5	17
4	5	6	10
280	0	1	57

Livres.	Sous.	Deniers.
322	17	5
43	11	7
7	8	4
18	2	7
43	16	6
435	16	5

Jours.	Heures.	Minutes.	Secondes.
2	10	42	54
5	9	17	19
0	21	3	48
8	17	4	1

Dans le premier de ces exemples, la colonne des lignes donne 25 lignes $\frac{2}{3}$, ou 2 pouces 1 ligne $\frac{2}{3}$, parce que 12 lignes valent 1 pouce; on pose donc seulement 1 $\frac{2}{3}$, et l'on reporte 2 à la colonne des pouces, qui donne 34, ou 2 pieds 10 pouces; posez 10 et retenez 2, etc.

Voici quelques soustractions :

Livres.	Onces.	Gros.	Grains.
32	9	2	44
12	12	5	12
19	12	5	32

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
487	0	0	0
319	4	3	10
167	1	8	2

Livres.	Sous.	Deniers.
349	17	4
127	8	7
222	8	9

Jours.	Heures.	Minutes.	Secondes.
17	11	47	5
13	18	55	40
3	16	51	25

On voit qu'après avoir soustrait 12 grains de 44, on passe aux gros; mais comme 2 — 5 ne se peut, on ajoute 1 once ou 8 gros, et l'on a 10 — 5 = 5; puis on ajoute pareillement une once aux 12 qu'il faut ôter de 9; de sorte qu'on dira 9 — 13 ne se peut; ajoutant une livre ou 16 onces, on a 25 — 13 = 12, etc.... Cette opération est fondée sur le même principe que pour les nombres entiers.

Descartes, né le 3 avril 1596, est mort le 11 février 1650; Pascal, né le 19 juin 1623, est mort le 10 août 1662; Newton, né le 15 décembre 1642, est mort le 18 mars 1727. On demande la durée de la vie de ces grands géomètres.

57. Pour la multiplication des nombres complexes, d'après les principes donnés (n° 42), on opérera séparément sur les entiers et sur les fractions. On remarquera que le multiplicateur doit toujours être un nombre *abstrait* (n° 54), destiné à marquer combien de fois on répète le multiplicande. Multiplier 12 francs par 3 aunes, ce ne peut être répéter 12 francs 3 aunes de fois, mais bien répéter 12 francs autant de fois que l'unité est comprise dans trois aunes, c'est-à-dire 3 fois. Ainsi, lorsque les deux facteurs paraissent concrets, c'est que la question est mal interprétée. Au reste, ceci s'éclaircira par la suite.

Il se présente deux cas, suivant que le multiplicateur est ou n'est pas complexe.

1er cas. On voudrait savoir le prix de 17 aunes $\frac{2}{3}$ d'une étoffe qui coûte 45 livres 12 sous 6 deniers l'aune; il est clair qu'il faut répéter ce dernier nombre 17 fois et $\frac{2}{3}$, de sorte que le multiplicateur 17 $\frac{2}{3}$ cesse de représenter des aunes, et devient un nombre *abstrait* (n° 54). On multiplie d'abord 45 livres, puis 12 sous, puis enfin 6 deniers par 17. Le premier de ces calculs n'offre pas de difficultés. Décomposons 12 sous en 10 + 2 : puisque 1 livre répétée 17 fois donne 17 livres, 10 sous ou $\frac{1}{2}$ livre doit donner la moitié de 17 livres; 2 sous en donne le dixième, ou le cinquième du produit de 10 sous. On a pour 6 deniers le quart du produit que donne 2 sous. On prend ensuite les deux tiers du multiplicande, et l'on ajoute le tout.