CHAPITRE III.

PUISSANCES ET RACINES.

Formation des Puissances.

60. En multipliant un nombre par lui-même, 1 2, 3,.... fois successives, on en obtient les puissances 2, 3, 4,.... comme on le voit dans le tableau ci-contre.

1re	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Le carré (n° 41, 5°) de $\frac{3}{5}$ est $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; le cube est $\frac{27}{125}$. . . .

Lorsqu'on veut former une puissance élevée, on peut éviter de passer successivement du carré au cube, du cube à la quatrième puissance.... Soit demandé 3^{11}; comme il s'agit de rendre 3 onze fois facteur, je décompose 11 en $3+4+4$; il vient $3^{11}=3^3\times3^4\times3^4$. On voit donc qu'*il faut décomposer la puissance proposée en d'autres dont elle soit la somme, et multiplier ces résultats entre eux ;* en sorte que, *dans la multiplication, les exposants s'ajoutent.* Ici, $3^3=27$, $3^4=81$; en multipliant, on a $3^7=2187$; multipliant de nouveau par 81, on trouve $3^{11}=177\,147$.

Observez que $3^4\times3^4$ n'est autre chose que le carré de 3^4, ou $81^2=6561$; ainsi, multipliant $(3^4)^2$, ou 6561 par $3^3=27$, on obtient de même 3^{11}. La puissance 12 est $3^4\times3^4\times3^4=$ le cube de 3^4 ou $(3^4)^3$; on trouve $3^{12}=81^3=531\,441$; divisant par 3, il vient $3^{11}=177\,147$. En général, *décomposez la puissance proposée en deux facteurs, formez la puissance indiquée par l'un, et élevez le résultat à la puissance marquée par l'autre ;* ou autrement, *pour élever à une puissance, multipliez l'exposant par le degré de la puissance* (*voy.* n° 124). Par exemple, pour 5^{17}, faisons $\frac{1}{5}\times5^{18}$. Or,

$18=2\times3\times3$; $5^{18}=5^{2\cdot3\cdot3}$: on fera donc le carré de 5, on l'élèvera au cube, puis le résultat encore au cube, et l'on aura la dix-huitième puissance ; après quoi on divisera par 5 pour avoir la dix-septième. Voici le calcul : $5^2=25$, $25^3=5^6=15\,625$, dont le cube est $5^{18}=3\,814\,697\,265\,625$; enfin $5^{17}=762\,939\,453\,125$. On remarquera avec quelle rapidité les puissances croissent. La soixante-quatrième de 2 est 18 446 744 073 709 551 616.

Extraction des Racines carrées.

61. Le carré d'un nombre de 2 chiffres, tel que 35, se forme par la multiplication de 35 par 35, opération qui exige quatre produits partiels; 1° 5×5, ou le carré des unités ; 2° 30×5, ou le produit des dizaines par les unités ; 3° une seconde fois 30×5; 4° 30×30, ou le carré des dizaines. Donc le carré d'un nombre de 2 chiffres est formé *du carré des dizaines, deux fois le produit des dizaines par les unités, plus enfin le carré des unités.* Ainsi,

$$35^2=900+300+25=1225.$$

Pour multiplier $7+5$ par $7+5$, on multiplie 7 et 5 d'abord par 7, puis par 5, et l'on ajoute; ce qui donne $7^2+7\times5$ d'une part, et $7\times5+5^2$ de l'autre. Donc 12^2 est $=49+25+2\times35=144$. Donc, pour faire le carré de $7+5$, il ne suffit pas de carrer 7 et 5, il faut encore ajouter le double du produit de 7 par 5. *Le carré d'un nombre composé de deux parties se forme des carrés de chacune, augmentés du double de leur produit* (*voy.* n° 97, 1°).

62. Les carrés de 10, 100, 1000.... sont 100, 10000, 1 000 000 ou 1 suivi de deux fois autant de zéros qu'il y en a à la racine : ainsi, tout nombre d'un seul chiffre, ou compris entre 1 et 10, a son carré entre 1 et 100, c'est-à-dire composé de 1 ou 2 chiffres : de même, tout nombre de 2 chiffres en a 3 ou 4 à son carré, etc. En général, *le carré a le double, ou le double moins* 1, *des chiffres de la racine* (p. 16.)

Procédons au calcul de l'extraction des racines carrées. Celles des nombres de 1 ou 2 chiffres sont compris dans les tables n°s 14 et 60 : quant aux autres, il faut distinguer deux cas.

1er cas. Si le nombre proposé, tel que 784, a 3 ou 4 chiffres, sa racine en a deux; et 784 est composé du carré des dizaines de la racine, de celui des unités, et du double du produit des dizaines par les unités. Or, la première de ces parties se forme en ajoutant deux zéros au carré du chiffre des dizaines (n° 13, 3°) ; d'où il suit

que ce carré n'entre dans l'addition de ces trois parties qu'au rang des centaines. En séparant les deux chiffres 84, on voit que 7 contient le carré du chiffre des dizaines, considérées comme des unités simples, et en outre les centaines produites par les autres parties du carré.

On prendra *la racine du plus grand carré* 4 contenu dans 7, elle sera le chiffre des dizaines cherché : car 7 étant compris entre les carrés de 2 et de 3, le nombre proposé 784 l'est entre 20^2 et 30^2; ainsi, la racine est entre 20 et 30, et l'on a 2 pour le chiffre des dizaines.

En retranchant 4 de 7, le reste 3 est la retenue ; ainsi 384 est composé du carré des unités, plus du double des dizaines multiplié par les unités.

On forme le produit du double des dizaines par les unités, en multipliant le double du chiffre des dizaines par les unités, et mettant un zéro à droite. Ainsi, dans l'addition, ce produit est compris au rang des dizaines, et contenu par conséquent dans 38, en séparant de 384 le chiffre 4 des unités : 38 contient en outre les dizaines produites par le carré des unités, et celles qui proviennent de ce que 784 peut n'être pas un carré exact. Si ces dizaines étaient connues, en les ôtant de 38, le reste serait le double produit dont il est ici question ; donc, en le divisant par 4, double du chiffre des dizaines, le quotient serait les unités. Divisons donc 30 par 4, le dividende sera plus grand que celui qu'on doit employer, et *le quotient pourra être trop grand;* mais il sera facile de le rectifier.

Car si le quotient $\frac{38}{4}$, ou 9 en nombre entier, représente en effet les unités, en plaçant 9 à côté du double 4 du chiffre des dizaines, 49 sera le double des dizaines ajouté aux unités; et 49×9 sera le double du produit des dizaines par les unités, plus le carré des unités. Or, $49 \times 9 = 441 > 384$; donc 9 est trop grand. On éprouvera le chiffre 8 de la même manière ; et, comme $48 \times 8 = 384$; qui, retranché du reste, donne 0, on voit que 784 est le carré exact de 28. On a mis ici le type du calcul, ainsi que celui de $\sqrt{2735}$ qui est 52, avec le reste 31, de sorte que 52 est la racine du plus grand carré contenu dans 2735, c'est-à-dire celle de 2735 — 31; ou 2704. On trouve ainsi $\sqrt{121} = 11$.

7.8 4	28
3 8.4	49 48
3 8 4	9 8
0	441 384

27.3 5	52
2 3.5	102
2 0 4	2
3 1	204

1.2 1	11
2.1	21
2 1	1
0	21

2e CAS. On raisonnera de même si le carré a plus de quatre chiffres; car alors, bien que la racine en ait plus de deux, on peut encore la regarder comme composée de dizaines et d'unités; par exemple, 523 a 52 dizaines et 3 unités.

Ainsi, pour 273529, on verra, par la même raison, que le carré des dizaines, considérées comme simples unités, est contenu dans 2735 (en séparant les deux chiffres à droite, 29), et que la racine du plus grand carré contenu dans 2735 donne les dizaines. On a trouvé ci-dessus 52 pour cette racine, et 31 pour reste; de sorte que descendant 29 à côté de 31, 3129 est le double produit des dizaines 52 par les unités inconnues, plus le carré de ces unités ; supprimant le chiffre 9, on divisera 312 par 104, double des dizaines 52; on aura le quotient 3, qui est les unités de la racine, ou un nombre plus grand.

27.3 5.2 9	523
2 3 5	102 1043
2 0 4	2 3
3 1 2.9	204 3129
3 1 2 9	
0	

Enfin, plaçant ce quotient à droite de 104, et multipliant 1043 par 3, on retranchera le produit 3129 du reste 3129; ainsi 523 est exactement la racine cherchée.

Ce raisonnement s'applique à tout nombre; on voit qu'il faut le partager en tranches de deux chiffres, en commençant par la droite, ce qui ne laissera qu'un seul chiffre dans la dernière tranche, lorsque le nombre des chiffres sera impair. Chaque tranche donne un chiffre à la racine, en opérant sur chacune comme il vient d'être dit. Il est donc bien facile de juger *à priori* du nombre de chiffres de la racine d'un nombre donné. Quand cette racine n'est pas exacte, le calcul conduit à un reste; nous allons montrer l'usage de ce reste pour approcher de la racine.

Observez aussi qu'il est inutile d'écrire les divers produits à soustraire, et qu'on peut, comme pour la division (p. 23) faire à la fois chaque multiplication et la soustraction.

11.1 1.0 8.8 8.8 9	33 333	54.0 0.0 0.0 0	7348
2 1.1	63 663	5 0.0	145×5
1 8 9	3 3	7 1 0.0	1464×4
2 2 0.8	189 1989	1 2 4 4 0.0	14688×8
1 9 8 9		Reste....6 8 9 6	
2 1 9 8.8	6 663 66 663		
1 9 9 8 9	3 3		
1 9 9 9 8.9	19 989 199 989		
Reste 0			

On peut aussi s'exercer sur les exemples suivants :

$\sqrt{7\,283\,291} = 2698$, reste 4087 ; et $\sqrt{3\,179\,089} = 1783$.

63. On appelle *Commensurables* ou *Rationnels* les nombres qui ont une commune mesure avec l'unité : tel est $\frac{2}{5}$, parce que le cinquième de l'unité est contenu cinq fois dans 1, et deux fois dans $\frac{2}{5}$. Mais, *tout nombre entier, qui n'est pas le carré exact d'un entier, ne saurait l'être non plus d'un nombre fractionnaire, et par conséquent sa racine est incommensurable avec l'unité.* Car s'il y avait une commune mesure, contenue, par exemple, cinq fois dans l'unité et treize fois dans $\sqrt{7}$, en sorte que (36) la racine de 7 fût représentée exactement par $\frac{13}{5} = \sqrt{7}$, en élevant au carré on aurait $\frac{169}{25} = 7$; ce qui est absurde, ces deux fractions étant irréductibles (n° 41, 5°).

Puisqu'en divisant l'unité en parties égales, on ne peut jamais prendre celles-ci assez petites pour que l'une d'elles soit contenue exactement dans $\sqrt{7}$, et qu'aucune fraction ne peut être la valeur juste de $\sqrt{7}$, si l'on veut la mesure exacte, il faut prendre une autre unité (36) ; à moins qu'on ne se contente d'une approximation, en rendant les parties de l'unité assez petites pour que la différence entre $\sqrt{7}$ et un certain nombre de ces parties puisse être négligée comme de peu d'importance. Par exemple, si l'unité contient 100 parties, et qu'on trouve que 2 unités + 64 de ces parties sont $< \sqrt{7}$, tandis que 65 surpassent $\sqrt{7}$, c'est-à-dire que 7 soit entre les carrés de 2,64 et 2,65, on dit que $\sqrt{7}$ est entre ces nombres, et qu'on a cette racine à moins de un centième. C'est ce qui explique ce paradoxe, qu'on peut approcher autant qu'on veut de $\sqrt{7}$, quoique $\sqrt{7}$ n'existe pas numériquement.

Si l'on veut négliger les quantités moindres que le cinquième de l'unité, il faudra donc trouver combien $\sqrt{7}$ contient de ces cinquièmes, c'est-à-dire chercher deux fractions, telles que $\frac{13}{5}$ et $\frac{14}{5}$ ayant 5 pour dénominateur, dont les numérateurs ne diffèrent que de 1, et qui comprennent $\sqrt{7}$ entre elles, ou plutôt 7 entre leurs carrés. Pour obtenir ces numérateurs 13 et 14, concevons les carrés de nos fractions et celui de $\sqrt{7}$ multipliés par 25 ; 25×7 sera compris entre les carrés des numérateurs inconnus, et par conséquent $\sqrt{(25 \times 7)}$ ou $\sqrt{175}$ sera compris entre ces numérateurs. Or, $\sqrt{175}$ tombe entre 13 et 14 : donc $\frac{13}{5}$ et $\frac{14}{5}$ sont les fractions

cherchées, ou les valeurs approchées de $\sqrt{7}$, à moins de $\frac{1}{5}$, l'une par défaut, l'autre par excès *.

De même, pour avoir $\sqrt{(3\frac{5}{7})}$ à moins de $\frac{1}{11}$, on multipliera $3\frac{5}{7}$ par 11^2 ou 121 ; on aura $449\frac{3}{7}$, dont il faudra extraire la racine en *nombre entier :* elle est 21, en sorte que $\sqrt{3\frac{5}{7}}$ est comprise entre $\frac{21}{11}$, et $\frac{22}{11}$ ou 2. Observez qu'on supprime dans $449\frac{3}{7}$ non-seulement la fraction $\frac{3}{7}$, mais même toute la partie de 449 qui excède le carré de 21. *Pour extraire la racine d'un nombre avec une approximation déterminée, on le multiplie par le carré du dénominateur donné, et l'on extrait en nombre entier la racine du produit : elle est le numérateur cherché.*

64. Si l'on veut approcher à l'aide des décimales, c'est-à-dire à moins de 0,1, 0,01...., il faut multiplier le nombre par le carré de 10, de 100...., ce qui revient à *reculer la virgule vers la droite d'autant de fois deux rangs qu'on veut obtenir de décimales,* en ajoutant un nombre convenable de zéros, si cela est nécessaire. $\sqrt{0,3}$ à moins de 0,01 est $\frac{1}{100}\sqrt{3000}$, en reculant la virgule de quatre rangs, ou $\frac{1}{100} \times 54 = 0,54$. De même, $\sqrt{5,7}$, à moins de $\frac{1}{100}$, est $\frac{1}{100}\sqrt{57000}$, ou 2,38.

Au lieu de placer une longue suite de zéros après le nombre proposé, on peut se contenter d'adjoindre ces zéros par couple, après chaque reste. C'est ce qu'on observera dans les calculs ci-contre de $\sqrt{321}$ et $\sqrt{2}$. On voit que pour avoir une décimale, on se contente de placer une tranche de deux zéros près du premier reste. Pour une deuxième décimale, on place de même deux zéros après le second reste, etc.... On marque de suite la

3.21	17,916...
22.1	27
3 20.0	349
5 90.0	3581
2 31 90.0	35826
16 94 4 etc.	

2	1,41421356
10.0	24
40.0	281
11 90.0	2824
60 40.0	28282
3 83 60.0	282841
1 00 75 9 etc.	

* L'unité étant divisée en q parties égales, pour connaître le plus grand nombre x de ces parties contenu dans $\sqrt{N}$, c'est-à-dire pour obtenir une fraction $\frac{x}{q}$ approchée de $\sqrt{N}$ à moins d'un q^e de l'unité, il faut déterminer x, de sorte qu'on ait $\frac{x}{q} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{q}$; or, $\sqrt{N} = \frac{q}{q}\sqrt{N} = \frac{\sqrt{(Nq^2)}}{q}$; donc, $x < \sqrt{(Nq^2)} < x+1$, c'est-à-dire que x est le plus grand entier contenu dans $\sqrt{(Nq^2)}$.

place de la virgule dans la racine, et l'on pousse le calcul de l'approximation jusqu'au degré nécessaire, en mettant deux zéros après chaque reste successif.

La racine d'un produit est le produit des racines des facteurs : ainsi de $144 = 9 \times 16$, on tire $\sqrt{144} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$. Cette règle, qui est fondée sur ce qu'on a dit (n° 60), peut servir à simplifier les extractions des racines :

$$\sqrt{8} = \sqrt{(2 \times 4)} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1{,}4142\ldots = 2{,}82842712.$$

65. *La racine d'une fraction s'obtient en extrayant la racine de chacun de ses deux termes.* Ceci résulte de la manière dont on forme le carré (n° 41, 5°). $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

La racine est irrationnelle lorsque les deux termes ne sont pas des carrés exacts. Si, par exemple, $\sqrt{\frac{3}{7}}$ pouvait être une autre fraction, telle que $\frac{5}{11}$; il en résulterait $\frac{3}{7} = \frac{25}{121}$, ce qui est impossible (n° 38, 4°). On ne peut donc avoir la racine qu'en approchant à un degré donné par la nature de la question; on procède alors comme il a été dit (n° 63). Par exemple, $\sqrt{\frac{3}{7}}$ à moins de $\frac{1}{11}$ se trouve en multipliant $\frac{3}{7}$ par $121 = 11^2$, et l'on a $\sqrt{\frac{363}{7}} = \sqrt{51\frac{6}{7}}$; et ne prenant la racine de 51 qu'à moins d'une unité, on a $\sqrt{\frac{3}{7}}$ comprise entre $\frac{7}{11}$ et $\frac{8}{11}$.

Observez que $\sqrt{\frac{3}{7}}$ peut bien être pris $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, puisque, si l'on multiplie cette expression par elle-même, on trouve $\frac{3}{7}$ pour produit. Mais outre que cette double extraction exigerait deux valeurs approchées, le degré d'approximation du résultat serait incertain. Il arrive souvent que ce degré n'est déterminé qu'à la fin du calcul; cette partie de l'opération doit donc être dirigée de manière à permettre une approximation illimitée. Pour cela, on multiplie les deux termes de la fraction par son dénominateur, afin de rendre celui-ci un carré; $\frac{3}{7}$ devient $\frac{21}{49}$, en multipliant haut et bas par 7, et $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{21}$; on poussera $\sqrt{21}$ jusqu'au degré exigé. Par exemple, si $\sqrt{21}$ est prise $= 4{,}582$, c'est-à-dire à moins de 0,001, le septième est $\sqrt{\frac{3}{7}} = 0{,}654$, valeur qui ne diffère pas d'un septmillième.

Si l'on eût demandé $\sqrt{\frac{3}{7}}$ à moins de $\frac{1}{7}$, le calcul eût de même conduit à $\frac{1}{7}\sqrt{21}$, entre $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{7}$.

Pour $\sqrt{(3\frac{5}{7})}$, on écrira $\sqrt{\frac{26}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{26 \times 7}$; or $\sqrt{182} = 13{,}4907\ldots$, dont le septième est $\sqrt{(3\frac{5}{7})} = 1{,}9272\ldots$.

66. Les équations suivantes se démontrent en élevant tout au carré :

$$4 \times \sqrt{7} = \sqrt{7 \times 4} = \sqrt{(16 \times 7)}; \quad \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{(5.3)}}{(\sqrt{7.3})}; \quad \sqrt{\tfrac{2}{3}} \times \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{(\tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{4})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} : \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \times \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \sqrt{\tfrac{8}{9}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Ainsi, on peut intervertir l'ordre des facteurs irrationnels, et multiplier par le même facteur les deux termes d'une fraction irrationnelle.

Nous terminerons par plusieurs remarques.

1° On doit toujours préparer les nombres de manière à ne soumettre que des entiers au calcul de l'extraction.

2° Le nombre des décimales d'un carré est toujours pair et double de celui de la racine : on doit ajouter des zéros ou supprimer des décimales, pour que cette condition soit remplie dans tous les cas.

3° Chaque tranche ne devant donner qu'un seul chiffre, on ne peut mettre à la fois plus de 9 à la racine.

4° Le carré d'un entier, tel que 18, étant donné, pour avoir celui du nombre suivant 19, comme $19 = 18 + 1$, le carré est $18^2 + 2 \times 18 + 1$ (n° 61); on ajoutera donc 37 à 324, carré de 18, et l'on aura $361 = 19^2$. En général, *quand on a le carré d'un entier, en ajoutant un, plus le double de ce nombre, on a le carré de l'entier suivant.* Il suit de là que dans l'extraction de racines carrées, chaque reste doit être moindre que le double de la racine qui s'y rapporte; car si l'on trouvait un reste plus grand que ce double, il faudrait mettre une unité de plus à cette racine.

5° La preuve de l'extraction se fait par l'élévation de la racine au carré; il faut qu'en multipliant la racine par elle-même, et y ajoutant le reste, on retrouve le nombre proposé; ce reste doit d'ailleurs être moindre que deux fois la racine. On peut aussi appliquer ici la preuve par 9, par 11,... exposées n° 35, 5°.

Extraction des Racines cubiques.

67. Avant d'extraire la racine cubique, il convient d'analyser la loi suivant laquelle se forme le cube, qui est le produit d'un nombre

par son carré. En imaginant ce nombre décomposé en deux parties, on a vu (n° 61) que le carré est composé du carré de la première, du carré de la seconde, et du double de leur produit : c'est le système de ces trois quantités qu'il faut multiplier par les deux parties du nombre donné. Or, en les multipliant d'abord par la première, on obtient

$$(7+5)^2 = 7^2 + 2\times 7\times 5 + 5^2$$

$$7+5$$

1° Le Cube de la 1re partie. . . . . 7^3
2° 2 fois le carré de la 1re × la 2e. $2\times 7^2\times 5$
3° La 1re × le carré de la 2e. 7×5^2

De même, en multipliant les trois parties du carré par la 2e du nombre donné, il vient :

1° Le carré de la 1re × la 2e. . . . $7^2\times 5$
2° 2 fois le carré de la 2e × la 2e. . $2\times 7\times 5^2$
3° Enfin le cube de la 2e. . . . . 5^3

en réunissant ces six résultats, $7^3+3\times 7^2\times 5+3\times 7\times 5^2+5^3$ on voit que le cube de tout nombre formé de deux parties, se compose de quatre parties, savoir : 1° *le cube de la première ;* 2° *trois fois le carré de la première multiplié par la seconde ;* 3° *trois fois le carré de la seconde multiplié par la première ;* 4° *le cube de la seconde.*

Concluons de là que le cube de tout nombre composé de dizaines et d'unités est formé du *cube des dizaines, trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités, trois fois le carré des unités par les dizaines, enfin le cube des unités.*

68. Le cube de 10, 100, 1000.... est formé de l'unité suivie de trois fois autant de zéros ; ainsi un nombre de deux chiffres, c'est-à-dire entre 10 et 100, a son cube entre 1000 et 1 000 000 ; il est donc composé de quatre, cinq ou six chiffres. En général le cube d'un nombre a le triple de chiffres de sa racine, ou le triple moins 1, ou moins 2.

Les racines des nombres <1000, n'ayant qu'un chiffre, le tableau (p. 70) les a fait connaître. Nous partagerons l'extraction des autres nombres en deux cas.

1er cas. Si la racine n'a que deux chiffres, comme l'est celle de 21 952, je remarque que le cube des dizaines cherchées se forme en cubant le chiffre des dizaines, et plaçant trois zéros à droite

(p. 14). Donc en séparant les trois chiffres 952 du nombre proposé, 21 contient le cube du chiffre des dizaines considérées comme des unités simples, et en outre les mille qui proviennent des autres parties. Le plus grand cube contenu dans 21 est 8, dont la racine est 2 ; c'est le chiffre des dizaines : car puisque 21 est compris entre les cubes de 2 et de 3, 21952 l'est entre les cubes de 20 et de 30.

Otons 2^3 ou 8 de 21, il reste 13952, qui représente les trois autres parties du cube : or, le produit de trois fois le carré des dizaines par les unités se forme en multipliant par les unités le triple du carré de 2, c'est-à-dire 12, et plaçant en outre deux zéros à droite : ainsi, séparant les deux chiffres 52, le nombre 139 contiendra douze fois les unités, et les centaines produites par les deux autres parties du cube. En divisant 139 par 12, le quotient sera donc les unités, ou un nombre plus grand ; et comme ce *chiffre ne peut excéder* 9, on prendra 9 pour le quotient de $\frac{139}{12}$.

Il s'agit de vérifier si 9 est plus grand que les unités. Pour cela, sous 1200, qui est le triple du carré des dizaines, plaçons le triple du produit des dizaines par 9, ou $3\,.\,20\,.\,9=540$; puis le carré de 9 ou 81, et multiplions la somme 1821 par 9. Si 9 est le chiffre des unités, le produit devra être égal au reste, puisqu'on forme ainsi les trois parties que ce reste contient. Ce produit excède 13952, d'où il suit que les unités sont <9. On essayera donc 8 ; et comme en faisant la même épreuve, on trouve précisément 13952, on reconnaît que 28 est la racine cubique exacte de 21952. Ce raisonnement est analogue à celui qu'on a fait pour la division et la racine carrée (nos 18, 62) ; on tirera facilement la règle qu'il faut suivre dans ces sortes de calculs.

		28 Racine.	
21952		12	12
8		54	48
13952		81	64
13952		1821	1744
0		9	8
		16389	13952

2e cas. Si la racine a plus de deux chiffres, comme pour le nombre 12 305 472 001, on raisonnera comme précédemment (n° 62, 2°). On verra qu'il faut, 1° *couper le nombre en tranches de trois chiffres, à partir de la droite.*

2° *Extraire la racine cubique de la dernière tranche* 12, qui est 2 ; c'est le chiffre des mille de la racine : retranchant de 12 le cube 8 des mille, il reste 4.

3° *Descendre à côté de ce reste 4 la tranche suivante* 305, *dont on séparera deux chiffres* 05 ; *et diviser* 43 *par* 12, *triple du carré du*

chiffre obtenu. Le quotient 3 doit être éprouvé comme on vient de le dire. On reconnaît qu'il y a 3 centaines, le reste est 138.

4° *Descendre près de ce reste la tranche* 472, dont on séparera de même 72, et diviser 1384 par 1587, triple du carré de 23; on posera à la racine le quotient 0.

5° *Descendre près du reste la tranche* 001, *et diviser* 1384720 *par* 158700.

Et ainsi de suite. Voici le type du calcul:

12.5 05 . 472 .001	2308	Racine.	
43.05	12	15 870 0	
41 67	18	55 20	
1 38 4.72	9	64	
1 38 4 72 0.01	1389	15 925 264	
1 27 4 02 1 12	3	8	
Reste... 11 0 69 8 89	4167	127 402 112	

69. On démontrera comme au n° 63, que, 1° lorsqu'un nombre entier, tel que 3, n'a point de racine cubique entière, il n'en a pas non plus de fractionnaire; mais on peut approcher indéfiniment de cette racine. Pour obtenir $\sqrt[3]{3}$ à moins de $\frac{1}{4}$, on multipliera 3 par le cube de 4, et l'on aura 3×64, ou 192, dont la racine cubique est 5 en nombre entier : donc $\frac{5}{4}$ est le nombre demandé, et $\sqrt[3]{3}$ tombe entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{6}{4}$. De même, pour $\sqrt[3]{(3\frac{5}{7})}$ à moins de $\frac{1}{11}$, on a $3\frac{5}{7} \times 11^3 = 4943\frac{5}{7}$, la racine cubique est 17; donc $\frac{17}{11}$ est approché de $\sqrt[3]{(3\frac{5}{7})}$ à moins de $\frac{1}{11}$.

2° *Pour approcher à l'aide des décimales, on reculera la virgule d'autant de fois trois rangs à droite qu'on veut de chiffres décimaux :* on ajoutera pour cela un nombre convenable de zéros, si cela est nécessaire. Ainsi, pour avoir $\sqrt[3]{0,3}$ à moins de $\frac{1}{100}$, on prendra $\sqrt[3]{300\,000}$ qui est 67, d'où $\sqrt[3]{0,3} = 0,67$.

De même, $\sqrt[3]{5,7}$ à moins de $\frac{1}{10}$ se trouve en prenant $\sqrt[3]{5700}$, qui est 18, et l'on a 1,8.

Enfin, $\sqrt[3]{3,2178}$ à moins de $\frac{1}{10}$ est $= \frac{1}{10}\sqrt[3]{3217} = 1,5$.

3° Si le nombre proposé est entier, on se contentera de placer, près de chaque reste, une tranche de trois zéros, jusqu'à ce qu'on ait obtenu le nombre de chiffres décimaux qu'on désire *.

* Le calcul devient très-long lorsque la racine est un grand nombre : mais on peut en abréger la partie la plus pénible, qui est la recherche des diviseurs destinés à donner pour quotients les chiffres consécutifs de cette racine : appliquons le procédé à la racine de 477. Supposons qu'on ait déjà trouvé la partie 7,8 de cette racine, et qu'on veuille pousser l'approximation plus loin : il faudra faire 3×78^2; mais on a déjà formé la quantité $(3a^2 + 3ab + b^2)\,b$, en faisant $a = 7$ dizaines, $b = 8$ unités, et l'on veut trouver $3a'^2 = 3\,(a+b)^2 = 3\,(a^2 + 2ab + b^2)$, quantité qui surpasse $3a^2 + 3ab + b^2$ de $3ab + 2b^2$. Ainsi, à 16444 qui représente le 1er trinome, il faut ajouter $3ab$, ou 168 dizaines, et $2b^2$ ou deux fois 64. Ce calcul est indiqué ci-après. Une fois le diviseur trouvé, on obtient aisément le chiffre des centièmes et le reste, puis le diviseur subséquent par le même procédé, etc.

477	7.8		
343	147	16444	
1340 00	168	1680	
1315 52	64 . 2 fois.	128	
24 480.00	16444 × 8	18252 = 3 × 78²	

Voici le calcul pour $\sqrt[3]{477}$:

477	7,81339		
343	147	18252	
1340.00	168	254	
1315 52	64	1	
24 480.00	16444	1827541	
18 275 41	8	1	
6 204 590.00			
etc.			

On trouve $\sqrt[3]{2} = 1,259921$, $\sqrt[3]{3} = 1,442249$.

4° La racine cubique d'une fraction se trouve en prenant celle de chacun de ses deux termes : $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Mais si ces termes ne sont pas l'un et l'autre des cubes exacts, on prouve, comme n° 65, que la racine est incommensurable, et qu'on n'en peut avoir qu'une valeur approchée. Si le degré d'approximation est donné d'avance, on opérera comme il vient d'être dit 1° ;

$$\sqrt[3]{\tfrac{3}{5}} \text{ à moins de } \tfrac{1}{3} \text{ est} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(\tfrac{3}{5} \times 27)} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(10\tfrac{4}{5})},$$

valeur comprise entre $\frac{2}{3}$ et 1, qui sont les résultats demandés.

Mais si l'approximation doit demeurer arbitraire, on rendra le dénominateur un cube exact, et l'on approchera de la racine du numérateur. Pour $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$, on prendra $\frac{1}{7}\sqrt[3]{(5 \times 49)} = \frac{1}{7}\sqrt[3]{245}$ $= \frac{1}{7} \times 6,2573 = 0,8939$. De même, $\sqrt[3]{(17\frac{2}{3})}$ ou $\sqrt[3]{\frac{53}{3}}$ est $\frac{1}{3}\sqrt[3]{477}$ $= \frac{1}{3} \times 7,81339 = 2,604463$.....

Nous ne dirons rien ici sur l'extraction des racines quatrièmes, cinquièmes..... pour lesquelles on trouverait des méthodes analo-

gues aux précédentes; mais nous ferons observer que, d'après ce qu'on a dit, n° 60, lorsque le degré de la racine est le produit de plusieurs facteurs, elle peut se décomposer en racines successives de degrés moindres. Ainsi de $12 = 2 \times 2 \times 3$, on conclut que la racine douzième revient à deux racines carrées et une racine cubique. Pour $\sqrt[12]{244\,140\,625}$, on prendra d'abord la racine cubique qui est 625, puis $\sqrt{625}$ qui est 25, enfin $\sqrt{25} = 5$, qui est la racine douzième cherchée. L'extraction des racines est une opération très-pénible, mais qui sera bientôt rendue facile, par les belles propriétés des logarithmes (n° 87).

CHAPITRE IV.

DES RAPPORTS.

Des Equidifférences et Proportions.

70. On compare les grandeurs sous deux points de vue, en cherchant, ou l'excès de l'une sur l'autre, ou le nombre de fois qu'elles se contiennent mutuellement. Le résultat de cette comparaison s'obtient par une soustraction dans le premier cas, et par une division dans le second. On nomme *Raison* ou *Rapport* de deux nombres le quotient qu'on trouve en divisant l'un par l'autre. C'est ainsi que 3 est le rapport de 12 à 4, puisque 3 est le quotient de 12 : 4. On pourrait également dire que le rapport de 12 à 4 est $\frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$, puisqu'il est indifférent de dire que le premier des nombres est triple du second, ou que celui-ci est le tiers de l'autre. Nous conviendrons à l'avenir de diviser le premier nombre énoncé par le second.

Le premier terme d'un rapport est l'*Antécédent*, le second est le *Conséquent*.

On sait (n° 4) que la différence de deux nombres demeure la même lorsqu'on les augmente ou diminue de la même quantité, et qu'on ne change pas un rapport (n° 15) en multipliant ou divisant ses deux termes par un même nombre :

$$12 - 5 = 13 - 6 = 11 - 4; \quad \frac{42}{12} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Il est aisé d'attacher un sens net au rapport des quantités irrationnelles, puisqu'elles n'entrent dans le calcul que comme représentant leurs valeurs approchées (n° 63). Du reste, ce rapport peut quelquefois être commensurable : ainsi,

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{1} = \frac{2}{1}.$$

71. Lorsque la différence entre deux nombres, tels que 10 et 8, est la même qu'entre deux autres 7 et 5, ces quatre quantités forment une *Équidifférence;* $10 - 8 = 7 - 5$. Quand le rapport de deux nombres est le même que celui de deux autres, ces quatre quantités forment une *Proportion;* elle résulte de l'*égalité de deux rapports :* 20 et 10, aussi bien que 14 et 7, ont 2 pour rapport; on a donc une proportion entre 20, 10, 14 et 7, qu'on écrit ainsi, 20 : 10 :: 14 : 7, et qu'on énonce 20 *est à* 10 *comme* 14 *est à* 7. On peut aussi l'indiquer ainsi, $\frac{20}{10} = \frac{14}{7}$. Lorsque nous préférerons cette dernière notation, ce qui arrivera le plus souvent, nous lui conserverons l'énoncé reçu : 20 est à 10 comme 14 est à 7 ; et non pas 20 divisé par 10 égale 14 divisé par 7, quoique ces locutions soient équivalentes.

Les termes 20 et 7 sont les *Extrêmes*, 10 et 14 les *Moyens* de la proportion.

Lorsque les deux moyens sont égaux entre eux, on dit que la *Proportion est Continue :* telle est la suivante : 16 : 24 :: 24 : 36, qu'on écrit ainsi : ∴ 16 : 24 : 36. Le second terme se nomme *Moyen proportionnel*.

Il est visible que l'idée la plus générale qu'on puisse se faire de la *mesure des grandeurs* (n° 36) consiste à *avoir leur rapport avec l'unité de leur espèce*. Ainsi, lorsqu'on dit qu'une chose est $= \frac{5}{7}$, ou est cinq fois le septième de l'unité, cela revient à dire que le rapport de cette grandeur à l'unité est le même que celui de 5 à 7. De même (n° 63) on mesure l'incommensurable $\sqrt{7}$, en remplaçant son rapport avec l'unité par celui de deux nombres, tels que 13 et 5, qui donnent la proportion inexacte, mais approchée,

$$\sqrt{7} : 1 :: 13 : 5.$$

72. Suivant que les restes de deux soustractions $10 - 8$ et $7 - 5$ sont égaux ou inégaux, ils le seront encore après leur avoir ajouté la somme $8 + 5$ des quantités soustractives; ce qui donne $10 + 5$ et $7 + 8$. Donc, lorsqu'on a l'équidifférence $10 - 8 = 7 - 5$, *la*