supposera d'abord que l'intérêt est à 6 p. $\frac{0}{0}$, ce qui réduit la 2e fraction à 1 : puis, prenant 30 jours pour la durée d'un mois, pour 2 mois ou 60 jours, il suffira de prendre le 100e du capital, en reculant la virgule de deux rangs à gauche ; pour un mois, on ne prend que la moitié de ce résultat, pour 10 jours le tiers de celui-ci, etc.

Par exemple, quel est l'intérêt à 6 p. $\frac{0}{0}$ de 5843f.,24 du 5 février au 9 septembre? retranchant 5 de 9 on a 4 jours ; en outre il y a 7 mois intermédiaires de 30 jours ; mais en ayant égard aux mois de 28 et de 31 jours, on reconnaît qu'il faut ajouter 2 jours, ce qui fait 7 mois et 6 jours, ou 216 jours.

Pour 6 mois (3 fois 58,43).	175,29
Pour 1 mois (moitié de 58,43).	29,22
Pour 6 jours (cinquième de 29,22). . . .	5,84
Intérêt à 6 p. $\frac{0}{0}$	210,35

Mais si l'intérêt est à $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ par an, il faut multiplier ce résultat par le 6e de $4\frac{1}{2} = 2 + 2 + \frac{1}{2}$.

Pour $\frac{2}{6}$ (le tiers de 210,35).	70,12
Pour $\frac{2}{6}$	70,12
Pour $\frac{1}{2}$ (le quart de 70,12).	17,53
Intérêt à $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$.	157,77

On aurait encore pu remarquer que le 6e de $4\frac{1}{2}$ est $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$, et prendre les $\frac{3}{4}$ de 210,35.

81. *Règle d'Escompte.* Lorsqu'une somme n'est due qu'à une époque encore éloignée, et qu'on en obtient sur-le-champ le payement, on nomme *Escompte* l'intérêt qu'on doit payer pour cela. Si donc on a 10 000 fr. à recevoir dans 7 mois, en retenant l'intérêt de cette somme à $\frac{1}{4}$ p. $\frac{0}{0}$ par mois, on devra déduire 175 fr., et il restera 9825. Cette manière d'opérer s'appelle *prendre l'escompte en dehors;* elle est la plus usitée, quoiqu'on retienne l'intérêt de 10 000 fr., et qu'on ne paye en effet que 9825 fr.

Pour *l'escompte en dedans*, il ne faut retrancher que l'intérêt de la somme qu'on paye. Voici ce qu'on doit faire. Chaque mois, on devra retenir $\frac{1}{4}$ fr. par 100 fr. ; donc après 7 mois $100 + \frac{7}{4}$ fr. seront réduits à 100 fr. ; on posera donc cette proportion : Si $101\frac{3}{4}$ sont réduits à 100 fr., à combien 10 000 fr. seront-ils réduits. On trouve 9828 fr.,01. En effet, si l'on ajoute à cette somme son intérêt à $\frac{1}{4}$ p. 100 par mois durant 7 mois, on retrouvera 10 000 fr.

82. La *Règle Conjointe* tient lieu des règles de trois directes, et sert principalement quand la solution d'une question dépend de plusieurs de ces règles, liées de manière à donner un rapport composé.

16 pieds anglais valent 15 pieds français, combien 83 des premiers valent-ils des seconds? On a

$$16 : 15 :: 83 : x = \frac{83 \times 15}{16} = 77,81.$$

On peut aussi poser les deux équations

15 pieds français = 16 pieds anglais,
83 pieds anglais = x pieds français.

Multipliant la 1re par 83, et la 2e par 16, il vient

83 × 15 pieds français = 83 × 16 pieds anglais,
16 × 83 pieds anglais = 16 × x pieds français ;

donc, $$83 \times 15 = 16 \times x, \quad x = \frac{83 \times 15}{16}.$$

Le produit commun 16 × 83 conduit ainsi à la même valeur que ci-dessus.

Prenons une question plus compliquée. Combien 27 pieds anglais valent-ils de mètres, sachant que 1,3 mètres valent 4 pieds français, dont 15 valent 16 pieds anglais. On pose

1,3 mètres = 4 pieds français,
15 pieds français = 16 pieds anglais,
27 pieds anglais = x mètres.

D'après ce qu'on a vu ci-dessus, les deux premières équations peuvent être remplacées par leur produit, *le 1er membre étant de l'espèce du 1er terme, et le 2e membre de celle du dernier terme*, savoir :

15 × 1,3 mètres = 4 × 16 pieds anglais,
27 pieds anglais = x mètres.

De même, faisant encore le produit, on a

27 × 15 × 1,3 mètres = 4 × 16 × x mètres.

Ainsi 526,5 = 64 × x, d'où, en divisant par 64, x = 8m,2266...

En remarquant l'ordre des équations successives, et le raisonnement qui autorise à les multiplier, on voit que cette règle s'applique quelque soit le nombre des équations, et qu'il faut les écrire de manière que *le second membre de chacune soit de la même espèce d'unités que le premier membre de l'équation suivante. La règle est posée quand on est arrivé à un second membre de même espèce que le terme initial; on égale le produit de la première colonne à celui de la deuxième.*

Les exemples suivants montreront l'emploi de la règle conjointe, et feront concevoir toute son utilité. Il est commode de commencer toujours la règle par le terme inconnu x.

On demande le rapport de l'arpent parisien à l'hectare. On sait que cet arpent est composé de 900 toises carrées : le rapport de la toise au mètre nous apprend que la toise carrée vaut 3,8 mètres carrés. Ces rapports seront donc enchaînés ainsi :

$$\begin{aligned} x \text{ arpents} &= 1 \text{ hectare.} \\ 1 \text{ hectare} &= 100 \text{ ares.} \\ 1 \text{ are} &= 100 \text{ m. car.} \\ 3{,}8 \text{ m. car.} &= 1 \text{ toise car.} \\ 900 \text{ toises car.} &= 1 \text{ arpent.} \end{aligned}$$

La règle est posée, puisque ce dernier terme est exprimé en arpents, ainsi que le terme initial. Égalant les produits,

$$900 \times 3{,}8 \times x = 100 \times 100, \text{ ou } 9 \times 3{,}8 \times x = 100,$$

en divisant les deux membres par 100; donc $100 = 34{,}2 \,.\, x$, $x = \frac{1000}{342} = 2{,}924$; un hectare vaut donc 2 arpents de Paris, et $\frac{924}{1000}$, ou à peu près 3 arpents.

83. Quand on compare des sommes exprimées en monnaies de divers pays, la règle conjointe prend le nom d'*Arbitrage* ou *règle de Changes*. En voici des exemples.

La livre sterling vaut $25^{fr},50$, on demande combien il faut donner de francs pour payer à Londres 120 livres sterling. On pose

$$\begin{aligned} x \text{ fr.} &= 120 \text{ liv. sterl.,} \\ 1 \text{ liv. st.} &= 25{,}50 \text{ francs,} \end{aligned}$$

d'où $x = 120 \times 25{,}50 = 3060$ fr.

On demande le prix de 100 pistoles d'Espagne, le change étant

de 108 sous de France pour 1 piastre, sachant d'ailleurs que la pistole vaut 4 piastres. On a

$$\begin{aligned} x \text{ fr.} &= 100 \text{ pistoles d'or,} \\ 1 \text{ pist.} &= 4 \text{ piastres,} \\ 1 \text{ piast.} &= 108 \text{ sous,} \\ 20 \text{ sous} &= 1 \text{ fr.} \end{aligned}$$

Donc $20 \times x = 100 \times 4 \times 108$, $x = 5 \times 4 \times 108 = 2160$ fr.

Voici une dernière question. Combien 100 pistoles d'Espagne valent-t-elles de francs, sachant que 1 ducat d'Espagne vaut 95 deniers de gros d'Amsterdam ; que 34 sous de gros valent 1 livre sterling de Londres, et que 32 deniers sterling valent 3 francs? On sait d'ailleurs que la pistole d'Espagne vaut 1088 maravédis dont il faut 375 pour 1 ducat; la livre de gros et la livre sterling sont divisées en 20 sous de 12 deniers chaque. L'opération s'écrit comme on le voit ci-contre, et l'on trouve $x = \frac{100 \,.\, 1088 \,.\, 95 \,.\, 240 \,.\, 3}{375 \,.\, 12 \,.\, 34 \,.\, 32}$, qui se réduit à $x = 4 \times 19 \times 20$; ainsi 100 pistoles valent 1520 fr.

$$\begin{aligned} x \text{ fr.} &= 100 \text{ pist.} \\ 1 \text{ pist.} &= 1088 \text{ marav.} \\ 375 \text{ marav.} &= 1 \text{ ducat.} \\ 1 \text{ ducat.} &= 95 \text{ den. gr.} \\ 12 \text{ den. gr.} &= 1 \text{ s. gr.} \\ 34 \text{ s. gr.} &= 1 \text{ liv. st.} \\ 1 \text{ liv. st.} &= 240 \text{ den. st.} \\ 32 \text{ den. st.} &= 3 \text{ fr.} \end{aligned}$$

84. Pour convertir une quantité donnée, en sa valeur exprimée en une autre unité, il faut avoir le rapport de ces deux unités, et recourir aux proportions, ou aux règles conjointes. La multitude de ces mesures nous empêche de donner leurs rapports; nous nous bornerons à établir ceux des mesures anciennes et nouvelles, tels qu'on les trouve à la page 111. Voyons quel est l'usage de cette table pour convertir les toises, boisseaux, arpents.... en mètres, litres, hectares....

On demande combien $57^T\ 5^P\ 8^{Po}$ valent de mètres? Je vois, page 111, que la toise $= 1^m,949$; je pose

$$1^T : 1^m,949 :: 57^T\ 5^P\ 8^{Po} : x = 112^m,9337.$$

Combien $13^m\ 5^o\ 7^{gr}$, valent-ils de kilogrammes? Je trouve qu'une livre, ou 2 marcs $= 0^k,4895$; d'où

$$2^m : 0^k,4895 :: 13^m\ 5^o\ 7^{gr} : x = 3^k,3615.$$

Pour convertir $44^m,669$ en toises, on pose

$$1^m : 0^T,513074 :: 44^m,669 : x = 22^T,919;$$

ou (page 69), multipliant la fraction par 6, et celle du produit par 12, $x = 22^{T}\ 5^{P}\ 6^{Po},17$.

Dans ces calculs, il convient d'exprimer les parties complexes en décimales pour faciliter les multiplications. Nous avons donné, dans la table, page 111, outre les rapports exacts, d'autres valeurs approchées, dont l'usage est plus facile, et qui sont suffisamment exactes (*voy.* n° 595). La table contient aussi les logarithmes des rapports, afin d'abréger les calculs, ainsi qu'on va l'exposer p. 101.

Combien un litre ou décimètre cube vaut-il de pintes, sachant que la pinte contient 46,95 pouces cubes et que le pouce cube vaut 19,8364 centimètres cubes? Ces rapports s'enchaînent, ainsi qu'on le voit ci-contre. Égalant les produits des deux colonnes, il vient $x \times 19{,}8364 \times 46{,}95 = 1000$, d'où $x = 1{,}073747$ pinte, capacité égale à celle du litre.

x pinte.	= 1 litre
1 litre	= 1000 cent. cu.
19,8364	= 1 pouce cub.
46,95 po. c.	= 1 pinte.

C'est par de semblables règles conjointes qu'on a déduit la plupart des nombres du tableau, de ce que le quart du méridien a 5 130 740,74.... toises (*voy.* p. 60).

Des Progressions.

85. Une suite de termes dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé, de la même quantité, est ce qu'on appelle une *Progression arithmétique* ou *par différence :* tels sont les nombres 1, 4, 7, 10.... On l'indique ainsi : ÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16.... La *raison* ou *différence* est ici 3.

Il est clair que le second terme est égal au premier plus la raison; le troisième au second plus la raison, c'est-à-dire au premier plus 2 fois la raison; le quatrième est de même composé du premier plus 3 fois la raison, etc. En général, *un terme quelconque d'une progression par différence est composé du premier plus la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes qui précèdent.* Donc

1° On peut trouver un terme quelconque d'une progression sans calculer tous les intermédiaires. C'est ainsi que le 100e terme est ici $= 1 + 3 \times 99$ ou 298.

2° Pour insérer, entre 4 et 32, six moyens proportionnels par différence, c'est-à-dire *pour lier ces deux nombres par 6 intermédiaires, qui forment une progression composée de 8 termes,* je remarque

que le dernier terme 32 de la progression étant égal au premier 4 augmenté de la raison prise 7 fois, 32 — 4 ou 28, est 7 fois la raison inconnue; donc la raison $= \frac{28}{7} = 4$; et l'on a la progression ÷ 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32.

Pour insérer, entre deux nombres donnés, des moyens proportionnels arithmétiques ou par différence, *on divisera la différence de ces quantités par le nombre de moyens plus un; le quotient sera la raison.*

De même, pour insérer 8 moyens entre 4 et 11, on trouve la raison $= \frac{11-4}{9} = \frac{7}{9}$; la progression est

$$\div\ 4 \,.\, 4\tfrac{7}{9} \,.\, 5\tfrac{5}{9} \,.\, 6\tfrac{3}{9} \,.\, 7\tfrac{1}{9} \,.\, 7\tfrac{8}{9} \,.\, 8\tfrac{6}{9} \,.\, 9\tfrac{4}{9} \,.\, 10\tfrac{2}{9} \,.\, 11.$$

86. *Une progression géométrique,* ou *par quotient,* est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précède, ou s'y trouve contenu, le même nombre de fois. Telle est la suite ∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 ;.... la *raison* ou le *quotient* est 2.

Le second terme est égal au premier multiplié par la raison; le troisième est égal au second multiplié par la raison, et par conséquent au premier multiplié par le carré de la raison; de même, le quatrième est le produit du premier par le cube de la raison, etc. En général, *un terme quelconque d'une progression par quotient est le produit du premier, par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.* On peut donc

1° Calculer la valeur d'un terme, sans être obligé de passer par tous ceux qui le précèdent. Le dixième terme de notre progression ci-dessus est $3 \times 2^{9} = 3 \times 512 = 1536$.

2° Pour insérer 8 moyens proportionnels géométriques entre 3 et 1536, je remarque que la progression doit avoir 10 termes, et que le dernier terme 1536 étant égal au premier 3, multiplié par la raison élevée à la puissance 9 : si l'on divise 1536 par 3, le quotient 512 est la neuvième puissance de la raison, d'où la raison $= \sqrt[9]{512} = 2$ (p. 81). Donc, *pour insérer entre deux nombres donnés des moyens proportionnels géométriques, il faut prendre leur quotient, et en extraire une racine d'un degré égal au nombre des moyens plus un : cette racine sera la raison.*

Pour insérer quatre moyens entre 8 et 64, il faudrait extraire la racine cinquième de $\frac{64}{8}$ ou $\sqrt[5]{8}$, quantité irrationnelle (n° 63);

on ne peut donc assigner exactement ces moyens, mais on en approche autant qu'on veut. La raison est $\sqrt[5]{8} = 1,5157$; ainsi la progression cherchée est

$$\div\!\!\div\ 8 : 12,1257 : 18,3792 : 27,8576 : 42,2243 : 64.$$

Des Logarithmes.

87. Remarquons que les théorèmes relatifs aux progressions par différence deviennent ceux qui se rapportent aux progressions par quotient, en changeant l'addition en multiplication, la soustraction en division, la multiplication en élévation de puissances, et la division en extraction de racines. C'est sur cette observation qu'est fondée la théorie des Logarithmes.

Concevons deux progressions, l'une par quotient, l'autre par différence, dont les termes se répondent deux à deux, telles que

$\div\!\!\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187.... *Nombres.*
$\div$ 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 .... *Logarithmes.*

Chaque terme de la seconde est appelé le *Logarithme* du *nombre* correspondant de la première; 0 est le logarithme de 1, 2 l'est de 3, 4 de 9; 6 est le logarithme de 27, etc. *Les logarithmes sont donc des nombres en progression par différence, qui répondent, terme à terme, à d'autres nombres en progression par quotient.*

Comme les logarithmes n'offrent d'utilité qu'en vertu de propriétés qui supposent que ces progressions commencent, l'une par 1, l'autre par 0, nous ne nous occuperons que de celles qui remplissent cette condition.

Il suit de ce qu'on a dit (n°s 85 et 86), et de ce que nos progressions commencent, l'une par *un*, l'autre par *zéro*, qu'un terme quelconque est formé de la raison, autant de fois facteur pour la première, et autant de fois ajoutée, pour la seconde, qu'il y a de termes avant lui. Les sixièmes termes, par exemple, sont 243, 5e puissance de la raison 3, et 10 qui est 5 fois la raison 2. Ainsi, *la raison est autant de fois facteur dans un nombre qu'elle est de fois ajoutée dans son logarithme.*

Si l'on multiplie entre eux deux termes de la progression par quotient, tels que 9 et 243; la raison 3 sera 7 fois facteur dans le

produit (page 70), parce qu'elle l'est 2 fois dans 9, et 5 fois dans 243 : le produit 9×243, ou 2187, sera donc le huitième terme de la première progression. Mais si l'on ajoute les termes 4 et 10 correspondants dans la progression par différence, la raison 2 sera aussi 7 fois ajoutée dans la somme 14, donc le produit 2187 et la somme 14 seront des termes correspondants; ainsi 14 est le logarithme de 2187; donc *la somme des logarithmes de deux nombres est le logarithme de leur produit.* Pour multiplier 9 par 27, par exemple, il suffit d'ajouter les logarithmes 4 et 6 qui répondent à ces facteurs, et de chercher le *nombre* 243, qui répond à la somme 10 prise parmi les *logarithmes;* 243 est le produit cherché.

Il suit de là que le double du logarithme d'un nombre est le logarithme du carré de ce nombre; le triple est le logarithme du cube; et, en général, *en multipliant le logarithme d'un nombre par un facteur quelconque, on aura le logarithme d'une puissance de ce nombre marquée par ce facteur.* Pour 9^3, on triple le 4, qui répond au nombre 9 et en est le logarithme; $3 \times 4 = 12$ répond à $729 = 9^3$.

Les inverses de ces opérations sont faciles à démontrer; car le logarithme du quotient plus celui du diviseur devant donner celui du dividende, il s'ensuit que *le logarithme du quotient de deux nombres est la différence des logarithmes de ces nombres.* Pour diviser 243 par 27, retranchez 6 de 10, la différence 4 est le logarithme de 9; ainsi 9 est le quotient demandé.

De même aussi, *le logarithme de la racine quelconque d'un nombre, est le quotient du logarithme de ce nombre divisé par le degré de cette racine.* $\sqrt[3]{729}$ s'obtient en prenant le tiers de 12, et cherchant 4 parmi les logarithmes. Le nombre correspondant 9 est la racine cherchée.

88. Si, au lieu de prendre 3 pour raison de la progression par quotient, on eût choisi une quantité beaucoup plus petite, ces propriétés auraient encore subsisté : les quantités dont cette progression serait composée auraient été plus près les unes des autres, et l'on y aurait trouvé, par approximation, les nombres 1, 2, 3, 4, 5,.... Concevons donc qu'on ait formé une progression, dont le quotient eût été assez petit pour qu'on y ait trouvé, à très-peu près, tous les nombres entiers, et qu'on en ait composé une table, dans laquelle on aurait inscrit ces nombres et leurs logarithmes, en supprimant d'ailleurs tous les autres termes intermédiaires : les principes qu'on

vient de démontrer auraient également été vrais. Supposons cette table formée : on voit que

1° Pour multiplier des nombres entiers donnés, il suffit de prendre dans la table leurs logarithmes, de les ajouter et de chercher la somme parmi les logarithmes; le nombre correspondant est le produit cherché *.

2° Pour diviser deux nombres, on retranchera le logarithme du diviseur de celui du dividende; on cherchera le reste parmi les logarithmes : le nombre correspondant sera le quotient demandé **.

3° Pour faire une règle de trois, on ajoutera les logarithmes des moyens; on en retranchera celui de l'extrême connu : le nombre répondant au résultat sera l'inconnue ***.

4° Pour obtenir le logarithme d'une fraction, on retranchera le logarithme du dénominateur de celui du numérateur : le reste sera le logarithme demandé. Les tables ne contiennent que les logarithmes des nombres entiers; ce théorème en étend l'usage aux fractions (n° 91, I) ****.

5° Pour élever un nombre à une puissance, on multipliera son logarithme par le degré de la puissance, on cherchera le produit

* On demande, par exemple, le produit 47×863; la table donne les logarithmes de ces nombres; on les ajoute, comme on le voit ci-contre; on cherche la somme parmi les logarithmes, et la table donne 40 561 pour le nombre correspondant, qui est le produit demandé.

$$\begin{array}{rl} \log 47 & = 1{,}6720979 \\ \log 863 & = 2{,}9360108 \\ \hline \text{Somme} & = 4{,}6081087 \end{array}$$

** Si l'on veut diviser 40 561 par 863, la table fera connaître les logarithmes de ces deux nombres; et, les retranchant, on cherchera la différence parmi les logarithmes des tables : le nombre 47 qui y correspond sera le quotient.

*** Pour la proportion $153 : 459 :: 17 : x$, après avoir pris les logarithmes de ces trois nombres, on retranchera celui du premier terme 153 de la somme des deux autres; et observez que cette double opération peut être faite d'un seul trait. On peut aussi ajouter le complément arithmétique du logarithme de 153 (*voyez* n° 10), au lieu de retrancher ce log. Le résultat cherché dans la table parmi les log. répond à 51, qui est le quatrième terme inconnu.

$$\begin{array}{rl} \log 17 & = 1{,}2304489 \\ \log 459 & = 2{,}6618127 \\ -\log 153 & = 2{,}1846914 \\ \hline & 1{,}7075702 \end{array}$$

**** Pour avoir le log de $3\frac{5}{7}$ ou $\frac{26}{7}$, on retranchera le log 7 du log 26. Pour obtenir le produit de $3\frac{5}{7}$ par $2\frac{2}{13}$, ou de $\frac{26}{7}$ par $\frac{28}{13}$, il faudra ajouter les logarithmes de ces deux fractions, ou $\log 26 - \log 7 + \log 28 - \log 13$. On voit ce calcul effectué ici d'un seul coup. Le résultat est $\log 8$: donc 8 est le produit demandé, ce qui est d'ailleurs visible.

$$\begin{array}{rl} \log 26 & = 1{,}4149734 \\ \log 28 & = 1{,}4471580 \\ -\log 7 & = 0{,}8450980 \\ -\log 13 & = 1{,}1139434 \\ \hline & 0{,}9030900 \end{array}$$

parmi les logarithmes; il répondra à la puissance demandée *.

6° Pour extraire une racine d'un nombre, on divisera le logarithme de ce nombre par le degré de la racine, et l'on cherchera le quotient parmi les logarithmes; le nombre qui s'y rapporte sera la racine cherchée **.

On voit donc que les calculs les plus compliqués sont rendus très-simples : les multiplications et divisions sont remplacées par des additions et soustractions; les élévations de puissances et les extractions de racines sont réduites à des multiplications et des divisions. Ces admirables propriétés des logarithmes en rendent l'usage si important, que c'est un devoir de consacrer la mémoire du célèbre géomètre écossais Néper, qui en est l'inventeur.

89. *Formation des tables.* Il s'agit maintenant d'expliquer comment on peut obtenir les logarithmes de tous les nombres entiers. Jusqu'ici, nos progressions par différence et par quotient sont quelconques l'une et l'autre; ainsi, *un même nombre a une infinité de logarithmes.* Nous verrons bientôt la raison qui a fait préférer les séries suivantes :

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10 000 : . . . . . *Nombres.*
∺ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . . . . . *Logarithmes.*

0, 1, 2,.... sont les logarithmes de 1, 10, 100...., il s'agit de trouver ceux de 2, 3, 4...., qui sont visiblement compris entre 0 et 1; ceux de 11, 12.... 99, sont entre 1 et 2, etc. On ne peut obtenir ces logarithmes que par approximation; on se contente ordinairement de 7 décimales.

Observons que si, dans une progression, telle que ÷ 0.2.4.6.8.10.... on omet un terme sur 2 consécutifs, ou 2 sur 3,.... on formera d'autres progressions.... 0.4.8.12,.... ou, 0.6.12.... On peut de même imaginer que les progressions que nous avons prises font seulement partie de deux autres dont les termes étaient beaucoup plus voisins, et dont on avait omis un certain nombre d'entre eux.

* La puissance cinquième de 17 se trouve en répétant 5 fois log 17, et cherchant le produit dans la colonne des logarithmes; il répond au nombre cherché $17^5 = 1419\,857$.

$$\begin{array}{rl} \log 17 & = 1{,}2304489 \\ & 5 \\ \hline & 6{,}1522445 \end{array}$$

** La $\sqrt[5]{1419857}$ s'obtient en divisant par 5 le log du nombre proposé, et cherchant le quotient parmi les log. de la table. Le nombre correspondant est 17, racine cherchée.

Ainsi, concevons qu'on ait inséré entre 1 et 10 un très-grand nombre de moyens proportionnels par quotient; comme on monte alors de 1 à 10 par des degrés très-serrés, il arrivera que, parmi ces moyens, on rencontrera les nombres 2, 3, 4,.... à un dix-millionième près. Cela posé, si l'on insère un pareil nombre de moyens par différence entre 0 et 1, ceux de ces moyens qui occuperont le même rang que 2, 3, 4,.... seront les logarithmes de ces nombres. On raisonnera de même de 10 à 100, etc.

Il est vrai que, pour insérer un grand nombre de moyens par quotient, il faudrait extraire une racine d'un degré très-élevé (86); mais on évite cette difficulté à l'aide de diverses racines carrées successives. Par exemple, cherchons le logarithme de 3; le moyen par quotient entre 1 et 10 est 3,16227766, et par différence entre 0 et 1 est 0,5; 0,5 est donc le logarithme de 3,1622....., nombre déjà voisin de 3. Une pareille opération pour 1 et 3,1622.... d'une part, et pour 0 et 0,5 de l'autre, donne 0,25 pour le logarithme de 1,77827941. De même, entre 1,7782...., et 3,1622..... d'une part, et entre 0,25 et 0,5 de l'autre, on trouve pour moyens 2,37137370 et 0,375. En continuant de resserrer ainsi ces limites, on trouvera 0,30102999 et 0,47712125 pour logarithmes de 2 et 3.

Ces calculs sont très-pénibles; il est vrai qu'on n'est obligé de les pratiquer que pour les nombres premiers, puisque les autres logarithmes s'en déduisent. Mais, malgré cela, il en reste assez pour lasser la patience. Aussi n'avons-nous présenté ce procédé que comme un moyen de concevoir la formation des tables, nous réservant d'en donner de plus expéditifs (626).

90. Il est aisé maintenant d'expliquer pourquoi on a attribué la préférence aux deux progressions adoptées. Tout logarithme est formé d'une partie entière, qu'on nomme *Caractéristique*, et d'une fraction décimale : or,

1° Les nombres compris entre 1, 10, 100,.... ont leurs logarithmes respectivement compris entre 0, 1, 2,.... c'est-à-dire que *le logarithme de tout nombre a pour caractéristique autant d'unités que le nombre a de chiffres entiers moins un;* ce qui permet de fixer ce nombre de chiffres, lorsque la caractéristique est donnée, et réciproquement. Le nombre 543,21 a deux unités entières à son logarithme : et 3,477121125 est le logarithme d'un nombre dont la partie entière a quatre chiffres. On évite souvent de charger les tables de cette caractéristique qui y est inutile.

2° Lorsqu'on veut multiplier ou diviser un nombre par 10, 100, 1000,.... il faut ajouter ou ôter à son logarithme 1, 2, 3,.... unités; d'où il suit qu'augmenter ou diminuer la caractéristique de 1, 2, 3,.... c'est multiplier ou diviser le nombre correspondant par 10, 100,.... c'est reculer la virgule du nombre de 1, 2, 3,.... rangs à droite ou à gauche. Les logarithmes des nombres 3,4578, 34,578, 345,78, ont la même partie décimale; seulement les caractéristiques sont respectivement 0, 1, 2.....

Tels sont les avantages que présente le système de logarithmes de Briggs, qui l'ont fait préférer dans la composition des tables. Nous l'indiquerons à l'avenir par le signe log; ainsi log 5 désignera le logarithme tabulaire de 5, c'est-à-dire le logarithme pris dans l'hypothèse de deux progressions du n° 89.

91. *Usage des tables.* Il faut avoir des tables de logarithmes entre les mains pour en concevoir l'usage; celles de Callet, de Borda et Delambre, sont les plus usitées. Nous n'entreprendrons pas ici d'expliquer leur usage; mais il est quelques points qui tiennent à la doctrine même, et qu'il est bon d'éclaircir.

I. Les log. des nombres $<$ 1 présentent une difficulté : en général (n° 88, 4°) il faut retrancher le log du dénominateur de celui du numérateur pour avoir le log d'une fraction : mais, lorsque celle-ci est moindre que 1, la soustraction devient impossible. Par exemple, pour multiplier 5 par $\frac{3}{4}$, comme cela équivaut à diviser 5 par $\frac{4}{3}$, il est indifférent d'ajouter log $\frac{3}{4}$ à log 5, ou de retrancher log $\frac{4}{3}$ de log 5; c'est alors cette dernière opération qu'on préfère. On voit donc qu'il faut soustraire le log du numérateur de celui du dénominateur, mais qu'on doit employer ce log en sens inverse; c'est-à-dire le soustraire s'il fallait l'ajouter, ou réciproquement. On donne le nom de *Logarithmes négatifs* à ces valeurs; on les distingue par le signe — qu'on place devant. Un peu d'attention suffit pour éviter les erreurs.

Voici divers exemples propres à faciliter l'intelligence de ces calculs :

$$1^\circ\ x = \frac{42{,}212 \times \frac{3}{5}}{0{,}04}$$

$$\begin{array}{rr} \log 5 = & 0{,}6989700 \\ -\log 3 = & 0{,}4771213 \\ \hline \log \frac{3}{5} = & -0{,}2218487 \\ \log 42{,}212 = & 1{,}6254359 \\ \hline & 1{,}4035872 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \log 100 = & 2{,}0000000 \\ -\log 4 = & 0{,}6020600 \\ \hline \log 0{,}04 = & -1{,}3979400 \\ & 1{,}4035872 \\ \hline \log x = & 2{,}8015272 \\ x = & 633{,}18. \end{array}$$

2° $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$; on ôte log 5 de log 7, et on prend la moitié. Pour trouver le nombre qui répond à ce résultat qui est un logarithme négatif, on le retranche de 1, ce qui rend le nombre 10 fois trop grand; on a $+ 0,9269360$, qui répond à 8,45154; donc

$$x = 0,845154.$$

$$\begin{array}{rr} \log 7 = & 0,8450980 \\ -\log 5 = & 0,6989700 \\ \hline \log \frac{5}{7} = & -0,1461280 \\ \log x = & -0,0730640 \\ \text{compl.} = & 0,9269360 \end{array}$$

3° $x = \frac{\sqrt[3]{0,00027}}{32,41}$; on prend le tiers de log 100000 — log 27, etc. On retranche log x de 3, ce qui rend le nombre 1000 fois trop grand; il vient $+ 0,2997756$, qui répond à 1,9942 : donc $x = 0,0019942$.

$$\begin{array}{rr} \log 100000 = & 5,0000000 \\ \log 27 = & 1,4313638 \\ \hline \log 0,00027 = & -3,5686362 \\ \text{le tiers} = & -1,1895454 \\ \log 32,41 = & -1,5106790 \\ \hline \log x = & -2,7002244 \\ \text{compl.} = & 0,2997756 \end{array}$$

II. Il est préférable d'employer les logarithmes dont la *caractéristique seule est négative*. Ainsi, dans le deuxième calcul $\log \frac{5}{7} = \log 5 - \log 7$; on rendra la soustraction possible, en ajoutant 1 à la caractéristique de log 5 : mais il faudra ôter de la différence cette unité ajoutée, et l'on aura $\log \frac{5}{7} = -1 + 0,8538720$, qu'on écrit $\bar{1},8538720$. La caractéristique est alors seule négative, et il faudra, comme ci-dessus, y avoir égard dans les calculs subséquents. Ici, où l'on doit prendre la moitié, pour éviter les fractions à la caractéristique, on y ajoute 1, et elle devient — 2, et aussi 1 au chiffre 8 des dixièmes, qui devient 18 : ces deux additions de l'unité positive et négative n'altèrent pas le logarithme ; la moitié est comme ci-dessus, $\log x = \bar{1},9269360$.

$$\begin{array}{rr} 1 + \log 5 = & 1,6989700 \\ \log 7 = & 0,8450980 \\ \hline \log \frac{5}{7} = & \bar{1},8538720 \\ \text{ou } -2 + & 1,8538720 \\ \log x = & \bar{1},9269360 \end{array}$$

Observez donc, lorsqu'il faudra diviser un log à caractéristique négative, d'y ajouter assez d'unités pour qu'elle devienne un multiple du diviseur, et d'ajouter autant d'unités de dizaines au chiffre suivant, qui est la première des figures décimales. La première et la troisième opération sont exécutées ici d'après ces principes, et l'on peut reconnaître que les calculs sont devenus plus faciles et plus prompts.

$$\begin{array}{rr} \log 3 = & 0,4771213 \\ \log 42,212 = & 1,6254359 \\ -\log 5 = & 0,6989700 \\ -\log 0,04 = & \bar{2},6020600 \\ \hline \log x = & 2,8015272 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \log 0,00027 = & \bar{4},4313638 \\ \text{On ajoute 2 à la caract.} & \\ \text{pour prendre le tiers.} \ldots\ldots = & \bar{2},8104546 \\ -\log 32,41 = & -1,5106790 \\ \hline \log x = & \bar{3},2997756 \end{array}$$

4° On peut, au lieu de soustraire des logarithmes (10), ajouter leurs compléments arithmétiques. Dans la première opération, pour $\log \frac{3}{5}$, on ajoute au log 3 le complément de log 5. L'avantage qu'on en retire est à peu près nul, attendu qu'on peut faire, d'un seul trait, toutes ces additions et soustractions.

$$\begin{array}{rr} \log 3 = & 7,4771213 \\ C\,\log 5 = & 1,3010300 \\ \log 42,212 = & 1,6254359 \\ C\,\log 0,04 = & 1,3979400 \\ \hline \log x = & 2,8015272 \end{array}$$

Lorsqu'on veut exécuter un calcul par log., il convient de simplifier avant tout les expressions; ainsi le premier exemple se réduit à $x = \frac{1}{2} \times 3 \times 422,12 = 1,5 \times 422,12$.

III. Pour obtenir les log. des entiers compris entre deux nombres quelconques, tels que 10 et 20, il faut concevoir qu'on a inséré un assez grand nombre de moyens par quotient, pour que parmi ces moyens, très-peu différents les uns des autres, il y en ait qu'on puisse regarder, par approximation, comme égaux à 11, 12, 13,.... c'est-à-dire que ces moyens ne doivent différer de 11, 12, 13.... que dans l'ordre des décimales négligées.

Dans une progression géométrique, telle que ∺ 8 : 32 : 128.... dont la raison est 4; on a $32 = 8 + 8 . 3$, $128 = 32 + 32 . 3$.... Ainsi, l'excès d'un terme sur celui qui le précède est le produit de celui-ci multiplié par la raison moins *un* : l'un de ces facteurs croît avec le rang du terme, l'autre est constant : cet excès croît donc sans cesse, et il y a moins d'entiers compris entre 8 et 32, qu'entre 32 et 128.... Pour obtenir les log. de ces entiers intermédiaires, il faudrait y insérer des moyens géométriques en quantités suffisantes, et aussi des moyens arithmétiques en égal nombre entre les deux termes correspondants de la progression des log. La différence constante de celle-ci sera donc partagée entre un plus grand nombre de termes à mesure que l'entier croîtra ; ce qui démontre que *plus un nombre est grand, et moins son logarithme diffère de celui qui le suit dans la table.* Aussi voyons-nous que les log. de 1, 10, 100.... étant 0, 1, 2,.... les neuf nombres de 1 à 10 se partagent entre eux, quoique inégalement, une unité entre leurs log. ; et que les