trouver un système de termes qui, multiplié par le diviseur, d'après les règles connues, reproduise le dividende.

Concluons de là que, *pour diviser deux polynomes, on les ordonnera par rapport à une même lettre; on divisera le premier terme du dividende par le premier du diviseur, et l'on aura un terme du quotient; on multipliera ce terme par le diviseur, et on retranchera du dividende : puis l'on traitera le reste de la même manière. On pratiquera, pour les divisions partielles, la règle des signes de la multiplication.* Enfin, on poussera l'opération jusqu'à ce que la lettre suivant laquelle on a ordonné, ait dans le reste un exposant moindre que dans le diviseur.

Il est bien entendu qu'on pourrait ordonner par rapport à $b$, ou toute autre lettre commune aux deux facteurs, et même dire du plus petit exposant d'une lettre tout ce que nous avons dit du plus grand.

99. Nous mettrons ici deux autres exemples de division.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4 & 2a^2 + 2ab - b^2 \\
 & -6a^4 - 6a^3b + 3a^2b^2 & \overline{3a^2 - ab - 2b^2} \\
\hline
1^{er}\text{ reste.}\ .\ . & -2a^3b - 6a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4 & \\
 & +2a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 & \\
\hline
2^{e}\text{ reste.}\ \ldots\ldots & -4a^2b^2 - 4ab^3 + 2b^4 & \\
 & +4a^2b^2 + 4ab^3 - 2b^4 & \\
\hline
3^{e}\text{ reste.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr|l}
 & a^5 - b^5 & a - b \\
 & -a^5 + a^4b & \overline{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4} \\
\hline
1^{er}\text{ reste.} & a^4b - b^5 & \\
 & -a^4b + a^3b^2 & \\
\hline
2^{e}\text{ reste}\ \ldots\ & a^3b^2 - b^5 & \\
 & -a^3b^2 + a^2b^3 & \\
\hline
3^{e}\text{ reste.}\ \ldots\ldots & a^2b^3 - b^5 & \\
 & -a^2b^3 + ab^4 & \\
\hline
4^{e}\text{ reste.}\ \ldots\ldots & ab^4 - b^5 & \\
 & -ab^4 + b^5 & \\
\hline
5^{e}\text{ reste.}\ \ldots\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

En suivant avec attention la marche de la dernière division, on voit que si l'on divise $a^m - b^m$ par $a - b$, les exposants de $a$ doivent diminuer, et ceux de $b$ croître d'une unité dans chaque reste et dans chaque quotient; les restes sont donc des binomes dont le 1er terme est successivement $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$.... Lorsqu'on arrive au reste $ab^{m-1} - b^m$, la division par $(a - b)$ donne le quotient



exact $b^{m-1}$, en sorte que $a^m - b^m$ est divisible sans reste par $(a-b)$, et l'on a

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots\ldots + b^{m-1}.$$

$$\text{Si } b = 1,\ \frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots\ldots + a + 1.$$

Au reste, il est facile de prouver la vérité de ces équations en multipliant les seconds membres par les dénominateurs $a - b$, $a - 1$, parce qu'on reproduit *identiquement* les numérateurs $a^m - b^m$, $a^m - 1$.

Quand on divise $a$ par $1 - x$, l'opération n'a pas de fin, et l'on trouve ce quotient indéfini

$$\frac{a}{1 - x} = a\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots).$$

On peut donc regarder le 1er membre comme la somme des termes du 2e; cette fraction est la somme d'une progression par quotient, qui s'étend à l'infini, dont $a$ est le 1er terme et $x$ la raison. Si l'on a, par exemple, $\dot{\dot{\cdot}}\ 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27}$....savoir, $a = 2$ et $x = \frac{1}{3}$, $1 - x = \frac{2}{3}$, on trouve $2 : \frac{2}{3}$ ou 3, pour la somme de cette suite prolongée à l'infini. De même, $\frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 \ldots) = \frac{3}{2}$, parce que $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$. Enfin, $\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots) = \frac{4}{9}$, en faisant $a = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$.

La fraction décimale périodique $0,[54]$ revient à

$$\frac{54}{100} + \frac{54}{10000} + \ldots\ldots \text{ ou } \frac{54}{100}\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 \ldots\right] = \frac{54}{99},$$

en faisant $a = \frac{54}{100}$, $x = \frac{1}{100}$. En général, si $p$ est la période composée de $n$ chiffres, cette fraction est, comme n° 53,

$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \ldots = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots}.$$

Faisons $a = 1$ et $x = \frac{3}{2}$; il vient $-2 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \ldots$. On ne conçoit pas d'abord comment, en ajoutant des termes sans cesse croissants et positifs, on pourra trouver $-2$ pour somme. Mais en poussant la division de $a$ par $1 - x$, jusqu'à 4 termes seulement, on a le reste $ax^4$, en sorte que le quotient exact est $a\left(1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1 - x}\right)$, cette dernière fraction représentant la somme de tous les autres termes jusqu'à l'infini. Mais cette fraction devient $-\frac{81}{8}$, en faisant $a = 1$ et $x = \frac{3}{2}$; ainsi, lors-

qu'on n'a égard qu'aux premiers termes, ceux qu'on néglige forment une somme négative plus grande que la partie qu'on prend : les deux parties réunies sont ici $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} - \frac{81}{8}$, qui se réduit au 1er membre $- 2$.

Ce paradoxe vient donc de ce qu'on ne peut regarder les $n$ premiers termes comme une partie plus ou moins grande de la somme, qu'autant que $\frac{ax^n}{1 - x}$ va sans cesse en diminuant, à mesure que le nombre $n$ des termes conservés s'accroît ; il faut donc que $x < 1$. On dit qu'une série est *convergente* quand les termes vont ainsi en décroissant de plus en plus (*voy.* n° 618).

100. On rencontre une difficulté de laquelle il est bon d'être prévenu : lorsqu'il y a plusieurs termes où la lettre suivant laquelle on a ordonné porte le même exposant, quel est celui qui doit être écrit le premier, et que devient alors la démonstration que nous avons donnée? Avec une légère attention, on verra qu'il suffit de mettre dans les termes dont il s'agit, la lettre avec son exposant en facteur commun, et, entre des parenthèses, la quantité qu'elle multiplie. On doit regarder alors cet assemblage comme ne formant qu'un seul terme. Si l'on a, par exemple, $4a^4b^2 - 4a^4bc + a^4c^2$, on écrira $a^4(4b^2 - 4bc + c^2)$, qu'on regardera comme n'étant qu'un seul terme.

Un exemple fera voir plus clairement la marche qu'on doit suivre.

$$
\begin{array}{l|l}
(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^2+2bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6 & (2b-c)a^2-(b+c)ab+b^3 \\
-(4b^2-4bc+c^2)a^4+(2b-c)(b+c)a^3b-(2b-c)a^2b^3 & (2b-c)a^2+(b+c)ab-b^3 \\
\hline
(2b-c)(b+c)a^3b-(3b^2+bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6 & \\
-(2b-c)(b+c)a^3b+(b^2+2bc+c^2)a^2b^2-(b+c)ab^4 & \\
\hline
-(2b-c)a^2b^3+(b+c)ab^4-b^6 & \\
+(2b-c)a^2b^3-(b+c)ab^4+b^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

## *Des Fractions et Communs Diviseurs.*

101. Tout ce qui a été dit (pages 39, 40) sur les fractions numériques, doit se dire aussi des algébriques. Ainsi

1° $\frac{a}{b}$ désigne que l'unité est partagée en $b$ parties, et qu'on en



prend $a$ ; en sorte que le produit $\frac{a}{b} \times b$ est le numérateur $a$ (n° 37) ;

2° Quel que soit $m$, on a $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ (n° 38) ;

3° $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (n° 39) ; $\frac{a}{m} \pm 1 = \frac{a \pm m}{m}$.

Le signe $\pm$ s'énonce *plus ou moins ;* il indique qu'on doit prendre le signe supérieur dans les deux membres, ou, si l'on veut, l'inférieur dans l'un et l'autre.

4° $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$, $\quad \frac{a}{mb} \times b = \frac{a}{m}$, $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,

$\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(m + \frac{p}{q}\right) = \frac{(ac + b) \times (mq + p)}{cq}$, (nos 40, 41) ;

5° $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$, $\quad \frac{am}{b} : m = \frac{a}{b}$, $\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$,

$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(m + \frac{p}{q}\right) = \frac{q\,(ac + b)}{c\,(mq + p)}$ (nos 41, 42).

102. Cherchons *le plus grand commun diviseur* $D$ de deux polynomes $A$ et $B$ : on nomme ainsi une expression qui divise exactement ces polynomes, et telle, que les deux quotients n'admettent plus aucun diviseur commun.

I. Si $A$ et $B$ sont divisibles par $D$, ils sont de la forme $A = Dx$, $B = Dy$; or, en divisant $A$ par $B$, et désignant le quotient par $q$ et le reste par $R$, on a l'équation

$$A = Bq + R, \text{ d'où } Dx = Dyq + R, \quad x = yq + \frac{R}{D},$$

en divisant l'équation par $D$ : ainsi $R$ doit aussi être divisible par $D$, et de la forme $R = Dz$, ce qui donne $x = yq + z$. *Tous les diviseurs communs à* A *et* B *le sont aussi du reste* R *de la division de* A *par* B.

Maintenant supposons que $D$ soit le plus grand diviseur commun de $A$ et $B$, c'est-à-dire que $x$ et $y$ n'aient aucun facteur commun, il s'ensuit que $y$ et $z$ n'en auront pas non plus ; car s'ils en avaient un, on prouverait de même que ce facteur diviserait $x$, et que $x$ et $y$ ne seraient pas premiers entre eux. Donc *le plus grand commun diviseur de* A *et* B, *est aussi celui de* B *et du reste* R *de leur division*. C'est ce qu'on a vu n° 23.

II. *Si l'on multiplie ou divise* A *par une quantité qui soit première avec* B, *le plus grand commun diviseur demeurera le même.* Car soient $A$ et $B$ de la forme $A = Dx$, $B = Dy$, $x$ et $y$ étant premiers entre eux ; il est visible que $D$ sera encore le plus grand diviseur commun, si l'on supprime $x$, ou $y$, ou seulement quelqu'un de leurs facteurs, comme aussi si l'on multiplie $A$ par une quantité $z$ qui soit première avec $B$.

III. *Si un polynome* A, *ordonné par rapport à* a, *est divisible par une quantité* F *indépendante de* a, *les coefficients de chaque puissance de cette lettre* a *doivent en particulier être divisibles par* F. En effet, soit $Ma^m + Ha^h + \ldots$, le quotient de $A$ divisé par $F$, on a donc $A = FMa^m + FHa^h + \ldots$ ; or $F$ ne contenant pas $a$, il ne peut s'opérer de réduction d'un terme à l'autre. Donc chaque coefficient conserve le facteur $F$.

Voici l'usage de ces théorèmes. Si, par la méthode que nous allons exposer, on cherche le plus grand commun diviseur entre deux quelconques des coefficients de $A$, puis entre ce diviseur et quelque autre coefficient de $A$, et ainsi de suite pour tous les coefficients, il est clair que si $A$ a un facteur $F$ indépendant de $a$, comme il devra l'être de chaque terme en particulier, on obtiendra ainsi ce diviseur commun $F$ indépendant de $a$, et l'on aura $A = FA'$, $A'$ étant un polynome connu, qui n'admettra plus de facteur sans $a$. Le même calcul mettra en évidence dans $B$ le facteur $F'$ indépendant de $a$, s'il en existe un, et l'on aura $B = F'B'$.

Or, le plus grand diviseur $K$, entre $F$ et $F'$, est *le facteur indépendant de* $a$, qui est commun entre $A$ et $B$ : c'est-à-dire que si le plus grand commun diviseur cherché entre $A$ et $B$, est le produit $QK$ de deux facteurs, l'un $Q$ contenant $a$, l'autre $K$ sans $a$, on sera parvenu à connaître ce dernier, et il ne restera plus qu'à trouver $Q$, qui ne peut être divisible par un facteur indépendant de $a$. Une fois $K$ connu, on aura donc $F = K\alpha$, $F' = K\beta$, d'où $A = KA'\alpha$, $B = KB'\beta$; ôtant le facteur $K$, $Q$ sera le plus grand commun diviseur entre $A'\alpha$ et $B'\beta$, ou plutôt entre $A'$ et $B'$, puisqu'on peut supprimer $\alpha$ et $\beta$ (II).

Concluons de là, qu'après avoir trouvé les facteurs $F$ et $F'$ indépendants de $a$, ou communs à tous les termes, l'un de $A$, l'autre de $B$, on supprimera ces facteurs, ce qui rendra les polynomes plus simples, tels que $A'$ et $B'$ ; mais on mettra à part le facteur $K$, commun à $F$ et $F'$ ; on cherchera le plus grand commun diviseur



$Q$ entre $A'$ et $B'$, et on le multipliera par $K$; $KQ$ sera celui qu'on demande.

Procédons maintenant à la recherche du facteur $Q$ dépendant de $a$.

Comme le quotient $q$ de $A'$ divisé par $B'$ doit nécessairement être entier, il ne suffit pas ici de procéder comme on l'a fait sur les nombres. Après avoir ordonné les polynomes, ils deviendront

$$A' \ldots\ldots Ma^m + M'a^{m'} + \ldots\ldots$$
$$B' \ldots\ldots Na^n + N'a^{n'} + \ldots\ldots$$

On divisera le premier terme $Ma^m$ par le premier $Na^n$ ; or, si $N$ contient quelque facteur $\alpha$ qui ne divise pas $M$, le quotient n'est pas entier. Pour éviter cette difficulté, comme on admet qu'on a délivré $B'$ de tous les facteurs communs indépendants de $a$, $\alpha$ n'est pas diviseur de $B'$, et l'on a le droit de multiplier $A'$ en totalité par $\alpha$ : alors $M$ deviendra $M\alpha$, divisible par $N$. Ainsi, les deux premiers termes seront toujours réduits à l'état convenable pour que la division soit possible, parce qu'on aura ôté de $N$, ou introduit dans $M$, les facteurs qui s'opposaient à la division exacte. On aura soin de faire une semblable opération sur chacune des divisions subséquentes qu'exige le théorème, afin de rendre tous les quotients entiers.

Soient, par exemple, les polynomes

$$36a^2cd - 120abcd + 100b^2cd, \text{ et } 36a^3c - 6a^2bc - 90ab^2c.$$

Le commun diviseur entre $120abcd$ et $100b^2cd$ est $20bcd$; entre $20bcd$ et $36a^2cd$, il est $4cd$. On obtient de même $6ac$ pour facteur commun de tous les termes du second polynome. Supprimant ces facteurs, les proposés se réduisent à

$$9a^2 - 30ab + 25b^2, \text{ et } 6a^2 - ab - 15b^2.$$

Mais comme $4cd$ et $6ac$ ont $2c$ pour diviseur, on réservera $2c$ pour multiplier le commun diviseur entre les polynomes réduits : $2c$ est *le facteur indépendant* de $a$. Voici la fin du calcul :

$$\begin{array}{l|l|l}
9a^2 - 30ab + 25b^2 & 6a^2 - ab - 15b^2 & 3a - 5b \text{ comm. divis.} \\
18a^2 - 60ab + 50b^2 & \text{1er quot. } 3 & 2a + 3b \\
\hline
\text{Reste } - 57ab + 95b^2 & \text{2e reste } 9ab - 15b^2 & \\
\text{ou } - 19b(3a - 5b) & 0 &
\end{array}$$

On voit que la division de $9a^2$ par $6a^2$ ne pouvant se faire exacte-

ment, il a fallu multiplier la totalité du dividende par 2; après quoi le quotient 3 a conduit au reste $-57ab+95b^2$, et la question est réduite à trouver le plus grand facteur commun entre ce binome et le diviseur; il faut donc réitérer les calculs de préparation sur l'un et l'autre. Or, on trouve que le binome a $-19b$ pour facteur, qu'il faut supprimer; et, comme la division par $(3a-5b)$ réussit, le plus grand diviseur commun cherché est $2c\,(3a-5b)$ ou $6ac-10bc$.

Soit proposé de réduire à sa plus simple expression la fraction $\dfrac{6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3}{12a^2-15ay+3y^2}$ : ces polynomes ont respectivement 2 et 3 pour facteurs qu'on peut ôter sans changer le plus grand facteur commun des deux termes : le diviseur sera réduit à $4a^2-5ay+y^2$, et le premier terme du dividende à $3a^3$. Pour rendre la division exacte, il faudra multiplier par 4, c'est-à-dire doubler le numérateur; ainsi, il faut chercher le plus grand commun diviseur de $12a^3-12a^2y+4ay^2-4y^3$ et $4a^2-5ay+y^2$.

Une première division donne le quotient $3a$ et le reste $3a^2y+ay^2-4y^3$. Pour rendre de nouveau la division possible, on multipliera ce reste par 4; on pourra aussi supprimer le facteur $y$; et le dividende deviendra $12a^2+4ay-16y^2$.

Une seconde division conduit au reste $19ay-19y^2$, qui doit être pris pour diviseur de $4a^2-5ay+y^2$. On supprimera les facteurs 19 et $y$ dans ce diviseur, qui devient $a-y$, et qui divise exactement; $a-y$ est donc le plus grand commun diviseur cherché. La fraction proposée se réduit à $\dfrac{6a^2+2y^2}{12a-3y}$.

Voici le calcul :

$$\begin{array}{r|l|l}
12a^3-12a^2y+4ay^2-4y^3 & 4a^2-5ay+y^2 & 19ay-19y^2 \\
+3a^2y+ay^2-4y^3 & \overline{3a+3} & a-y \text{ comm. divis.} \\
12a^2+4ay-16y^2 & -ay+y^2 & \overline{4a-y} \\
19ay-19y^2 & 0 &
\end{array}$$

En cherchant le plus grand diviseur des deux termes, qui est $2a^2+2ab-b^2$, on verra de même que la fraction

$$\frac{4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4}{6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4}=\frac{2a^2-2ab+b^2}{3a^2-ab-2b^2}.$$

Pour la fraction $\dfrac{54a^2b-24b^3}{45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4}$, le facteur commun indépendant de $a$ est $3b$; en le supprimant dans les deux termes, ainsi que 2 au numérateur, on est conduit à chercher le plus grand commun diviseur entre $9a^2-4b^2$ et $15a^3+a^2b-3ab^2+2b^3$. On trouve qu'il est $3a+2b$; ainsi $3b\,(3a+2b)$ est celui qu'on cherche, et la fraction se réduit à $\dfrac{6a-4b}{5a^2-3ab+b^2}$.



On ne doit pas oublier qu'ici, comme au n° 100, il faut regarder les termes qui contiennent une même puissance de la lettre par rapport à laquelle on ordonne, comme ne faisant qu'un seul terme. C'est ce qui a lieu pour la fraction

$$\frac{a^2(b^2-c^2)-ab\,(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)}{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b\,(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)}.$$

La considération des coefficients $(b+c)$, $(2b^2+bc-c^2)$, $(b^2-c^2)$, etc., fait bientôt reconnaître que $(b+c)$ est un facteur commun indépendant de $a$. En le supprimant, on cherche le plus grand diviseur entre

$$a^2(b-c)-ab\,(2b-c)+b^3$$
$$\text{et } a^3(b+c)-a^2b\,(2b+c)+ab^3,$$

qu'on trouve, par le calcul, être $a-b$; ainsi, celui des deux termes de la fraction proposée est $a\,(b+c)-b\,(b+c)$; elle se réduit à $\dfrac{a\,(b-c)-b^2}{a^2\,(b+c)-ab^2}$.

103. Cherchons *le plus petit nombre* n *divisible par deux nombres donnés* a *et* b. Ce nombre serait $a\times b$, si $a$ et $b$ étaient premiers entre eux; mais soit $D$ un diviseur quelconque de $a$ et de $b$, $a=Da'$, $b=Db'$; comme $Da'b'=ab'=a'b$, $Da'b'$ est divisible par $a$ et par $b$. Mais $\dfrac{ab}{D}$ est d'autant plus petit que $D$ est plus grand; donc la quantité $n=Da'b'$ est le plus petit nombre divisible par $a$ et par $b$, quand $D$ est leur plus grand commun diviseur. Ainsi, 312 et 132 ont 12 pour plus grand diviseur; les quotients sont 26 et 11; donc, $12.26.11=3432$ est le plus petit multiple de 312 et 132.