la première équation par b' et la seconde par b, puis retranchant les produits, d'où $a'bx - ab'x = bc' - b'c$. Donc enfin on a

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}, \qquad y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \ldots\ldots (B)$$

111. En traitant de la même manière les équations

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots (C)$$

qui sont les plus générales à trois inconnues, on trouverait les valeurs de x, y et z. Mais ce calcul ne permettrait pas de découvrir la loi des résultats sans recourir à l'induction; c'est pourquoi nous le présenterons d'une manière un peu différente. Multiplions la première par k, la deuxième par k', et de la somme de ces produits retranchons la troisième, il viendra

$$\begin{aligned} &(ka + k'a' - a'')\,x + (kb + k'b' - b'')\,y \\ &+ (kc + k'c' - c'')\,z = kd + k'd' - d''. \end{aligned}$$

Les nombres k et k' étant arbitraires, on peut leur attribuer des valeurs propres à chasser deux inconnues, y et z, par exemple. On posera pour cela les équ.

$$kb + k'b' = b'', \quad kc + k'c' = c'', \ldots\ldots (D)$$

qui serviront à faire connaître k et k'; et l'on aura

$$x = \frac{kd + k'd' - d''}{ka + k'a' - a''} \ldots\ldots\ldots (E)$$

Il faut ensuite déterminer k et k', et en substituer ici les valeurs; mais on peut abréger beaucoup ce calcul. En effet, le numérateur de x se déduit du dénominateur, en changeant a, a', a'', en d, d', d''; et comme k et k' sont indépendants de ces quantités, la même chose aura lieu également après la substitution des valeurs de k et k'.

Il s'agit donc d'évaluer le dénominateur, puisque le numérateur s'en déduit en changeant simplement les a en d; les formules B appliquées aux équ. D donnent

$$k = \frac{b'c'' - c'b''}{cb' - bc'}, \qquad k' = \frac{cb'' - bc''}{cb' - bc'};$$

d'où $ka + k'a' - a'' = \dfrac{a\,(b'c'' - c'b'') + a'\,(cb'' - bc'')}{cb' - bc'} - a''$.

On réduira au même dénominateur, qu'on supprimera comme étant commun aux deux termes de la fraction E, et l'on aura, pour le dénominateur cherché,

$$K = a\,(b'c'' - c'b'') + a'\,(cb'' - bc'') + a''\,(bc' - cb').$$

En faisant attention à la manière dont il faut exécuter ces multiplications, on observera que le calcul se réduit à l'opération suivante. On prendra la différence $bc - cb$, entre les deux arrangements des lettres b et c; puis on introduira la lettre a à toutes les places, en commençant par la première à gauche, et changeant de signe chaque fois que a changera de place; $+bc$ engendrera $+abc$, $-bac$ et $+bca$; $-cb$ donnera $-acb$, $+cab$ et $-cba$. Enfin, on réunira ces six termes, et l'on marquera d'un trait la seconde lettre de chacun, et de deux la dernière; le dénominateur K est donc

$$K = ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a''.$$

Pour trouver y, il faudrait égaler pareillement à zéro les coefficients de x et z dans l'équation ci-dessus; mais la symétrie des calculs prouve qu'il suffit de changer b en a, et réciproquement dans la valeur de x. On changerait c en a pour la valeur de z. Concluons de là que, 1° *le dénominateur des valeurs de* x, y *et* z, *est le même;* 2° *le numérateur de chacune se déduit du dénominateur, en changeant les coefficients de l'inconnue en les termes connus.* Ainsi,

$$x = \frac{db'c'' - bd'c'' + bc'd'' - dc'b'' + cd'b'' - cb'd''}{K},$$

$$y = \frac{ad'c'' - da'c'' + dc'a'' - ac'd'' + ca'd'' - cd'a''}{K},$$

$$z = \frac{ab'd'' - ba'd'' + bd'a'' - ad'b'' + da'b'' - db'a''}{K}.$$

La loi que nous avons démontrée suit de la nature même du calcul; en sorte que si l'on a quatre inconnues et quatre équ.,

$$ax + by + cz + dt = f, \quad a'x + b'y + c'z + d't = f', \text{ etc.,}$$

il suffira de chercher le dénominateur commun, et l'on en déduira chaque numérateur ; de plus, ce dénominateur sera formé suivant la même loi.

On prend donc les six arrangements des lettres *abc* qui servent de dénominateur ci-dessus (en supprimant les accents), ou $abc - bac + bca -$ etc. : on fait occuper à la lettre d, dans chacun de ces termes, toutes les places, à commencer par la première à gauche ; puis on change de signe chaque fois que d passe d'une place à la suivante ; enfin on marque d'un trait la deuxième lettre, la troisième de deux et la dernière de trois : le dénominateur commun est

$$da'b''c''' - ad'b''c''' + ab'd''c''' - ab'c''d''' - db'a''c''' + bd'a''c''' - \text{etc...}$$

Voici quelques problèmes :

I. Une personne a des jetons dans ses mains ; si elle en porte un de la droite dans la gauche, il y en aura un nombre égal dans chacune ; mais si elle en passe deux de la gauche dans la droite, celle-ci en contiendra le double de l'autre : on demande combien chaque main en contient. On trouve

$x - 1 = y + 1$, et $x + 2 = 2(y - 2)$; d'ou $x = 10$, et $y = 8$.

II. On a acheté trois bijoux dont on demande les prix ; on sait que celui du premier, plus la moitié du prix des deux autres, fait 25 louis ; le prix du deuxième, plus le tiers du prix du premier et du troisième, fait 26 louis ; enfin le prix du troisième, plus la moitié du prix des deux autres, fait 29 louis. On a

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 25,\ y + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}z = 26,\ z + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y = 29;$$

d'où l'on tire $x = 8$, $y = 18$, $z = 16$.

III. A, B et C ont un certain nombre d'écus ; A distribuant des siens à B et C, leur en donne autant qu'ils en avaient déjà ; B double à son tour ceux qui restent à A et ceux que C a entre les mains ; enfin C distribuant à A et B, double pareillement les nombres qu'ils se trouvent avoir ; tout cela fait, chacun en a 16 ; on demande combien ils en avaient d'abord. x, y et z désignant les nombres d'écus respectifs de A, B et C, avant ces distributions, on trouve ces équ.

$x - y - z = 4$, $3y - x - z = 8$, $7z - x - y = 16$, d'où l'on tire $x = 26$, $y = 14$, $z = 8$.

112. Il arrive quelquefois qu'une équation ne peut exister à moins qu'elle ne se partage en deux autres ; ainsi $x^2 + y^2 = 0$, suppose $x = 0$ et $y = 0$, puisque deux carrés étant positifs, l'un ne peut détruire l'autre, et rendre la somme nulle. De même . . . . $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$, donne $x = 1$, et $y = 2$; et quoiqu'il n'y ait qu'une seule équ., c'est comme s'il y en avait deux. Il faut en dire autant de la question suivante, qui n'a qu'une seule condition. Trouver deux nombres tels, que si l'on ajoute 9 au carré de l'un et à 5 fois le carré de l'autre, le résultat soit le produit du double du second nombre, par 3 plus le double du premier. On a

$$5x^2 + y^2 + 9 = 2x\,(2y + 3),$$

qui revient à $4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 6x + 9 = 0$,
ou $(2x - y)^2 + (x - 3)^2 = 0$; donc $2x - y = 0$, et $x - 3 = 0$; partant $x = 3$, et $y = 6$.

C'est par la même raison que l'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$ est absurde.

113. Voici un cas bien remarquable dans lequel une équation se partage en deux.

Supposons que les éléments d'une question soient liés par l'équation $A + \alpha = B + \beta$ *; que plusieurs de ces éléments soient variables ensemble, et que l'équation doive subsister dans tous leurs états possibles de grandeur ; qu'enfin quelques termes* A, B, *demeurent* CONSTANTS, *tandis que les autres* α, β, *seraient variables et susceptibles de décroître ensemble autant qu'on le veut ; cette équation se partage en deux, l'une* $A = B$ *entre les termes constants ; l'autre* $\alpha = \beta$ *entre les termes variables, laquelle aura lieu pour toutes les grandeurs que la question permet d'attribuer à la fois à* α *et* β. En effet, si l'on admet que les constantes A et B ne sont pas égales, leur différence étant K, ou $A - B = \pm K$, on en tire $\beta - \alpha = \pm K$; les variables β et α conserveraient dont entre elles une différence fixe K, et ne seraient pas de nature à pouvoir être moindres que K, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C'est ce principe qui constitue la MÉTHODE DES LIMITES, dont nous ferons un fréquent usage par la suite. *Quand on peut faire approcher une grandeur variable* A $-$ α *d'une autre* A *qui est fixe, de manière à rendre leur différence* α *moindre que toute grandeur donnée, sans cependant qu'elles puissent jamais devenir rigoureusement égales, la*

seconde A *est dite* LIMITE *de la première* A $-\alpha$. Au reste, chaque fois que nous appliquerons ce théorème, on fera bien de s'exercer à reproduire le raisonnement ci-dessus, afin de répandre sur les résultats la clarté convenable; nous exhortons les étudiants à se soumettre à ce conseil, dont ils reconnaîtront l'utilité. En voici deux applications, propres à montrer la marche du calcul et du raisonnement :

I. Soient $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ deux incommensurables, z et t leurs valeurs approchées, x et y les différences qui existent entre ces valeurs et les radicaux; on a $z = \sqrt{a} - x$, $t = \sqrt{b} - y$; or, les produits rationnels $z \times t$ et $t \times z$ sont égaux : donc,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} \pm \alpha = \sqrt{b} \times \sqrt{a} \pm \beta,$$

en représentant par α et β tous les termes où x et y sont facteurs dans chaque membre. Observez que si l'on pousse davantage l'approximation, les erreurs y et x décroîtront, et cela autant qu'on voudra, sans que cette équ. cesse d'avoir lieu; les facteurs $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ demeurant invariables, α et β décroîtront *indéfiniment;* donc l'équation se partage en deux, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$, et $\alpha = \beta$; c'est-à-dire qu'*on peut aussi bien intervertir l'ordre des facteurs irrationnels que celui des rationnels.*

II. Soit demandée la valeur S de la fraction décimale périodique $0,[54]$, d'après la notation du n° 51. En ne prenant que deux fois la période, et représentant par k la valeur des fractions négligées, on a $S - k = 0,5454$; multiplions par 100, nous aurons $100S - 100k = 54,54$; et retranchant, $99S - 99k = 54 - \frac{54}{10000}$. Mais si l'on eût pris trois ou quatre fois la période, ce dernier terme fût devenu $\frac{54}{100^3}$, ou $\frac{54}{100^4}$; ainsi, l'on voit qu'on peut faire décroître *indéfiniment* ce terme, en même temps que l'erreur k, en prenant la période un plus grand nombre de fois; on peut donc donner à l'équation la forme $99S - \alpha = 54 - \beta$; d'où l'on tire $99S = 54$, et $S = \frac{54}{99}$, comme on le sait déjà. On a en outre $\alpha = \beta$, quelque nombre de périodes qu'on ait considéré; en effet, si l'on prend la période deux fois, par exemple $k = 0,0000[54]$,

d'où, $100^2 k = 0,[54] = \frac{54}{99}$, et $99k = \frac{54}{10000}$, ou $\alpha = \beta$.

Soit $S = 0,[p]$, la période p étant composée de n chiffres, on

a $10^n S = p,[p]$; et par le même raisonnement $(10^n - 1)\,S = p$, d'où $S = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots_{c}}$, omme n° 53, 3°.

114. Les formules d'élimination (B) présentent quelques particularités qu'il convient d'examiner. Tant que ces valeurs de x et y sont positives, la solution résulte de ces formules, et il n'y a ni doute, ni difficulté. Mais il peut en être autrement, ce qui conduit à trois cas d'exception de nos équ. (B) :

1° x ou y peut être négatif; alors le problème, tel qu'il est proposé, est absurde, et on peut le rendre possible à l'aide d'une simple modification qu'on trouve en changeant cette inconnue de signe dans les équ. (A) : le calcul réduit en effet la question à n'avoir qu'une seule inconnue, et l'on est ramené à ce qui a été dit (n° 107).

2° Lorsque les formules (B) sont infinies, les coefficients ont des valeurs numériques telles, qu'il en résulte $a'b - ab' = 0$, ou $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Pour connaître alors la nature de la question il faut introduire cette condition dans les équ. (A); mettons donc $\frac{ab'}{b}$ pour a', la seconde devient $\frac{ab'}{b}x + b'y = c'$: donc pour que le cas présent ait lieu, il faut que les équations proposées soient $ax + by = c$, $b'(ax + by) = bc'$. Or, elles ne s'accordent entre elles qu'autant que $b'c = bc'$, ou $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. Cette relation peut être satisfaite, ou ne pas l'être; si elle n'a pas lieu, *le problème est absurde,* puisque les conditions de la question sont contradictoires : cette circonstance est annoncée par des *valeurs de* x *et* y *infinies.* Alors les coefficients forment une proportion $a : a' :: b : b'$, à laquelle le rapport des termes connus c et c' ne peut faire suite.

3° Mais si, outre la relation qui rend le dénominateur nul, ou $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, on a encore $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, les deux équations (A) n'équivalent plus qu'à une seule, les deux conditions de la question rentrent l'une dans l'autre; et comme on n'a qu'une équation et deux inconnues, *le problème est indéterminé* (n° 117). Cela arrive quand les coefficients de l'équation forment trois rapports égaux entre eux, $a : a' :: b : b' :: c : c'$; et attendu qu'on a aussi $a'c = ac'$,

ce cas est mis en évidence par des *valeurs de* x *et* y *qui ont la forme* $\frac{0}{0}$.

A *d* *B* *C* *k* *D* *D'* *C'*

Prenons pour exemple ce problème : Deux courriers partent l'un de A, l'autre de B, et vont dans le même sens AC; le premier fait n kilomètres par heure, le second m; la distance initiale est $AB = d$; cherchons à quel instant les courriers se trouveront à la distance $CD = k$ l'un de l'autre. A parcourt la distance $AC = x$ dans une durée qu'on trouve par la proportion $m : 1 :: x : \frac{x}{m}$; de même $\frac{y}{n}$ est le temps que B met à parcourir $BD = y$. Si les mobiles sont en même temps, l'un en C, l'autre en D, ces fractions sont égales, d'où $nx = my$. Mais, d'un autre côté,

$$AD = x + k = y + d :$$

donc l'élimination donne

$$x = \frac{m(d-k)}{m-n}, \quad y = \frac{n(d-k)}{m-n}.$$

C'est ce qui arrive dans le nombre d'heures $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{d-k}{m-n}$.

En faisant $k = 0$, on a le lieu et l'instant de la rencontre des deux courriers.

Mais les mobiles seront encore distants de k, après que A aura dépassé B : alors ils auront parcouru l'un $AC' = x$, l'autre $BD' = y$, et on aura $x - k = y + d$; il suffit donc de changer le signe de k dans nos équ. C'est une seconde solution du problème.

Pour donner à cette analyse plus de généralité, il faut supposer que les courriers sont en route depuis quelque temps, et que A et B sont des points où ils se trouvent ensemble. Et si la valeur de y est négative, comme cela arrive quand $m < n$ et $d > k$, cela annonce que le lieu du 2e courrier est situé à gauche de B, quand sa distance au 1er est $= k$; l'instant est antérieur à l'arrivée en B.

Quand les courriers marchent en sens contraire, il suffira de prendre n et y négatifs, ainsi qu'on peut s'en assurer directement. Voyez ce qui sera dit ci-après sur l'emploi des signes négatifs en géométrie.

Si $m = n$, x et y sont infinis, et le problème est absurde : ce qui vient de ce que les courriers, ayant la même vitesse, ne peuvent satisfaire à la condition prescrite. Cependant si $d = k$, x et y sont $\frac{0}{0}$, et il y a une infinité de points de rencontre; en effet, les mobiles partent du même point sans que leur distance change.

Des Inégalités.

115. Les expressions où entre le signe $>$ pour marquer quelle est la plus grande de deux quantités, sont des *inégalités*. La différence demeurant la même lorsqu'on y ajoute ou qu'on en ôte le même nombre, *on peut, sans troubler une inégalité, ajouter aux deux membres, ou en ôter des quantités égales, et par conséquent les soumettre aux mêmes calculs que les équations* (n° 105), c'est-à-dire en multiplier ou diviser tous les termes par un même nombre, et transposer quelque terme en changeant son signe. Soit $3x - 7 > x + 11$; ajoutons 7 aux deux membres, puis retranchons-en x, nous avons $3x - x > 11 + 7$, ou $2x > 18$; d'où $x > 9$. Cette question, Trouver un nombre dont le triple, diminué de 7, donne un excès qui surpasse ce nombre plus 11, a une infinité de solutions, puisque toute quantité > 9 y satisfait.

Plusieurs inégalités, renfermant x, donnent chacune une limite de cette inconnue; or, 1° si ces limites sont dans le même sens, comme $x > 9$ et $x > 7$, alors il y a une des inégalités qui dispense d'avoir égard aux autres; 2° si les limites sont dans des sens opposés, comme $x > 9$ et $x < 15$, alors on ne peut prendre pour x que les valeurs intermédiaires. Il se peut même que ces limites s'excluent mutuellement, comme $x > 4$ et $x < 3$, alors le problème est absurde, et renferme des conditions contradictoires.

Quel est le nombre, plus grand que 15, dont le triple, plus 1, est moindre que le double plus 20; et tel en outre que, diminué de 1 et augmenté de 3, le quotient de cette différence par cette somme surpasse $\frac{4}{5}$? Ces conditions s'écrivent ainsi :

$$x > 15, \quad 3x + 1 < 2x + 20, \quad \frac{x-1}{x+3} > \tfrac{4}{5}.$$

On en tire $x > 15$, $x < 19$ et $x > 17$. Il est clair que le nombre devant être compris entre 17 et 19, la 1re condition donnée est inu-

tile ; et l'on peut prendre pour x, $17\frac{1}{2}$, $17\frac{2}{3}$...., et un nombre infini d'autres valeurs. Mais si x doit être entier, le problème ne comporte que cette solution $x = 18$.

Quand on a $a < b$ et $a' < b'$, on en tire visiblement

$$a + a' < b + b', \quad a - b' < b - a', \quad aa' < bb',$$

$$\frac{a}{b'} < \frac{b}{a'}, \quad a^n < b_n, \quad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b};$$

donc, *on peut ajouter, multiplier membre à membre, deux inégalités dont le signe est dans le même sens ; former les puissances, extraire les racines, en conservant les mêmes signes d'inégalité : on peut soustraire ou diviser membre à membre deux inégalités dont les signes sont inverses,* en conservant le signe de l'inégalité qui a fourni les dividendes.

L'expression a non $> b$, qui désigne que a ne peut être plus grand que b, s'écrit souvent ainsi $a \overline{\overline{<}} b$; elle est soumise aux mêmes calculs que les inégalités simples. Par exemple, quel est le nombre dont le triple diminué de 2 ne peut être moindre que 7, et dont le décuple moins 1, ne peut surpasser 11 plus 6 fois ce nombre? Ces conditions s'écrivent ainsi :

$$3x - 2 \overline{\overline{>}} 7, \qquad 10x - 1 \overline{\overline{<}} 11 + 6x,$$

d'où

$$3x \overline{\overline{>}} 7 + 2, \qquad 10x - 6x \overline{\overline{<}} 11 + 1 :$$

ainsi, $x =$ ou > 3, et $x =$ ou < 3, ou plutôt $x = 3$.

116. Nous terminerons par une remarque importante. Faisons varier x dans $a - x$. A mesure que x croît pour s'approcher de a, $a - x$, qui est positif, diminue, et devient enfin nul lorsque $x = a$: si x continue de croître, $a - x$ devient négatif. Nous exprimerons ces circonstances en écrivant $a - x > 0$, tant que $a - x$ est positif; et $a - x < 0$, dès que x surpasse a. Ce n'est pas qu'en effet il puisse y avoir des quantités moindres que zéro ; mais il est visible que si l'on convient qu'on traitera à l'avenir ces inégalités à la manière des équations, l'une donnera $a > x$, et l'autre $a < x$; et ce ne sera qu'une façon d'écrire que $a - x$ est positif dans un cas, et est

négatif dans l'autre. Nous regarderons donc *les quantités négatives comme moindres que zéro, et les positives comme plus grandes que zéro ;* ce qui n'est en effet qu'une convention commode pour faciliter les calculs.

Comme $a - x > 0$ donne $-x > a$, et $a > x$, on voit qu'on n'est pas en droit de changer les signes de tous les termes d'une inégalité, à moins qu'on ne change aussi $>$ en $<$, ou réciproquement ; on ne peut non plus multiplier une inégalité par une valeur négative, sans le même changement : ce qui établit, dans les calculs, une différence importante entre le mécanisme propre aux inégalités et celui qui convient aux équations : 1, 2, 3.... sont des quantités croissantes ; et $-1, -2, -3$.... sont décroissantes ; on a

$$4 < 5 \text{ et } -4 > -5.$$

Des Problèmes indéterminés.

117. Lorsqu'on n'a pas un nombre égal d'équations et d'inconnues, il peut arriver deux cas :

1er cas. *S'il y a plus d'inconnues que d'équ., le problème est indéterminé,* puisqu'on peut disposer arbitrairement de quelques inconnues, afin qu'il n'en reste plus qu'un nombre égal à celui des équ. : l'élimination fait alors connaître ces dernières inconnues. Les valeurs qui satisfont aux équ., ou au problème dont ces équ. expriment les conditions, sont donc en nombre infini. Cherchons, par exemple, deux nombres x et z, dont la somme soit 70 ; il faudra trouver deux quantités qui satisfassent à l'équ. unique $x + z = 70$; d'où $x = 70 - z$. On voit que x ne peut être connu qu'autant que z est donné ; et si l'on met tour à tour $1, 2, 3\frac{1}{2}$.... pour z, on trouvera $x = 69, 68, 66\frac{1}{2}$....; donc 1 et 69, 2, et 68, $3\frac{1}{2}$ et $66\frac{1}{2}$.... remplissent la condition exigée, ainsi qu'une infinité de nombres tant entiers que fractionnaires.

Soient demandés trois nombres x, y, z, dont la somme soit 105, et dont les différences deux à deux soient égales : on a $x + y + z = 105$, $x - y = y - z$, c'est-à-dire trois inconnues et seulement deux équ. Ce cas revient au précédent ; car, en retranchant ces équ. pour en éliminer x, il vient $y = 35$, d'où $x + z = 70$. On fera donc z ou x égal à telle grandeur qu'on voudra ; l'autre inconnue

s'en déduira, et ces nombres, concurremment avec $y = 35$, seront des solutions de la question.

Soit encore l'équation $x^2 - ax = y^2 - ay$; on en tire . . . . . $x^2 - y^2 + ay - ax = 0$; et comme $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, il vient $(x + y)(x - y) - a(x - y) = 0$, ou $(x - y)(x + y - a) = 0$. Ce produit ne peut être nul, à moins que l'un des facteurs ne le soit; on a donc, à volonté, l'une des équ. $x = y$ ou $x = a - y$. En attribuant à y toutes les valeurs possibles, il en résultera des valeurs de x qui seules satisfont au problème : il suffit que les deux inconnues soient égales, ou bien que leur somme soit $= a$, ce qui arrive d'une infinité de manières.

La *Règle d'alliage* peut rentrer dans cette théorie.

1° Supposons qu'on mêle ensemble deux substances qui n'éprouvent pas d'action chimique; soient p et q les prix de l'unité de mesure pour chacune; le prix total du mélange est $px + qy$, en désignant par x et y les nombres d'unités mélangées. Mais le tout est composé de $x + y$ unités; donc le prix de chacune est

$$z = \frac{px + qy}{x + y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

Ainsi 8 bouteilles de vin à 15^f le litre, et 12 à 10^f, font 20 bouteilles, dont le prix est $8 \times 15 + 12 \times 10 = 240$; donc le prix de chacune est $\frac{240}{20}$, ou 12^f.

On a un lingot d'or formé de 4 kil. à 0,95 de fin *, et de 5 kil. à 0,86; quel est le titre du mélange? La formule ci-dessus donne

$$z = \frac{4 \times 0{,}95 + 5 \times 0{,}86}{4 + 5} = 0{,}9.$$

2° Réciproquement, si l'on demande quelle doit être la composition du mélange, la valeur moyenne étant donnée, on cherche

* Lorsque l'or ou l'argent contiennent o, 1 d'alliage, et que le reste est pur, on dit que le métal est à 0,9 de fin. Autrefois le degré de pureté s'estimait différemment : on partageait par la pensée le lingot d'or en 24 parties, qu'on nommait *karats*, de sorte que l'or à 21 karats contenait 3 parties d'alliage et 21 d'or pur. Le karat se divisait en 32 parties ou *grains*; ainsi l'on désignait par 18 karats 20 grains, 18 parties $\frac{20}{32}$ d'or pur, et 5 $\frac{12}{32}$ d'alliage. L'argent se divisait en 12 parties ou *deniers*, chacune de 24 *grains*; ainsi un lingot d'argent à 10 deniers 20 grains contenait 10 parties $\frac{20}{24}$ de métal pur et $1\frac{1}{6}$ d'alliage.

les quantités x et y, connaissant les prix p, q et z; alors l'équation F contient deux inconnues, et le problème est indéterminé. On a $x = \left(\frac{z - q}{p - z}\right) y$; ainsi l'on y satisfait en prenant

$$x = z - q, \quad y = p - z;$$

z est d'ailleurs intermédiaire entre p et q. On pourra, outre ces valeurs, en trouver une infinité d'autres, en les multipliant ou divisant par un même nombre quelconque : on aura par là toutes les solutions entières de la question, si l'on veut que ce facteur, et z, p et q soient entiers (n° 118).

Un boulanger, par exemple, veut faire du pain qui revienne à 8^f le kilogramme; combien doit-il mêler de farine de blé à 10^f, et de seigle à 7^f le kilogramme? Après avoir écrit ces 3 nombres, comme on le voit ci-contre, on mettra 8 — 7, ou 1, à côté de 10; puis 10 — 8, ou 2, près de 7. Ainsi, 1 kilogramme de farine de blé sur 2 de seigle, répondent au problème. On peut aussi prendre 2 sur 4, ou 3 sur 6, etc.

Prix moyen 8 { 10...1...Blé. / 7...2...Seigle.

Si l'on donnait une seconde condition pour déterminer le problème, on la traduirait algébriquement, et l'on éliminerait x et y entre l'équ. (F) et cette dernière. Ainsi, lorsque la quantité $x + y$ du mélange est donnée $= m$, alors on a

$$x + y = m, \text{ et } px + qy = zm;$$

d'où, $$x = \frac{m}{p - q}(z - q), \quad y = \frac{m}{p - q}(p - z).$$

Après avoir obtenu les valeurs ci-dessus, on les multipliera donc par $\frac{m}{p - q}$. Dans notre exemple, si l'on veut que le mélange des farines pèse 21 kil., on multipliera les résultats obtenus 1 et 2, par $\frac{21}{10 - 7} = 7$; de sorte que 7 kilogr. de farine de blé à 10^f, mêlés à 14 de seigle à 7^f, forment 21 kil. de farine à 8^f.

De même, soit demandé de former 7,54 kil. d'argent à 0,9 de fin avec de l'argent à 0,97 et 0,84. L'opération prouve qu'il faut 3^k,48 de la première, et 4^k,06 de la seconde espèce.

$$0{,}9 \begin{cases} 0{,}97 \ldots 0{,}06 \times \frac{7{,}54}{0{,}13} = 3{,}48 \\ 0{,}84 \ldots 0{,}07 \times \frac{7{,}54}{0{,}13} = 4{,}06 \end{cases}$$

On appliquera facilement cette théorie au cas où l'on voudrait mêler ensemble plus de deux substances.

2e cas. *Si l'on a, au contraire, plus d'équ. que d'inconnues, le problème est plus que déterminé*, c'est-à-dire que si l'on élimine toutes les inconnues, il restera, entre les données, un certain nombre d'équ. auxquelles elles devront satisfaire, et qu'on nomme, pour cette raison, *équations de condition :* si elles ne sont pas satisfaites, la question est absurde ; et si elles le sont, plusieurs conditions rentrent dans les autres ; les conditions sont en nombre égal à celui des inconnues, et sont exprimées par autant d'équ. *distinctes*, auxquelles les proposées se réduisent.

Cherchons deux nombres x et y, dont la somme soit s, la différence d et le produit p : on $x+y=s$, $x-y=d$ et $xy=p$. Les deux premières équations donnent (n° 106, III) $x=\frac{1}{2}(s+d)$, $y=\frac{1}{2}(s-d)$; substituant dans la troisième, on trouve $4p=s^2-d^2$. Si les données s, d et p ne satisfont pas à cette relation, le problème est impossible ; et si elle subsiste, l'une des équ. données est inutile, comme exprimant une condition qui a lieu d'elle-même, et est comprise dans les deux autres.

Quelle est la fraction qui, lorsqu'on ajoute m à son numérateur, devient $=\frac{a}{b}$, et qui est $=\frac{a'}{b'}$ lorsqu'on ajoute m' à son dénominateur ? En désignant par x et y les deux termes, on a

$$\frac{x+m}{y}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{x}{y+m'}=\frac{a'}{b'}.$$

L'élimination donne

$$(ab'-a'b)\,x=a'(bm+am'), \quad (ab'-a'b)\,y=b(b'm+a'm');$$

mais x et y sont entiers ; donc, ou $ab'-a'b=\pm 1$, ou bien ce binome divise les seconds membres. On a donc une condition, sans laquelle ce problème est impossible, quoiqu'on ait eu autant d'équ. que d'inconnues.

118. Cherchons tous les systèmes de valeurs *entières* de x et y qui satisfont à l'équ. indéterminée

$$ax+by=\mathrm{A}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

a, b, A, étant des nombres donnés, positifs ou négatifs, et qu'on

peut toujours rendre entiers. Du reste, a *et* b *doivent être premiers entre eux ;* car s'ils avaient un facteur commun d, en divisant tout par d, on aurait $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=\frac{\mathrm{A}}{d}$; ainsi le second membre devrait être entier, puisque le premier l'est ; le problème est donc absurde quand A n'a pas aussi d pour diviseur ; et s'il l'a, on peut supprimer ce facteur dans tous les termes.

Soit $x=\alpha$, $y=\beta$ une solution de l'équ. (1), ou $a\alpha+b\beta=\mathrm{A}$; retranchant de l'équ. (1), on trouve $a(x-\alpha)=-b(y-\beta)$, et comme a et b sont premiers entre eux, $y-\beta$ doit être un multiple de a (n° 25), tel que at ; d'où

$$x=\alpha-bt, \quad y=\beta+at \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

En substituant ces valeurs dans l'équ. (1), il est visible qu'elles y satisfont, quel que soit le nombre entier t, positif ou négatif. Mais ces expressions sont les seules qui jouissent de cette propriété ; car soit $x=\alpha'$, $y=\beta'$, une autre solution, ou $a\alpha'+b\beta'=\mathrm{A}$; en retranchant de $a\alpha+b\beta=\mathrm{A}$, on a $a(\alpha'-\alpha)=-b(\beta'-\beta)$; donc $\beta'-\beta$ est un multiple at de a, $\beta'=\beta+at$, $\alpha'=\alpha-bt$, valeurs comprises dans la forme (2).

Il suit de là que si l'on avait une des solutions (α et β), on connaîtrait toutes les autres, en faisant $t=0, 1, 2\ldots$; et comme les résultats α, $\alpha-b$, $\alpha-2b\ldots$, β, $\beta+a$, $b+2a\ldots$, sont des équidifférences, on voit que *toutes les valeurs de* x *et de* y *forment des progressions arithmétiques, dont les coefficients réciproques* b *et* a *sont les raisons, l'un pris avec un signe contraire* (elles sont croissantes toutes deux, si a et b ont des signes différents ; l'une est croissante et l'autre décroissante, dans le cas contraire).

119. La question est ramenée à trouver une solution $x=\alpha$, $y=\beta$. Soit $a>b$: résolvant l'équ. (1) par rapport à y, et extrayant les entiers contenus dans la fraction, on a

$$y=\frac{\mathrm{A}-ax}{b}=k-lx+\frac{\mathrm{B}-cx}{b},$$

k et l sont les quotients, B et c les restes, de A et a divisés par b. Le problème consiste à *trouver les valeurs de* x *qui rendent* B − cx *divisible par* b. Or, si $c=1$, en faisant $\frac{\mathrm{B}-x}{b}=$ entier z, on a $x=\mathrm{B}-bz$, et toute valeur entière de z rendra x et y en-