tiers; le problème sera donc résolu. Mais quand $c > 1$, on posera $\frac{B - cx}{b} =$ entier z, ou $bz + cx = B$, et il s'agira de résoudre en nombres entiers cette équ. où $c < b$. On opérera donc comme ci-dessus, c'est-à-dire qu'on résoudra l'équ. par rapport à x, on extraira les entiers, et il viendra

$$x = \frac{B - bz}{c} = k' - l'z + \frac{C - dz}{c};$$

k' et l' sont les quotients, et C, d, les restes de la division de B et b par c; il faudra que cette dernière fraction devienne un nombre entier u; or si $d = 1$, on aura $C - z = cu$, $z = C - cu$, et toute valeur entière de u rendra z entier, et par suite aussi x et y. Mais quand $d > 1$, on pose

$$\frac{C - dz}{c} = u, \quad z = \frac{C - cu}{d}, \text{ etc.}$$

Les coefficients des inconnues successives $z, u, v, \ldots$ sont visiblement les restes qu'on obtient par la méthode (n° 23) du commun diviseur entre a et b; et comme ces nombres sont premiers entre eux, on est assuré d'arriver, en dernière analyse, à un coefficient $= 1$, qui donnera une relation de la forme $v + gs = G$, entre les entiers v et s, d'où $v = G - gs$. Ainsi, tout nombre entier pris pour valeur de s rendra v entier, et par suite u, z, x et y : on obtiendra donc une solution du problème; les équ. (2) seront alors applicables.

Un exemple éclaircira ceci. L'équ. $8x - 27y = 7$ donne

$$x = \frac{7 + 27y}{8} = 3y + \frac{3y + 7}{8};$$

posons $\frac{3y + 7}{8} = z$, d'où $y = \frac{8z - 7}{3} = 2z - 2 + \frac{2z - 1}{3}$: faisons $\frac{2z - 1}{3} = u$, d'où $z = \frac{3u + 1}{2} = u + \frac{u + 1}{2}$; enfin, égalant cette fraction à v, il vient $u = 2v - 1$. Faisons, par exemple, $v = 1$, nous aurons $u = 1$, $z = 2$, $y = 3$, $x = 11$; donc, les formules (2) deviennent

$$x = 11 + 27t, \quad y = 3 + 8t.$$

Si l'on eût pris pour v toute autre valeur entière, on serait parvenu aux mêmes valeurs, quoique différentes en apparence. Soit $v = -3$, il vient $u = -7$, $z = -10$, $y = -29$, $x = -97$, d'où, $x = -97 + 27t$, $y = -29 + 8t$: mais on peut mettre $t + 4$ au lieu de t, ce qui ramène aux valeurs ci-dessus. En faisant $t = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ on trouve des équidifférences croissantes, infinies dans les deux sens, dont les raisons sont 27 et 8, et dont les termes, correspondants deux à deux, sont autant de solutions de la question, et les seules qu'elle puisse comporter.

$$x = \ldots -43, -16, 11, 38, 65, 92\ldots$$
$$y = \ldots -13, -5, 3, 11, 19, 27\ldots$$

120. Récapitulons tous les calculs, omettant les raisonnements sur lesquels ils sont fondés. Nous avons trouvé les fractions successives, qui doivent se réduire à des nombres entiers :

$$y = \frac{A - ax}{b}, \; x = \frac{B - bz}{c}, \; z = \frac{C - cu}{d}, \; u = \frac{D - dv}{e} \ldots \quad (M)$$

les facteurs $c, d, e, \ldots$ sont des restes de divisions, ainsi que B, C, D, ... Nous donnerons à ces quantités la disposition suivante, et nous en tirerons un *algorithme*, ou procédé de calcul rapide, qui conduira aux valeurs entières des inconnues y, x, z, u, v. . . .

$$\left.\begin{array}{cccccccl} a & b & c & d & e & f & g & \text{etc.} \ldots 1 \\ A & B & C & D & E & F & \text{etc.} & \ldots\ldots 0 \\ y & x & z & u & v & s & \text{etc.} & \ldots\ldots 0 \end{array}\right\} \ldots \quad (N)$$

La 1re ligne est formée des diviseurs, dividendes et restes de l'opération du commun diviseur (n° 23) entre a et b, conduisant nécessairement à un dernier terme $= 1$. La 2e ligne se compose ainsi qu'il suit : après avoir écrit le second membre A de la proposée sous a, on divise A par b, et on écrit le reste B sous b : puis on divise B par c, et on écrit C sous c; on divise C par d, et ainsi de suite, les diviseurs étant successivement les mêmes que dans la 1re ligne. On ne tient aucun compte des quotients, parce qu'ils sont sans usage.

Quant à la 3e ligne, elle est composée des valeurs entières $y, x, z, \ldots$ qu'on calcule sur le type des équ. (M), en commençant par la droite. Ainsi, pour trouver z, il faut avoir d'abord calculé u,

puis chercher le quotient entier $\frac{C - cu}{d}$, qu'on écrira sous C. Toutes ces fractions de même forme doivent se réduire à des nombres entiers, en ayant soin d'avoir égard aux signes des produits, des différences et des restes.

On écrit la valeur β de y sous le coefficient a de x, et celle α de x sous celui b de y, et l'on obtient ainsi une solution de l'équ. (1); enfin on complète ces valeurs par des multiples $-bt$ et at, conformément aux équ. (2).

Il faut observer que le dernier diviseur de la 1re ligne étant 1, le reste qui lui correspond au-dessous est zéro, nombre terminal de la 2e ligne, et que par conséquent le reste précédent est la valeur du dernier quotient entier.

Soit par ex. l'équ. $328x + 229y = 1741$;

328	229	99	31	6	1
1741	138	39	8	2	0
105	—68	30	—9	2	0
y	x	z	u	v	

On cherche le commun diviseur entre les coefficients 328 et 229, et les restes successifs donnent les nombres de la 1re ligne. On écrit le 2e membre 1741 sous 328, on divise par 229, et l'on écrit le reste 138 sous ce diviseur; on divise 138 par 99, et l'on écrit le reste 39 sous 99; on divise 39 par 31, et l'on écrit le reste 8 sous 31, etc. Le reste 2 est la valeur de la dernière inconnue v; puis on dit $2 \times 31 = 62$, qui retranché de 8, donne -54; divisant -54 par 6, le quotient -9 est la valeur de u; $-9 \times 99 = -891$, ôtant de 39, le reste est $+930$; divisant par 31, le quotient est 30, valeur de z; et ainsi des autres. On a ainsi $y = 105$, $x = -68$, d'où

$$y = 105 - 328t, \qquad x = -68 + 229t.$$

Pour l'équ. $370x + 153y = 2001$, on a

370	153	64	25	14	11	3	2	1
2001	12	12	12	12	1	1	1	0
—103	+48	—20	+8	—4	+4	—1	+1	0
y	x	z	v	u.				

Donc, $y = -103 + 370t, \qquad x = +48 - 153t.$

Ces calculs supposent que la proposée a tous ses termes positifs : s'il en était autrement, on prendrait en signe contraire la valeur de l'inconnue dont le coefficient a le signe $-$; et on aurait la solution de l'équ. $ax - by = A$, ou $-ax + by = A$, A étant positif. Par exemple, l'équ. $370x - 153y = 2001$, donne

$$y = 103 + 370t, \qquad x = 48 + 153t.$$

Résolvons encore l'équ. $29x - 47y = 112$:

47	29	18	11	7	4	3	1
112	25	7	7	0	0	0	0
—1	+3	—1	+1	0	0	0	0
x	y	z	u	v.			

La dernière inconnue $= 0$, il en faut dire autant des précédentes, jusqu'à $v = \frac{7}{7} = +1$, etc.; ainsi, changeant le signe de y (à cause de $-47y$), on a $x = -1 + 47t$, $y = -3 + 29t$.

121. La proposée est quelquefois susceptible de simplifications.

1° S'il y a un facteur commun m entre a et A, en divisant l'équ. (1) par m, on a $\frac{ax}{m} + \frac{by}{m} = \frac{A}{m}$; $\frac{by}{m}$ doit être entier, puisque les autres termes le sont; ainsi y est multiple de m. Posons $y = my'$, il vient, en divisant la proposée par m, une équ. plus simple.

Soit $1200x - 67y = 1000$; on fera $y = 200y'$, et divisant l'équ. par 200, on aura $6x - 67y' = 5$; on en tire aisément $y' = -5$, $y = -1000$, $x = -55$; ainsi,

$$y = -1000 + 1200t, \qquad x = -55 + 67t.$$

Pour l'équ. $44x - 35y = 165$, comme 44 et 165 ont le facteur 11, et que 35 et 165 sont multiples de 5, on fera $y = 11y'$, $x = 5x'$, d'où $4x' - 7y' = 3$: on trouve de suite $y' = -1$, $x' = -1$, puis $y = -11 + 44t$, $x = -5 + 35t$.

2° Observez que dans toute équidifférence A, $A + b$, $A + 2b$,... si l'on divise les a premiers termes par a, *tous les restes sont différents, quand* a *et* b *sont premiers entre eux*; en effet, si deux termes pouvaient conduire au même reste, leur différence serait divisible par a (n° 16), ce qui est absurde, puisque cette différence est de la forme kb, k étant $< a$. Concluons de là que ces a restes inégaux

accomplissent tous les nombres 0, 1, 2, 3..... $(a-1)$, mais rangés dans un ordre différent : ainsi, l'un de ces dividendes $A+lb$ donne zéro pour reste, ou est multiple de a ; et $y=l$ rend $\frac{A+by}{a}$ un nombre entier. Or, il arrive souvent qu'en substituant 0, 1, 2, 3,..... pour y, on découvre la valeur $l<a$ qui satisfait à cette condition. Ainsi, pour que (premier exemple) $\frac{3y+7}{8}$ soit entier, on fait $y=0, 1, 2, 3\ldots$ les restes de $3y+7$ divisé par 8 sont 7, 2, 5, 0,.... Chaque terme de cette série se forme en ajoutant 3 au reste précédent, et supprimant 8 de la somme lorsqu'elle surpasse 8. Il est visible que $y=3$ est la valeur cherchée. Au reste, on ne peut regarder ceci que comme un tâtonnement souvent plus long que la méthode générale.

Pour rendre entier $y=\frac{35+19x}{12}=2+x+\frac{11+7x}{12}$,

faisons $x=0, 1, 2\ldots$; cette dernière fraction conduit aux restes 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 0,.... en ajoutant sans cesse 7, et ôtant 12 lorsque cela se peut; ainsi $x=7$ donne le quotient exact $y=14$; d'où $y=14+19t$, $x=7+12t$.

122. Il arrive quelquefois que la question ne peut admettre que des solutions positives; alors on ne doit plus prendre dans les formules (2) toutes les valeurs entières pour t; mais on posera $\alpha-bt>0$, $\beta+at>0$, d'après ce qu'on a dit p. 151; ces inégalités donneront les limites de t.

1° Si ces limites sont dans le même sens, elles n'en donnent qu'une, et la question a une infinité de solutions croissantes ensemble; dans ce cas, a et b sont de signes contraires dans la proposée, car sans cela $ax+by$ ne pourrait constamment être $=c$. Dans le 1er problème on a $t>-\frac{11}{27}$ et $>-\frac{3}{8}$; ainsi, on peut prendre $t=0, 1, 2,\ldots$ mais on ne peut donner à t aucune valeur négative. Dans le 2e problème p. 160, on a $t=$ ou >0, savoir, $t=0, 1, 2, 3, 4\ldots$

2° Si ces limites sont, l'une par excès, l'autre par défaut, on trouve les valeurs intermédiaires que t peut recevoir, et il n'y a qu'un nombre fini de solutions; x croît quand y décroît, ce qui exige que a et b aient mêmes signes. Il pourrait même se faire que

ces limites s'exclussent mutuellement, et la question serait impossible en nombres entiers et positifs. Dans le 1er exemple, p. 160, on a $t<\frac{105}{328}$ et $>\frac{68}{229}$; ainsi il n'y a aucune solution positive.

Voici encore diverses applications de cette théorie :

Partager 117 en deux parties, dont l'une soit un multiple de 19 et l'autre de 7; on a $19x+7y=117$; d'où $y=\frac{117-19x}{7}$; donc $\frac{5-5x}{7}$, ou $\frac{5(1-x)}{7}$ est un nombre entier. Faisons $x=1$, d'où $y=14$, puis $x=1-7t$ et $y=14+19t$.

Si l'on veut que les parties de 117 soient positives, il faut en outre qu'on ait $1-7t>0$ et $14+19t>0$; d'où $t<\frac{1}{7}$ et $>-\frac{14}{19}$. On ne peut alors satisfaire au problème que d'une manière; $t=0$ donne $x=1$ et $y=14$; de sorte que 19 et 98 sont les parties demandées.

Payer 2000 fr. en vases de deux espèces, les uns à 9 fr., les autres à 13 fr. On trouve $9x+13y=2000$: d'où $x=\frac{2000-13y}{9}$; il faut rendre $\frac{2-4y}{9}$, ou $\frac{1-2y}{9}=$ un nombre entier : ainsi, $y=-4$, d'où $x=228$; puis enfin,

$$x=228-13t,\quad y=-4+9t.$$

Les valeurs négatives de y indiquent combien on reçoit de vases de la 2e espèce, en échange de ceux de la 1re, pour acquitter 2000 fr. dus. Mais si l'on veut que x et y soient positifs, il faut que l'on ait $228-13t>0$ et $-4+9t>0$; d'où $t<18$ et >0. En faisant $t=1, 2, 3\ldots 17$, on a, pour les 17 solutions de la question, $x=215, 202, 189\ldots 7$; $y=5, 14, 23\ldots 149$. Ainsi, on peut donner 215 vases à 9 fr., et 5 à 13 fr.; ou, etc.

Un négociant a changé des roubles estimés 4 fr. contre des ducats de 9 fr.; il a donné 15 fr. en sus; on demande combien de sortes de marchés il a pu faire. On a $9y=4x+15$; d'où

$$x=\frac{9y-15}{4};\ \text{ainsi},\ \frac{y-3}{4}=t;\ \text{d'où}\ y=4t+3,\ \text{et}\ x=9t+3.$$

Lorsqu'on veut que x et y soient positifs, les limites de t coïncident, et l'on a $t>-1$; faisant $t=0, 1, 2,\ldots$ on a un nombre infini de

solutions renfermées dans les séries $x = 3, 12, 21\ldots$, $y = 3, 7, 11\ldots$; on a donc pu changer 3 roubles contre 3 ducats, ou 12 roubles contre 7 ducats, ou. . . . etc.

L'équ. $6x - 12y = 7$ ne peut être résolue en nombres entiers, parce que 7 n'a pas le facteur 6, commun à 6 et 12.

Il en est évidemment de même pour $2x + 3y = -10$, quand x et y doivent être positifs; au reste, le calcul le prouve, puisqu'il donne $x = 3t - 5$ et $y = -2t$; et les limites $t > \frac{5}{3}$ et < 0 sont incompatibles.

Partager en deux la fraction $\frac{n}{d}$, dont le dénominateur $d = ab$, est le produit de deux nombres a et b premiers entre eux, pour cela on fera $\frac{n}{d} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a}$, et l'on devra résoudre en nombres entiers l'équation $ax + by = n$.

Ainsi, pour $\frac{58}{77}$, comme $77 = 11 \times 7$, on a $11x + 7y = 58$, d'où $x = 7t - 3$, $y = 13 - 11\,t$; il y a un nombre infini de solutions quand $\frac{58}{77}$ doit être la différence des deux fractions cherchées; mais si $\frac{58}{77}$ en est la somme, il n'y a qu'une solution qui répond à $t = 1$; on a $\frac{58}{77} = \frac{4}{7} + \frac{2}{11}$.

Faire 50 s. avec des pièces de 2 s. et de 18 d. Soient x le nombre des pièces de 2 s., et y celui des pièces de $\frac{3}{2}$ s.; on a $2x + \frac{3}{2}y = 50$, ou $4x + 3y = 100$; on en tire $x = 1 - 3t$ et $y = 32 + 4t$; en faisant $t = 0, -1, -2$, jusqu'à -8, on a $x = 1, 4, 7\ldots$, $y = 32, 28, 24\ldots$. Si l'on prenait aussi les valeurs négatives de x ou de y, alors les pièces de 2 s. seraient données en échange de celles de 18 d., de manière à produire 50 s. de différence.

123. La même méthode s'applique lorsqu'il y a 3, 4.... inconnues et autant d'équ. moins une. En voici divers exemples :

Quel est le nombre N qui, divisé par 5 et par 7, donne 4 et 2 pour restes, c'est-à-dire qui rend entières les quantités $\frac{N-4}{5}$ et $\frac{N-2}{7}$? Désignons par x et y les quotients respectifs; nous aurons $N = 5x + 4$, $N = 7y + 2$; d'où $7y - 5x = 2$; on résout cette équation par les moyens indiqués, et l'on a $x = 7t + 1$ et $y = 5t + 1$, ce qui donne $N = 35t + 9$. Le nombre demandé est l'un de ceux-ci : 9, 44, 79, ... On serait parvenu plus aisément au résultat, en remarquant que $N = 4$ rend visiblement la 1re fraction un nombre entier, et que tous les nombres qui jouissent de cette propriété sont compris dans $N = 4 + 5v$; mais on ne doit prendre pour v que les valeurs qui rendent aussi entière la quantité $\frac{N-2}{7}$ ou $\frac{5v+2}{7}$; on voit de suite que $v = 1$, et plus généralement $v = 1 + 7t$; donc, en substituant, $N = 9 + 35t$.

En comptant les feuillets d'un livre 7 à 7, il en reste 1; 10 à 10, il en reste 6; enfin 3 à 3, il ne reste rien; combien le livre a-t-il de feuillets? On suppose que ce nombre N est entre 100 et 300. Il s'agit de trouver pour N un nombre qui rende entières les fractions $\frac{N-1}{7}$, $\frac{N-6}{10}$ et $\frac{N}{3}$. La dernière donne $N = 3z$; les deux autres deviennent $\frac{3z-1}{7}$, $\frac{3z-6}{10}$; celle-ci exige que $z = 2 + 10v$; ainsi, en substituant, l'autre se change en $\frac{5 + 30v}{7}$, ou $4v + \frac{5+2v}{7}$; donc $v = 1 + 7t$, d'où $z = 12 + 70t$; et enfin, $N = 36 + 210t$. Par conséquent, si l'on fait $t = 0, 1, 2, \ldots$ on trouve $N = 36, 246, 456 \ldots$. Le livre a 246 feuillets.

Trouver un nombre N qui, divisé par 2, 3 et 5, donne 1, 2 et 3 pour restes. On trouve

$$N = 30t + 23; \text{ ainsi, } N = 23,\ 53,\ 83,\ 113, \ldots.$$

On propose de rendre entières les trois quantités $\frac{121x - 41}{504}$, $\frac{9x+1}{35}$ et $\frac{27x - 11}{16}$: voici comment on simplifiera les calculs : Comme $504 = 2^3 . 3^2 . 7$, $35 = 7 . 5$, $16 = 2^4$, on décompose les trois fractions en

$$\frac{121x-41}{2^3}, \frac{121x-41}{3^2}, \frac{121x-41}{7}, \frac{9x+1}{7}, \frac{9x+1}{5}, \frac{11(x-1)}{2^4},$$

$$\text{ou } \frac{x-1}{8}, \frac{4x-5}{9}, \frac{2x+1}{7}, \frac{2x+1}{7}, \frac{4x+1}{5}, \frac{x-1}{16},$$

en extrayant les entiers. On supprime la 3e fraction qui est la même que la quatrième, et la 1re qui est comprise dans la dernière, car

$x - 1$ ne peut être divisible par 16, sans l'être aussi par 8. Il reste donc à rendre entières les quantités

$$\frac{4x-5}{9},\quad \frac{2x+1}{7},\quad \frac{4x+1}{5},\quad \frac{x-1}{16};$$

la 1re donne $x = -1 + 9t$, ce qui change la 2e en $\frac{18t-1}{7}$, ou $\frac{4t-1}{7}$; ainsi, $t = 2 + 7t'$, et $x = 17 + 63t'$. La 3e devient $\frac{2(2+t')}{5}$, d'où $t' = -2 + 5t''$, et $x = -109 + 315t''$. Enfin la 4e donne $\frac{2+11t''}{16}$, d'où $t'' = 10 + 16z$; et enfin, quel que soit l'entier z, $x = 3041 + 5040z$.

Lorsqu'on n'a qu'une équ. et trois inconnues, on opère ainsi qu'il suit. Soit $5x + 8y + 7z = 50$. En faisant $50 - 7z = u$, on a $5x + 8y = u$, d'où l'on tire, par notre méthode, en regardant u comme donné, $x = 8t - 3u$ et $y = 2u - 5t$; remettant $50 - 7z$ pour u, il vient

$$x = 21z + 8t - 150,\quad y = 100 - 14z - 5t.$$

z et t sont des nombres entiers quelconques.

CHAPITRE III.

DES PUISSANCES, DES RACINES, ET DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Des Puissances et Racines des Monomes.

124. La règle (p. 70) simplifie l'élévation aux puissances, en évitant la multiplication réitérée; car soit proposé d'élever a à la puissance $m = n + p$; on a $a^m = a^n \times a^p$, de sorte qu'après avoir formé a^n et a^p, le produit donnera a^m. De même, on pourra décom-

poser m en trois parties $n + p + q$, d'où $a^m = a^n \times a^p \times a^q$, comme n° 96, etc.....

125. Il suit des règles de la multiplication (n° 96), que *pour élever un monome à une puissance, il faut multiplier l'exposant de chaque lettre par le degré de la puissance.* Ainsi,

$$(2ab^2)^2 = 4a^2b^4;\quad \left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{3^5a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}.$$

On tire encore de là un moyen facile de former certaines puissances des nombres; car a^m, lorsque $m = np$, revient à $a^{np} = (a^n)^p$. Si $m = npq \ldots$, on fera la puissance n de a, la puissance p de a^n, la puissance q de a^{np}....

De même, pour l'extraction des racines : ainsi, comme $12 = 3 . 2 . 2$, on trouvera $\sqrt[12]{531441}$ en prenant la racine carrée, qui est 729; puis celle de 729 qui est 27; puis enfin la racine cubique de 27 qui est $3 = \sqrt[12]{531441}$ (*voy.* n° 60).

Réciproquement, *pour extraire la racine* m*e d'un monome, on extraira celle de chaque facteur; cette racine se trouve en divisant chaque exposant par* m. En effet, pour que a^2b^3 soit $\sqrt[3]{(a^6b^9)}$, il suffit que a^2b^3, élevé au cube, reproduise a^6b^9; or, c'est ce qui a lieu d'après la règle qui précède, si l'on a divisé les exposants par 3.

$$\sqrt{(4a^2b^4)} = 2ab^2,\quad \sqrt[5]{\left(\frac{243a^{10}b^5}{c^5d^{10}}\right)} = \frac{3a^2b}{cd^2}.$$

Lorsque le degré de la racine est pair, on doit affecter cette racine du signe $\pm$; $\sqrt{9} = \pm 3$. Cela vient de ce qu'algébriquement parlant, pour qu'un nombre m soit racine de 9, il suffit que $m^2 = 9$, ce qui a lieu, que m ait le signe $+$ ou $-$ (p. 139). Si le degré de la racine est impair, le signe de la puissance est le même que celui de la racine :

$$\sqrt[3]{-27} = -3,\quad \sqrt[5]{+243} = +3.$$

126. Les expressions radicales éprouvent souvent des simplifications.