Si l'on veut partager a en deux parties, dont le produit p soit donné, il faut faire $m = n = 1$. Comme les racines sont imaginaires lorsque $p > \frac{1}{4}a^2$, on voit que le produit ne peut surpasser le carré de la moitié de a, c.-à-d. que le carré de $\frac{1}{2}a$ est le plus grand produit possible qu'on puisse former avec les deux parties de a (n° 97, III).

III. Étant donnés le produit p de deux poids et leur différence, trouver chacun d'eux ? On a $xy = p$, $x - y = d$; d'où

$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}$$

et

$$y = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}.$$

IV. Trouver deux nombres tels, que leur somme a, et celle b de leurs cubes soient données. De $x + y = a$, $x^3 + y^3 = b$, on tire $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 = b$, et faisant $b = af$, on a

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{3}f - \tfrac{1}{12}a^2)}$$

et

$$y = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{3}f - \tfrac{1}{12}a^2)}.$$

V. Quel est le nombre dont n fois la puissance p est égale à m fois la puissance $p + 2$? $x = \pm\sqrt{(n : m)}$.

VI. Plusieurs personnes sont tenues de payer les frais d'un procès, montant à 800 fr.; mais trois sont insolvables, et les autres, suppléant à leur défaut, sont contraintes de donner chacune 60 fr. outre leur part; on demande le nombre x des payants. On a

$$\frac{800}{x+3} = \frac{800}{x} - 60, \text{ d'où } x^2 + 3x = 40,$$

et

$$x = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} + 40)} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{13}{2};$$

ainsi, il y avait 5 payants, au lieu de 8. Il est aisé d'interpréter la racine négative -8.

VII. On a deux points lumineux A et B (fig. 1), distants entre eux de $AB = a$; l'intensité de la lumière répandue par A est m fois celle de B; on demande le lieu D qui reçoit la même clarté de part et d'autre, sachant que la lumière transmise par un point lumineux décroît en raison du carré de la distance.

Soient α et β les intensités des lumières que communiquent les foyers A et B à la distance 1; $\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{9} \ldots$ seront celles que reçoit le point D lorsqu'il s'écarte de A à la distance 1, 2, 3 . . .; ainsi, $\frac{\alpha}{x^2}$ est celle qui répond à l'espace $AD = x$; et comme $BD = a - x$, la lumière que B transmet à D est $\frac{\beta}{(a-x)^2}$; on a donc $\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(a-x)^2}$, d'où $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{x}{a-x}\right)^2 = m$, en posant $\alpha = m\beta$; extrayant la racine, on trouve enfin

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} \pm 1}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{m-1}(m \mp \sqrt{m}).$$

En général, on doit éviter la double irrationnalité des deux termes d'une fraction (n° 65), et surtout celle du dénominateur. Ici, on a multiplié haut et bas par $\sqrt{m} \mp 1$, ce qui a donné (n° 97, III) pour dénominateur $m - 1$, et pour numérateur $a\sqrt{m}(\sqrt{m} \pm 1)$. On en dira autant des cas semblables.

VIII. Soit donnée une fraction $\frac{a}{b}$; quel est le nombre x qui, ajouté, soit au numérateur a, soit au dénominateur b, donne deux résultats dont le 1er soit k fois le 2e, ou

$$\frac{a+x}{b} = \frac{ka}{b+x}, \quad x^2 + (a+b)x = ab(k-1);$$

donc

$$x = -\tfrac{1}{2}(a+b) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[(a-b)^2 + 4abk]}.$$

CHAPITRE IV.

DES RAPPORTS.

Des Proportions.

141. 1° L'équidifférence $a.b:c.d$, équivaut à $a - b = c - d$; d'où $a + d = c + b$. Si l'équidifférence est continue, on a $\div a.b.d$, d'où $2b = a + d$ (*voy.* n° 72).

2° Soit la proportion $a : b :: c : d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; on a $ad = bc$,

d'où $d = \frac{bc}{a}$. Si la proportion est continue $\div\div\ a : b : d$, on a $b = \sqrt{(ad)}$ (*voyez* n° 72).

3° $a^2 - b^2 = m - m^2$, ou $(a+b)(a-b) = m(1-m)$, donne la proportion $\frac{a+b}{m} = \frac{1-m}{a-b}$.

De même, $1 - x^2 = a$ donne $\frac{1+x}{1} = \frac{a}{1-x}$.

4° Ajoutons $\pm\ m$ aux deux membres de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; il vient $\frac{a \pm mb}{b} = \frac{c \pm md}{d}$, d'où $\frac{a \pm mb}{c \pm md} = \frac{b}{d}$. Si $m = 1$, $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$ (*voy.* n° 73).

5° Soient $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ une suite de rapports égaux, de sorte que $\frac{a}{b} = q$, ou $a = bq$, $c = dq$, $e = fq \ldots$

En ajoutant toutes les équations, on a (n° 73, 3°)

$$a + c + e \ldots = q\,(b + d + f + \ldots);$$

d'où
$$\frac{a + c + e + \ldots}{b + d + f + \ldots} = q = \frac{a}{b}.$$

6° Si $a : b :: c : d$, on a

$$a^m : b^m :: c^m : d^m, \quad \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

Des Progressions arithmétiques.

142. Soit la progression $\div\, a.b.c \ldots\ldots i.k.l$, dont est d la raison, n le nombre des termes; on a les $(n-1)$ équ.

$$b = a + d, \quad c = b + d \ldots\ldots, \quad l = k + d;$$

en ajoutant, il vient $l = a + d\,(n-1)$, comme (n° 85).

Cette expression de la valeur du $n^{ième}$ terme de la progression est ce qu'on nomme le *terme général;* il représente tour à tour tous les termes, en faisant $n = 1, 2, 3 \ldots$

Soit s le terme *sommatoire* de la progression, c'est-à-dire la somme de ses n premiers termes; l'on a

$$s = a + b + c + \ldots\ldots + i + k + l,$$
ou $$s = a + (a + d) + (a + 2d) \ldots\ldots + a + (n-1)\,d,$$
et aussi $$s = l + (l - d) + (l - 2d) \ldots\ldots + l - (n-1)\,d,$$

en écrivant le 2e membre en sens inverse. Ajoutons ces équations; comme les termes correspondants produisent la même somme, $2s$ est visiblement égal à $a + l$ pris autant de fois qu'il y a d'unités dans n; ainsi, $s = \frac{1}{2}n\ (a + l)$. On remarquera qu'en général, *la somme* a + 1 *des extrêmes est la même que celle de deux termes qui en sont également éloignés, et est le double du terme moyen lorsque le nombre des termes est impair.*

143. Reprenons ces deux équations

$$l = a + d\,(n-1) \text{ et } s = \tfrac{1}{2}\,n\,(a + l).$$

Nous pourrons en tirer deux quelconques des cinq quantités a, l, d, n et s, connaissant les trois autres.

Voici divers problèmes relatifs à cette théorie :

I. Trouver n, connaissant a, d et s? L'élimination de l donne $s = an + \frac{1}{2}dn\,(n-1)$; d'où

$$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{d}\right)^2\right]}.$$

Par exemple, un corps qui descend du repos tombe de 4 mètres et $\frac{9}{10}$ dans la 1re seconde de sa chute, du triple dans celle qui suit, du quintuple dans la suivante....; on demande combien il mettra de secondes à parcourir 400 mètres. (*Voy.* ma *Mécan.*, n° 157). La progression $\div\, 4{,}9 + 4{,}9 \,.\, 3 + 4{,}9 \,.\, 5 + \ldots\ldots$, donne $s = 400$, $a = 4{,}9$, $d = 2a = 9{,}8$; on trouve $n = \sqrt{\frac{s}{a}} = \sqrt{\frac{400}{4{,}9}}$, d'où $n = 9'',03$ et $l = 83_m,6$ environ.

II. Combien une horloge frappe-t-elle de coups à chaque tour du cadran? Si elle ne sonne que les heures, on a $1 + 2 + 3 + \ldots + 12$; d'où $s = 6 \times 13 = 78$. Si elle sonne les demies, on a

$$2 + 3 + 4 \ldots\ldots + 13, \text{ et } s = 90.$$

III. On a un amas de boulets de canon disposés en progression

par différence, et composé de 18 rangs dont chacun contient 2 boulets de plus que le précédent ; on demande combien il y en a dans le dernier rang et dans l'amas, sachant que le rang supérieur en contient 3. On a $a = 3$, $n = 18$, $d = 2$; et l'on trouve $l = 37$, $s = 360$.

IV. Entre deux nombres donnés a et l, insérer m moyens proportionnels par différence. Comme $m + 2 = n$, on a

$$l = a + d(m + 1), \text{ d'où } d = \frac{l - a}{m + 1}, \text{ comme (n° 85).}$$

Des Progressions par quotient.

144. Soit la progression $\div\div\, a : b : c : d \ldots\ldots i : l$, la raison étant q, on a les $n - 1$ équations

$$b = aq,\quad c = bq,\quad d = cq, \ldots\ldots l = iq;$$

or, en les multipliant et supprimant les facteurs communs, il vient $l = aq^{n-1}$, comme n° 86 ; c'est le *terme général*. On peut toujours donner à une progression la forme

$$\div\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots\ldots : aq^{n-1};$$

donc *les puissances entières et successives d'une même quantité* q *sont en progression par quotient*. Il en est de même de toute série de termes dont les exposants sont en progression par différence, telle que $bx^m + bx^{m+h} + bx^{m+2h} + \ldots$. Celle-ci revient à la 1re en faisant $a = bx^m$, $q = x^h$.

Ajoutant nos $n - 1$ équations, il vient

$$(b + c + d \ldots + l) = (a + b + c \ldots\ldots + i)\, q.$$

Or, en désignant par s le *terme sommatoire*, on a

$$b + c + d \ldots\ldots + l = s - a,\quad a + b + c \ldots\ldots + i = s - l;$$

donc, $$s - a = (s - l)\, q, \text{ ou } s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Si la progression est décroissante, tout ceci est également vrai, seulement $q < 1$. Mais à mesure que la série se prolonge, la somme s des termes que l'on considère s'approche de plus en plus de celle S

de la progression entière : soit α la différence $S - s$, qui est indéfiniment décroissante ; de plus le dernier terme l devient en même temps aussi petit qu'on veut, posons (n° 113) ;

$$\beta = \frac{lq}{1 - q}, \text{ d'où } S - \alpha = \frac{a}{1 - q} - \beta, \text{ et } S = \frac{a}{1 - q}.$$

On a donc encore comme p. 123, la somme totale d'une progression infinie, dont le 1er terme est a, et la raison $q < 1$. Il est visible que notre raisonnement revient à avoir posé $l = 0$, comme désignant une quantité infiniment petite.

On rapporte qu'un souverain voulant récompenser Sessa, inventeur du jeu des échecs, lui accorda un présent que sa générosité trouvait trop modique : c'était autant de grains de blé qu'il y a d'unités dans la somme de la progression double $1 : 2 : 4 : 8 : 16 \ldots$ étendue jusqu'au 64e terme, attendu que l'échiquier a 64 cases. Cherchons quelle est cette somme. On a $a = 1$, $q = 2$, $n = 64$; d'où $l = 2^{63}$ et $s = 2^{64} - 1$. Cette puissance a été calculée p. 70, et l'on trouve que $s = 18446774$ suivi de 12 autres chiffres. Or, un kilogramme de blé ordinaire contient à peu près 26150 grains, et l'on sait qu'un hectare ne produit guère que 1750 kilogrammes de froment, savoir 45762500 grains. En divisant s par ce nombre, on trouve que Sessa demandait le produit en blé de 403 milliards d'hectares environ, c'est-à-dire 8 fois la surface entière du globe terrestre, en y comprenant les mers, les lacs, les déserts, etc.

Les équ. $\quad l = aq^{n-1},\quad s - a = (s - l)\, q$

servent à résoudre tous les problèmes où, connaissant trois des cinq nombres a, l, n, q et s, on demande les deux autres. Du reste, les calculs qu'il faut exécuter ne sont quelquefois praticables que par des méthodes qui ne sont exposées que dans ce qui suivra. Par exemple, a, n et s étant donnés, on ne peut obtenir q qu'en résolvant l'équation $aq^n - sq + s = a$, qui est du degré n. Lorsque l'exposant n est inconnu, l, a et q étant donnés, on doit recourir à la doctrine des log., n° 147, 3°.

Des Logarithmes.

145. Faisons varier x dans l'équ. $y = a^x$, et observons les variations correspondantes de y.

1° Si $a > 1$, en faisant $x = 0$, on a $y = 1$; $x = 1$, donc $y = a$. A mesure que x croîtra depuis 0 jusqu'à 1, et de là à l'infini, y croîtra de 1 vers a, et ensuite à l'infini; de sorte que quand x passe par toutes les valeurs intermédiaires, en suivant la *loi de continuité*, y croît aussi, quoique bien plus rapidement. Si l'on prend pour x des valeurs négatives, on a $y = a^{-x}$, ou (n° 131) $y = \frac{1}{a^x}$. Ainsi, plus x croît, et plus cette fraction y décroît; de sorte qu'à mesure que x augmente négativement, y décroît de 1 vers 0; $y = 0$ répond à x infini.

2° Si $a < 1$, on fera $a = \frac{1}{b}$, b sera > 1, et l'on aura $y = \frac{1}{b^x}$ ou $y = b^x$, suivant qu'on prendra x positif ou négatif. On retombe donc sur le même cas, avec cette différence que x est positif lorsque $y < 1$, et négatif pour $y > 1$.

3° Si $a = 1$, on a $y = 1$ quel que soit x.

Pourvu que a soit autre que l'unité, on peut donc dire *qu'il y a toujours une valeur pour* x *qui rend* a^x *égal à un nombre donné quelconque* y. L'usage perpétuel qu'on fait des belles propriétés de l'équation $y = a^x$ exige qu'on fixe des dénominations à ses parties, afin d'éviter les circonlocutions. On nomme x le *logarithme du nombre* y; la quantité arbitraire et invariable a est *la base*. Donc *le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base pour produire ce nombre.*

Lorsqu'on écrit $x = Log\ y$, pour désigner que x est le logarithme du nombre y, ou que $y = a^x$, la base a est sous-entendue, parce qu'une fois choisie, elle est supposée demeurer fixe. Mais si on la change, on doit indiquer la nouvelle base, c'est-à-dire de quel *système de logarithmes* il s'agit. C'est ainsi que $10^3 = 1000$, $2^5 = 32$, indiquent que 3 est le logarithme de 1000, et que 5 est celui de 32; mais la base est 10 dans le 1er cas; elle est 2 dans le second.

146. On tire de là plusieurs conséquences:

1° *Dans tout système de logarithmes, celui de* 1 *est zéro, et celui de la base* a *est un.*

2° *Si la base* a *est* > 1, *les logarithmes des nombres* > 1 *sont positifs, les autres sont négatifs. Le contraire a lieu si* a < 1.

3° La base étant fixée, chaque nombre n'a qu'un seul logarithme réel; mais ce nombre a visiblement un log différent pour chaque valeur de la base, en sorte que *tout nombre a une infinité de logarithmes réels*. Par ex., puisque $9^2 = 81$, $3^4 = 81$, 2 et 4 sont les log. du même nombre 81, suivant que la base est 9 ou 3.

4° Les nombres négatifs n'ont point de logarithmes réels, puisqu'en parcourant la série de toutes les valeurs de x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on ne trouve pour y que des nombres positifs depuis 0 jusqu'à $+\infty$.

La composition d'une table de log. consiste à déterminer toutes les valeurs de x qui répondent à $y = 1, 2, 3 \ldots$ dans l'équation $y = a^x$. Si l'on suppose $a^\alpha = m$, en faisant

$$x = 0 \quad \alpha \quad 2\alpha \quad 3\alpha \quad 4\alpha \quad 5\alpha \ldots \textit{ logarithmes},$$
$$\text{on trouve } y = 1 \quad m^1 \quad m^2 \quad m^3 \quad m^4 \quad m^5 \ldots \textit{ nombres};$$

les log. croissent donc en progression par différence, tandis que les nombres croissent en progression par quotient; 0 et 1 sont les deux 1ers termes: les raisons sont les nombres arbitraires α et m. On peut donc regarder les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont l'équ. $y = a^x$, comme classés dans ces deux progressions, ce qui met d'accord les deux définitions que nous avons données des log. (nos 87 et 145).

Le signe *Log* sera dorénavant employé à désigner le logarithme d'un nombre dans un système indéterminé; réservant le signe *log* pour les log. de Briggs, dont la base est 10.

147. Démontrons par algèbre les propriétés des logarithmes.

1° Soient x et x' les log. des nombres y et y', ou $x = Log\ y$, $x' = Log\ y'$: on a $a^x = y$, $a^{x'} = y'$; en multipliant et divisant ces deux équ. l'une par l'autre, on obtient

$$a^{x+x'} = yy',\ a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

Mais il suit de la définition que les exposants $x + x'$ et $x - x'$ sont les log. de yy' et $\frac{y}{y'}$;

donc
$$Log\ y + Log\ y' = Log\ (yy'),$$
$$Log\ y - Log\ y' = Log\ \left(\frac{y}{y'}\right).$$

2° Si l'on élève à la puissance m l'équation $y = a^x$, et si l'on en extrait la racine m^e, on a $y^m = a^{mx}$, $\sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}$: la définition