donne $mx = Log(y^m), \quad \frac{x}{m} = Log(y^m)y;$ donc

$$Log y^m = m Log y, Log \sqrt[m]{y} = \frac{Log y}{m};$$

ces résultats sont conformes à ce qu'on a vu (nº 88).

3º Pour résoudre l'éq. $c = a^x$, dans laquelle c et a sont donnés et x inconnu, on égale les log. des deux membres et l'on en tire Log c = x Log a; une simple division donne donc

$$x = \frac{Log \ c}{Log \ a}.$$

On peut donc trouver la valeur de l'exposant n dans l'équation $l = aq^{n-1}$, du n° 144, relative aux progressions par quotient : log l = log a + (n-1) log q, d'où $n = 1 + \frac{log l - log a}{log q}$. L'inconnue étant x dans l'équ. log l = log l - log q on écrit log l = log l - log q on écrit log l = log l - log l on écrit log l = log l - log l on écrit log l = log l on écrit log l = log l on écrit log l = log l on écrit log log l on écrit log l on écrit log l on lo

d'où $x = \frac{\log P - \log Q}{\log a}.$

Dans $a^z = b$, si z est dépendant de l'inconnue x, et qu'on ait $z = Ax^m + Bx^{m-1} \dots$; comme $z = \frac{\log b}{\log a} =$ un nombre connu K, il reste à résoudre l'équ. du degré m, $K = Ax^m + Bx^{m-1} \dots$ Soit, par ex., $4\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+4} = 9$; on en tire $(x^2-5x+4)\log\frac{2}{3} = \log\frac{9}{4}$; donc $x^2-5x+4=2$, équ. du 2^e degré qui donne x=2, et =3.

4° Soient deux nombres y et y + m; la différence des log. pris dans un même système quelconque est

$$Log (y + m) - Log y = Log \left(\frac{y + m}{y}\right) = Log \left(1 + \frac{m}{y}\right)$$
, quan-

tité qui s'approche de Log 1, ou zéro, à mesure que $\frac{m}{y}$ décroît, et qui est d'autant moindre que y est plus grand : donc les log. de deux nombres diffèrent moins quand ces nombres sont plus grands et plus voisins. C'est ce qu'on a vu n° 91, III.

148. Lorsqu'on a calculé une table de log. dans un système dont la base est a, il est facile d'en former une autre dont la base soit b; car dans l'équ. $a^z = y$, x est le log de y dans le système qui a pour base a: or prenons les log. des deux membres dans le système b; nous aurons x Log a = Log y. Ainsi, pour trouver le log de y dans le 2° système, il faut multiplier x, ou le log de y dans le 1° système, par Log a: et si l'on multiplie par Log a tous les log. de la 1° table, on en formera une nouvelle pour la base b. Ce facteur constant Log a, qui traduit ainsi tous les log. du système a dans le système b, est appelé module; c'est le log de la première base a calculé dans le système b; et si l'on divise Log y par x, qui sont les logarithmes d'un même nombre quelconque dans les deux systèmes, le quotient sera le module Log a relatif à ces systèmes, et par conséquent sera constant pour tous les nombres.

Lorsqu'il arrive qu'on trouve moins d'avantage à prendre la base = 10, qu'à préférer un autre système, il est donc aisé, à l'aide d'une seule table de log., tels que ceux de Briggs, de calculer tout autre log dans ce nouveau système. Par exemple, le $\log \frac{2}{3}$, dans le système dont la base est $\frac{5}{7}$, est $\frac{Log \frac{2}{3}}{Log \frac{5}{7}} = \frac{Log 2 - Log 3}{Log 5 - Log 7}$: la base est ici ce qu'on veut, et si on la prend = 10, tout devient connu, et l'on a $\frac{-0.17609125}{-0.14612804} = 1.2050476$ pour le log cherché.

Pareillement Log $\frac{3}{3}$, dans le système $\frac{3}{2}$, est $\frac{\log \frac{a}{3}}{\log \frac{3}{2}} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3 - \log 2}$ ou -1; ce qui est d'ailleurs évident, puisque l'équ. $y = a^x$ devient ici $\frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^x = (\frac{2}{3})^{-x}$, et x est visiblement -1.

149. Il importe de s'exercer à l'usage des logarithmes dans les calculs algébriques; voici divers exemples:

10
$$\log (a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ...) = \log a + \log b + \log c + \log d \cdot ...,$$

20 $\log \left(\frac{abc}{de}\right) = \log a + \log b + \log c - \log d - \log e,$
30 $\log (a^m \cdot b^n \cdot c^p \cdot ...) = m \log a + n \log b + p \log c \cdot ...,$
40 $\log \left(\frac{a^m b^n}{c^p}\right) = m \log a + n \log b - p \log c \cdot ...,$
50 $\log (a^2 - x^2) = \log[(a + x) \times (a - x)] = \log(a + x) + \log(a - x),$
MATHÉM. PURES. T. I.

60
$$\log V(a^2-x^2) = \frac{1}{2}\log(a+x) + \frac{1}{2}\log(a-x)$$
,

70
$$\log (a^3 \sqrt[4]{a^3}) = 3 \log a + \frac{5}{4} \log a = \frac{15}{4} \log a$$
,

80
$$\log V(a^3-x^3)^m = \frac{m}{n}\log(a-x) + \frac{m}{n}\log(a^2 + ax + x^2)$$
, (p. 123).

En ajoutant et ôtant ax du trinome, il devient $(a + x)^2 - ax$; si l'on pose $z^2 = ax$, z sera facile à trouver par \log , et l'on aura $(a + x)^2 - z^2$ ou (a + x + z) (a + x - z); donc

$$\log \sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n} \left[\log (a - x) + \log (a + x + z) + \log (a + x - z) \right].$$

Ce calcul résout $a^3 - x^3$ en ses facteurs et permet l'emploi des log.

90
$$V(a^2 + x^2)$$
, en posant $2ax = z^2$, devient $V[(a + x)^2 - z^2]$,

$$\log V(a^2 + x^2) = \frac{1}{2} [\log (a + x + z) + \log (a + x - z)].$$

100
$$\log \frac{V(a^2-x^2)}{(a+x)^2} = \frac{1}{2} [\log (a-x) - 5 \log (a+x)].$$

11° Pour insérer m moyens par quotient entre a et l, il faut faire n=m+2 dans l'équ. $l=aq^{n-1}$ (n° 144), d'où l'on tire la raison $q=\sqrt[m+1]{l\choose a}$, et $\log q=\frac{\log l-\log a}{m+1}$. Les divers termes aq,aq^2,\ldots ont pour \log , $\log a+\log q$, $\log a+2\log q\ldots$ Ainsi, pour insérer 11 moyens entre 1 et 2, comme ici $\log a=0$, on trouve $\log q=\frac{1}{12}\times\log 2=0.0250858$, et q=1.059463; les \log des termes consécutifs sont $2\log q$, $3\log q\ldots$, et la progression est (c'est la génération harmonique de Rameau)

12° La base du système étant a, on a a = z; car d'après la définition des log. dans l'équ. $a^y = z$, y est le log de z.

De même,
$$a^{h \log z} = a^{\log (z^h)} = z^h.$$

13° Soit x l'inconnue de l'équ. $b^{n-\frac{a}{x}} = c^{mx}$. f^{x-p} ; on en tire $\binom{n}{x} = \binom{n}{x} \log b = mx \cdot \log c + (x-p) \log f$: il reste donc à ré-

 $(m \log c + \log f) x^2 - (n \log b + p \log f) x + a \log b = 0.$

PROBLÈMES DÉPENDANTS DES PROPORTIONS.

$$14^{\circ} c^{mx} = a \cdot b^{nx-1} \text{ donne } x = \frac{\log a - \log b}{m \log c - n \log b}.$$

soudre l'équ. du 2º degré

15° La population d'une ville s'accroît chaque année de $\frac{1}{30}$; combien y aura-t-il d'habitants au bout d'un siècle, le nombre étant actuellement 100 000? Faisons $n = 100\,000$; au bout d'un an, la population sera $n + \frac{1}{30}n = n \cdot \frac{31}{30} = n'$. Après l'année suivante, n' deviendra de même $n' \cdot \frac{31}{30} = n \cdot (\frac{31}{30})^2 \cdot \dots$ On trouve ainsi qu'au bout de 100 ans, le nombre des habitants sera

nabltants sera

$$n\left(\frac{31}{30}\right)^{100} = x = 2654874$$
,

comme le montre le calcul. Si l'accroissement annuel de la population est d'un r_0 .

 $-\log 50 = \frac{1}{47712125}$
 0.01424044
 $\log n = \frac{5}{6000000}$
 $\log x = \frac{5}{6424044}$

on trouve de même que le nombre primitif n des habitants devient, après q années, $x = n \left(\frac{1+r}{r}\right)^q$. On peut prendre pour inconnue l'une des quantités x, n, r ou q, les autres étant données; et l'on trouve

 $\log x = \log n + q [\log (1+r) - \log r], \log n = \log x - q [\log (1+r) - \log r],$

$$q = \frac{\log x - \log n}{\log (1+r) - \log r}, \qquad \log \left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{\log x - \log n}{q}.$$

Problèmes dépendants des Proportions.

150. Règle d'intérêt. Ce qu'on a dit n° 80, prouve que le capital C placé à i pour cent par an , produit en j jours, l'intérêt simple

$$x = \frac{Cij}{36000} = C \times \frac{j}{6000} \times \frac{i}{6}.$$

et comme j peut être décomposé en parties aliquotes ou diviseurs de 6000, et i en diviseurs de 6, on retrouve le procédé de calcul exposée n° 80.

Intérêt composé. Quand chaque année on laisse le capital s'accroître des intérêts échus, voici ce qui arrive. Si r fr. rapportent 1 fr. après un mois ou un an, le capital a s'est accru de $\frac{a}{r}$, et est devenu

$$a' = a + \frac{a}{r} = a \left(\frac{1+r}{r} \right) = aq,$$

en faisant, pour abréger, $q = \frac{1+r}{r} = 1 + \frac{1}{r}$.

Mais ce nouveau capital a' placé durant le mois ou l'an qui suit, devient de même a'q, ou aq^2 . Ainsi, on a successivement aq^3 , aq^4 ,... et après t fois l'unité de temps, le capital accumulé avec les intérêts échus, est

$$x = aq_t = a \left(\frac{1+r}{r}\right)^t.$$

Cette équ. donnera l'un des quatre nombres a, t, x et r ou q, les trois autres étant connus. Si l'on veut que l'intérêt soit stipulé à tant pour cent, on fera $ri = 100, q = 1 + 0.01 \times i$.

Par ex., un homme destine une somme de 10 000 fr. à payer un bien de 12 000 fr.; il place à cet effet son capital à 5 pour cent par an, et y joint chaque année les intérêts échus : on demande à quel instant son but sera rempli ; on a i = 5, r = 20, $q = \frac{21}{20}$, puis

$$12000 = 10000 \times {\binom{21}{20}}^t$$
, ou $6 = 5 \times {\frac{21}{20}}^t$;

d'où l'on tire la valeur de l'exposant t, par le théorème n° 147, 3°, savoir, t = 3 ans et 9 mois environ.

La table ci-jointe suppose qu'un capital de 1000 fr. est placé à 4, 5 ou 6 p. % par an ; que l'intérêt est payé par semestre ; et que chaque intérêt est immédiatement joint au capital pour devenir productif d'intérêt.

On y voit qu'une somme de 1000 fr. à 5 p. ê l'an, produit 1996, 50 au bout de 14 ans, en cumulant sans cesse les intérêts semestriels.

C'est donc la même chose de payer actuellement 1000 fr., ou de donner 1996,50 dans 14 ans, quand le taux d'intérêt annuel est 5 p. %: celui qui est obligé de payer 1996,50 dans 14 ans, sans intérêt, peut escompter, ou se libérer, en payant de suite seulement 1000 fr.

ACCROISSEMENT de 1000 fr. par intérêts composés de 6 en 6 mois, aux taux de 4, 5 et 6 pour cent par an.

ANS.	4 p. 0/0	5 p. 0/0	6 p. 0/0	ANS.	4 p.0/0	5 p. 0/0	6 p. 0/0
Mail	fr.	fr.	fr.		fr.	fr.	fr.
	1020,00	1025,00	1030,00	142	1515,67	1679,58	1860,29
1	1040,40	1050.63	1060,90	11	1545,98	1721,57	1916,10
	1061,21	1076,89	1092,73	13363	1576,90	1764,61	1973,59
2	1082,43	1103,81	1125,51	12	1604,44	1808,73	2052,79
	1104,08	1131,41	1159,27		1640,61	1853,94	2093,78
3	1126,16	1159,69	1194,05	13	1673,42	1900,29	2156,59
133	1148.69	1188,69	1229,87		1706,89	1947,80	2221,29
4	1171,66	1218,40	1266,77	14	1741.02	1996,50	2287,93
Ally	1195,09	1248.86	1304,77		1775,84	2046,41	2556,57
5	1218,99	1280,08	1343,92	15	1811,36	2097,57	2427,26
	1243,37	1312.09	1584,23	1000	1847,59	2150,01	2500.08
6	1268,24	1344,89	1425,76	16	1884,54	2203,76	2575,08
	1293,61	1378,51	1468,53		1922,23	2258.85	2652,34
7	1319,48	1412,97	1512,59	17	1960,68	2315,32	2731,91
The same	1345,87	1448.30	1557,98	750	1999,89	2373,21	2813,86
8	1372,79	1484.51	1604,71	18	2039,89	2452,54	2898,28
10 115	1400,24	1521,62	1652,85	1	2080,69	2495.55	
9	1428,25	1559.56	1702,42	19	2122,50	2555,68	2985,23
1	1456.81	1598,65	1753,51	10	2164.74	2619,57	5074,78
10	1485,95	1638,62	1806,11	20	2208,04	2685,06	3167,03 3262,04

On voit aussi que le capital est doublé en moins de 14 ans et demi, à 5 p. % l'an; il serait triplé en 19 ans à 6 p. %.

Quand le capital est 2 ou 3 mille francs, il faut doubler ou tripler les nombres ci-dessus, et ainsi proportionnellement pour tout autre capital. Par exemple, 2500 fr. capitalisés avec les intérêts pendant 12 ans produiront $2.5 \times 1808^{\rm f}$, $73 = 4521^{\rm f}$, 82; et c'est la même chose de payer actuellement $2500^{\rm f}$, ou de donner $4521^{\rm f}$, 82 dans 12 ans.

Si l'on devait payer $30000^{\rm f}$ dans 5 ans sans intérêt, on pourrait escompter actuellement, en donnant une somme qu'on trouve par cette proportion : si $1280^{\rm f}$,08 deviennent $30000^{\rm f}$, $1000^{\rm f}$ deviennent $x=23436^{\rm f}$,04, somme à payer de suite, au lieu de $30000^{\rm f}$ dans 5 ans, au taux de 5 p. $\frac{\circ}{\circ}$ par an.

151. Annuités. On nomme ainsi la rente d'un capital a, calculée de sorte qu'en payant chaque année une somme x, qui soit toujours la même, cette somme soit formée des intérêts échus et d'un

à compte sur le capital, lequel se réduisant ainsi peu à peu, soit rendu nul après un temps déterminé.

Le capital vaut aq après la 1^{re} année; on paye x, et l'on ne doit plus que a'=aq-x. Après le 2^e payement x, a' se trouve de même réduit à a'q-x, ou aq^2-qx-x : continuant de même à multiplier par q et à retrancher x, pour avoir ce qui reste dû après chacune des années successives, on en vient enfin à trouver que l'emprunteur doit encore après t années, lorsqu'il vient d'effectuer son t^e payement x (n^{eq} 99, 144),

$$z = aq^{t} - xq^{t-1} - xq^{t-2} \dots - x$$
ou
$$z = aq^{t} - x(q^{t-1} + q^{t-2} \dots + 1) = aq^{t} - x\left(\frac{q^{t} - 1}{q - 1}\right),$$
ou
$$z = (a - xr)\left(\frac{1 + r}{r}\right)^{t} + xr,$$

à cause de qr = 1 + r. Si l'emprunteur s'est acquitté, z = 0, et l'on trouve

$$x = \frac{aq^{t} (q-1)}{q^{t}-1} = \frac{a}{r} \times \frac{(1+r)_{t}}{(1+r)^{t}-r^{t}}$$

Du reste, on peut prendre ici pour inconnue l'une quelconque (voy. p. 136) des quantités x, a, q, r et t, les autres étant données. Les log. sont alors d'un usage très-commode, ou même indispensable. S'il faut résoudre l'équ. par rapport à l'exposant t, on trouve $q^t(x+a-aq)=x$, d'où (n° 147, 3°)

$$t = \frac{\log x - \log (x + a - aq)}{\log q} = \frac{\log x + \log r - \log (rx - a)}{\log (1 + r) - \log r}.$$

De même, si l'on veut que l'inconnue soit x ou a, on posera

$$y = \frac{rx - a}{x};$$

d'où

$$x = \frac{a}{r - y}, \quad a = x (r - y),$$

équ. qui donneront x ou a, lorsque y sera connu. Or, substituant ci-dessus pour x cette valeur, on trouve $(1+r)^t y = r^{t+1}$.

C'est sur cette théorie que sont établies les rentes dont le capital et les intérêts s'éteignent à la mort du prêteur, et qu'on nomme viagères. On suppose que le prêteur doit encore vivre t années, lorsqu'il place le capital a, et l'on demande quelle somme x on doit lui payer chaque année, pour qu'à l'expiration de ces t années il n'ait plus droit à aucune somme : cette rente est donnée par la valeur ci-dessus de x. Si, par ex., l'intérêt de 100 fr. en perpétuel est b (b pour cent, ou le denier b0), on a b100 fr. pour capital, on obtient

$$y = 20 \left(\frac{2.0}{2.t}\right)^t = \frac{20}{1,05^t}, \ x = \frac{100}{20 - y}.$$

Il est vrai qu'on ne sait pas d'avance combien d'années le prêteur doit encore vivre; mais on le suppose, d'après les tables de mortalité: et quoique cette présomption puisse être fautive, elle devient exacte pour un grand nombre d'individus pris ensemble, parce que les uns gagnent précisément en durée de la vie ce que les autres perdent. On sait, par expérience, quelle est la durée de vie probable d'un individu dont l'âge est connu. La 1^{re} ligne est celle des âges, la 2^e le nombre t d'années qui restent probablement à vivre (voy. l'Annu. du Bur. des Long.).

Ages. 1. 5. 10.15. 20. 25. 50. 35.40.45.50.55.60.65.70.75.80 ans. $t. ... 37.45\frac{1}{2}.43.39.35\frac{1}{2}.32\frac{1}{2}.29\frac{1}{2}.26.23.20.17.14.11.8\frac{2}{3}.6\frac{1}{2}.5.3\frac{1}{2}$ ans.

C'est sur cette probabilité qu'on établit l'intérêt des rentes viagères. Ainsi, un homme de 40 ans pouvant encore espérer 23 ans d'existence, t=23, et l'on trouve $y=\frac{20}{1,05^{23}}=6,5$ environ, d'où x=7,4: le capital doit être placé en viager à 7,4 pour cent par an. Les chances réservées aux membres des sociétés connues sous le nom de *Tontines* sont aussi réglées sur le même système.

152. Escomptes. Soit a le capital, i l'intérêt de 100 fr. par mois, r le denier, t le nombre de mois, $\frac{ati}{100}$ est l'intérêt; ainsi, pour l'escompte en dehors, la somme à payer pour le capital a est

$$x = a \left(1 - \frac{ti}{100} \right) = a \left(1 - \frac{t}{r} \right).$$

Pour l'escompte en dedans, il faut raisonner ainsi : puisque 100 + ti doit être réduit à 100, à combien a est-il réduit? d'où

$$x = \frac{100 a}{100 + ti} = \frac{ar}{r + t}.$$

Si la somme S n'est exigible que dans t mois, et qu'on veuille avoir égard aux intérêts des intérêts durant ce temps, il faut recourir à la formule de la p. 196; on trouve que le capital S doit être réduit à

$$a = S\left(\frac{r}{1+r}\right)^{t} = S\left(1+\frac{1}{r}\right)^{-t} = \frac{S}{q^{t}}.$$

153. Règles de fausses positions. Soit ax = b l'équation qui lie entre elles les parties d'une question; si l'on suppose à x une valeur arbitraire s, et qu'on l'assujettisse à satisfaire aux conditions du problème, ce ne serait que par hasard qu'on trouverait as = b. Supposons donc qu'on ait as = c; en divisant terme à terme par ax = b, on trouve $= \frac{s}{x} = \frac{c}{b}$: ainsi le résultat qu'on obtient est à celui qu'on doit obtenir, comme le nombre supposé est à l'inconnue.

Cherchons un nombre dont la $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{4}$ et le $\frac{1}{5}$ réunis fassent 456. Supposons que 200 soit ce nombre; sa moitié, son quart et son cinquième forment 190, au lieu de 456; ainsi 200 n'est pas le nombre cherché: on posera la proportion

190 : 456 :: 200 :
$$x$$
, d'où $x = 480$.

Combien faudrait-il de temps pour remplir un bassin à l'aide de quatre robinets, dont l'un le remplirait en 2 heures, le 2° en 3, le 3° en 5, le 4° en 6. Supposons qu'il fallût une heure; le premier robinet emplirait la moitié du bassin, le 2° le $\frac{1}{3}$, le 3° le $\frac{1}{5}$, le 4° le $\frac{1}{6}$; et comme on trouve $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{5}$, au lieu de 1, il y avait erreur à supposer une heure; on dira

$$\frac{6}{5}$$
; $\frac{5}{5}$; 1; $x = \frac{5h}{6} = 50$ minutes.

Ce procédé, quoique applicable aux règles de société, d'intérêt, etc., ne l'est pas à tous les problèmes du premier degré, puisque l'équation la plus générale est ax + b = cx + d. Si la supposition x = s ne rend pas as + b égal à cs + d, il en résultera une erreur e, de sorte que as + b - (cs + d) = e; retranchant de là

ax + b - (cx + d) = 0, on a (a-c)(s-x) = e. Une autre supposition s' qui entraînerait l'erreur e', donnerait (a-c)(s'-x) = e': divisant ces résultats terme à terme, on a

$$\frac{s-x}{s'-x} = \frac{e}{e'}, \text{ d'où } x = \frac{es'-e's}{e-e'}.$$

Ainsi, multipliez la 1re erreur par la 2e supposition, et réciproquement; retranchez les produits, en ayant égard aux signes des erreurs; divisez ensuite par la différence des erreurs, le quotient sera l'inconnue. C'est en cela que consiste la règle de double fausse position, applicable à tous les problèmes du premier degré.

Dans notre dernière question; la supposition de $x=1^h$, a donné $\frac{6}{5}$, et par conséquent l'erreur $+\frac{1}{5}$. En faisant $x=\frac{1}{2}^h$, on a $\frac{3}{5}$ pour résultat, et $-\frac{2}{5}$ d'erreur. J'écris ces nombres comme on le voit ci-contre, je multiplie en croix, et je retranche; j'ai $\frac{1}{10}$ $+\frac{2}{5}$ ou $\frac{1}{4}$; la différence des erreurs est $\frac{1}{5}$ $+\frac{2}{5}$ ou $\frac{3}{5}$; enfin je divise $\frac{1}{4}$ par $\frac{3}{5}$, et j'ai $x=\frac{5}{6}$.

Un père a 40 ans, son fils en a 12; quand l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils (page 135)?

Je suppose 5 ans: le père aura alors 45 ans, le
fils 17; le triple de 17, au lieu de produire 45,
donne 6 ans de plus. En supposant 1 an, l'erreur
est de — 2. Les produits réciproques des erreurs par les suppositions donnent 16 pour différence; divisant par la différence des erreurs, qui est 8, j'ai 2: c'est dans 2 ans que l'âge du père sera triple de celui du fils.