LIVRE TROISIÈME.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

La Géométrie est la science qui se propose de mesurer l'ÉTENDUE et d'en considérer les formes et les propriétés. Tout corps a trois dimensions, *Longueur*, *Largeur* et *Épaisseur* ou *Profondeur :* les limites qui le déterminent en sont la *Surface*. Mais les surfaces d'un corps, en se rencontrant deux à deux, sont elles-mêmes terminées par des *Lignes ;* les limites qui bornent les lignes sont des *Points*. Ce sont ces diverses limites des corps qui nous servent à reconnaître leur *Figure*.

Quoiqu'il n'y ait pas de corps sans trois dimensions, on fait souvent abstraction de l'une d'elles ou de deux : par exemple, si l'on parle de la grandeur d'un champ, ou de la hauteur d'un édifice, on n'a égard qu'à une surface ou une ligne. Afin de procéder du simple au composé, par une gradation qui facilite l'étude, nous diviserons la Géométrie en trois parties : la première traitera des *Lignes*, la seconde des *Surfaces*, la troisième des *Volumes*.

CHAPITRE PREMIER.

DES LIGNES.

Des Droites, des Angles et des Triangles.

154. On peut regarder une ligne comme la trace que laisse un point A (fig. 1) qui se meut vers un autre point B. On dit que la ligne est DROITE quand, en la faisant pirouetter autour de deux de ses points A et B (fig. 1), aucun des autres points de AB, n'éprouve

de déplacement : sinon, la ligne est composée de lignes droites brisées AC,CD,DB (fig. 2) disposées bout à bout; ou bien cette ligne n'a aucune partie rectiligne et est appelée COURBE AMB (fig. 3).

Donc, 1° lorsqu'une ligne AB (fig. 1) est droite, et qu'on prend sur son cours deux points C,D, la droite CD qui joint ces points se confond dans toute sa longueur avec les points de AB; et si l'on imagine au delà des extrémités C et D d'une droite CD, deux autres points A et B, tels que la droite AB coïncide avec CD; ces points A et B sont dits sur le *prolongement* de la droite CD.

2° Toute droite CD doit être conçue prolongée indéfiniment par ses deux bouts.

3° Deux droites qui ont deux points communs coïncident ensemble.

4° Deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point, puisque si elles avaient deux points communs, elles coïncideraient.

Un PLAN est une surface sur laquelle est appliquée toute ligne droite joignant deux points quelconques de cette surface. Étant donnés trois points non en ligne droite, on peut toujours faire passer un plan par ces trois points, puisqu'en tournant autour de la droite qui joint deux de ces points, on pourra faire passer le plan par le 3e point : et il est évident que la position absolue du plan sera alors *déterminée*, c'est-à-dire fixée de manière qu'un autre plan ne pourrait contenir ces trois points sans coïncider avec le premier.

155. Lorsqu'on veut ajouter deux lignes droites ou deux longueurs BC, CA (fig. 1), on porte l'une CA sur le prolongement de l'autre BC, et la somme est BA = BC + CA. Si les parties BC, CA sont égales, BA est double de CA : on peut de même tripler CA, etc.

Pour soustraire CA de BA, on trouve BC = BA — CA; ainsi, on sait retrancher une longueur d'un autre. En général, l'addition ou la soustraction de tant de droites qu'on voudra, la multiplication, la division des longueurs sont des opérations faciles à concevoir.

156. Deux droites CB, CA (fig. 4) n'ayant qu'un seul point C commun, ne peuvent enclore un espace; l'étendue indéfinie comprise entre ces droites prolongées sans limites est ce qu'on appelle un ANGLE. Le point C de section des deux lignes est le *sommet de l'angle*.

On désigne un angle par la lettre placée au sommet; et lorsque ce point est commun à plusieurs angles, comme fig. 10, 12, ... on distingue ces angles en énonçant les trois lettres écrites sur les côtés,

celle du sommet entre celles des côtés. L'angle C (fig. 4) est aussi désigné par BCA ou ACB.

157. Deux angles ACB, *acb* (fig. 4) sont égaux, quand en les posant l'un sur l'autre, ils peuvent coïncider : appliquons le côté *cb* sur CB, les sommets *c*,C, se confondant, le côté *ca* se couchera sur CA.

Les côtés d'un angle devant toujours être considérés comme indéfiniment prolongés, on voit que *la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés*, longueur qui est censée illimitée, mais de l'écartement des deux lignes. Qu'on fasse tourner le côté BC autour du sommet C (fig. 5) pour lui faire prendre la position DC, l'angle BCA devenu DCA, aura augmenté de l'angle DCB; DCA est la somme des deux autres, BCA la différence entre DCA et BCD; DCA = BCA + BCD, BCA = DCA — BCD. Si BCD = BCA, DCA est le double de BCA : on comprend ce qu'on doit entendre par le triple d'un angle, sa moitié, son tiers, etc.

158. Lorsqu'une droite BC (fig. 6 et 7) tombe sur une autre droite AE, elle fait deux angles BCE, BCA qu'on appelle *de suite* ou *adjacents*. S'il arrive (fig. 7) que ces angles soient égaux, c'est-à-dire qu'en pliant la fig. selon CB, la droite CE s'applique sur CA, les deux angles sont appelés *droits*, et on dit que la ligne CB est *perpendiculaire* sur AE.

159. *Tous les angles droits sont égaux*. Supposons BC (fig. 8) perpendiculaire sur AE, et *bc* sur *ae*, c'est-à-dire les angles BCA=BCE, *bca* = *bce*. Transportant l'une des fig. sur l'autre, appliquons le point *c* sur C, et la droite *ae* sur AE; *bc* devra se coucher sur BC. Car si on suppose que *bc* prenne la position CF, on aurait BCA = BCE, FCA = FCE (*hypo.*), ce qui ne peut être; car BCA étant < FCA, BCE devrait aussi être < FCE.

160. *Deux angles de suite BCE, BCA* (fig. 6) *ont pour somme deux angles droits :* c'est ce que met en évidence la perpendiculaire DC élevée en C sur AE.

Réciproquement, si la somme de deux angles donnés vaut deux droits, et qu'on accole ces angles comme BCE, BCA (fig. 9), pour les ajouter (n° 157), les deux côtés extrêmes AC, CE seront en ligne droite. Car si cela n'était pas, que, par ex., CH (au lieu de CA) fût le prolongement de CE, on aurait BCE + BCA = 2 droits (*hypo.*), BCE + BCH = 2 dr. (n° 160); dont en égalant les premiers membres, BCA = BCH, ce qui est absurde.

L'angle BCE (fig. 6) qui est plus petit que l'angle droit DCE est dit *aigu;* l'angle BCA qui est plus grand que l'angle droit DCA est dit *obtus.* Deux angles adjacents BCE, BCA, ou dont la somme vaut deux droits, sont appelés *supplémentaires :* deux angles sont dits *complémentaires* quand leur somme vaut un droit, comme BCE et DCB (fig. 6).

Il est visible que tant de lignes qu'on voudra CB, CF, CD, dans le même plan (fig. 10), qui tombent en un point C de la droite AE, font des angles BCE, BCF, FCD, DCA, dont *la somme vaut deux droits :* c'est ce que montre la perpendiculaire CH.

161. *Lorsque deux droites BD, AE* (fig. 11) *se coupent, les angles BCE, ACD opposés au sommet sont égaux :* car BCE + BCA = 2 dr. (n° 160), ACD + BCA = 2 dr. Donc BCE = ACD.

En prolongeant en D (fig. 7) la perpendiculaire BC à AE, comme l'angle droit BCE = ACD, on voit que l'angle ACB = ACD ; AE est donc réciproquement perpendiculaire sur BD, et les quatre angles de la fig. sont droits et égaux.

Tant de lignes qu'on voudra AC, BC, DC.... (fig. 12) dans un même plan, qui concourent en un point C, forment des angles ACB, BCD, DCE, etc., dont *la somme vaut quatre droits ;* car les deux perpendiculaires MN, PQ, menées par C, forment quatre angles droits qui embrassent toutes les surfaces angulaires du plan.

162. Deux lignes droites ne suffisant pas pour enclore un espace (n° 156), il faut au moins une 3e ligne pour limiter l'étendue. La fig. ainsi formée, telle que ABC (fig. 16) est appelée un *Triangle :* elle a trois côtés AB, AC, BC, et trois angles A, B, C. Si les trois côtés sont égaux (fig. 14), le triangle est *équilatéral ;* il est *isocèle* (fig. 15) quand deux côtés seulement sont égaux, AC = BC ; enfin il est *scalène* lorsque les trois côtés sont inégaux, ABC (fig. 13). Quand il a un angle droit A (fig. 16), *le triangle est rectangle;* on donne le nom d'*hypoténuse* au côté BC qui est opposé à cet angle droit A.

Le sommet C (fig. 13) de l'un quelconque des angles est *le sommet du triangle,* la *base* AB est le côté opposé ; la *hauteur* est la perpendiculaire CD abaissée du sommet C sur la base AB.

163. *Deux triangles ABC, abc* (fig. 24) *sont égaux lorsque deux de leurs côtés sont respectivement égaux chacun à chacun, comprenant un angle égal,* AB = *ab,* AC = *ac,* A = *a.* En effet, transportons le triangle *abc* sur ABC, en faisant tomber le côté *ab* sur son égal AB, savoir, *a* sur A, *b* sur B ; comme l'angle *a* = A (*hypo.*), le côté *ac* prendra la direction AC : mais les longueurs *ac*, AC sont égales (*hypo.*), donc *c* tombera sur C, et par suite *bc* se confondra avec BC ; les surfaces *abc,* ABC coïncideront en toutes leurs parties, d'où B = *b,* C = *c,* BC = *bc.*

164. *Lorsqu'un triangle ABC* (fig. 15) *est isocèle, les angles A et B opposés aux côtés égaux AC, BC sont égaux, A = B.* En effet, tirons la droite CD qui coupe en deux parties égales l'angle C du sommet, savoir, angle ACD = BCD ; en pliant la fig. selon CD, le côté CA prendra la direction CB ; les côtés CA, CB, étant égaux (*hypo.*), coïncideront ; A tombera sur B, AD sur DB ; ainsi A = B.

Donc, 1° *les trois angles A, B, C* (fig. 14) *d'un triangle équilatéral sont égaux.*

2° L'angle ADC = BDC (fig. 15), c'est-à-dire que ces angles sont droits (n° 158), et AD = BD, ainsi la droite CD qui divise par moitiés l'angle C du sommet d'un triangle isocèle, est perpendiculaire à la base AB et passe par son milieu D.

165. Réciproquement, *dans un triangle ABC* (fig. 17), *si l'angle A = ABC, les côtés opposés AC, BC, sont égaux* (le triangle est isocèle). Car si l'on n'a pas AC = BC, prenons sur le plus grand de ces côtés une longueur AD égale à l'autre côté BC, et tirons BD. Les deux triangles ABD, ABC ont le côté commun AB, le côté AD = BC (*constr.*) et l'angle A = ABC (*hypo.*) ; donc ces deux triangles devraient être égaux (n° 163), ce qui est évidemment absurde.

Donc un triangle qui a ses trois angles égaux est équilatéral.

166. *Deux triangles ABC, abc* (fig. 18) *sont égaux lorsque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun, AB = ab, AC = ac, BC = bc.* En effet, transportons l'un des triangles sur l'autre, en faisant coïncider des côtés égaux AB, *ab,* et des sommets A, *a* et B, *b,* semblablement placés ; il s'agit de prouver que les surfaces se confondront ensemble. En effet, si cela n'a pas lieu, il ne pourra arriver que trois cas :

1° Si les triangles tombent comme ACB, ACD (fig. 19), les sommets C et D étant au dehors des surfaces respectives ; comme le côté AC = AD (*hypo.*), le triangle ACD est isocèle, et l'angle ACD = ADC (n° 164) ; d'ailleurs, l'angle BCD < ACD ou ADC. D'un autre côté, BD = BC (*hypo.*), d'où l'angle BCD = BDC ; ainsi l'angle ADC < BDC ou BCD. Ces deux conséquences contradictoires prouvent que ce cas est impossible.

2° Si l'un des triangles ABD (fig. 20) est renfermé dans l'autre ACB, tirez DC et prolongez AC et AD vers E et F. Le côté AD = AC (*hypo.*); donc l'angle ACD = ADC (n° 164), et aussi les suppléments sont égaux, ECD = FDC (n° 160). Or, ECD > BCD, d'où FDC > BCD. D'ailleurs BD = BC (*hypo.*), d'où l'angle BCD = BDC; et comme FDC < BDC, on a FDC < BCD : conclusions encore contradictoires.

3° Enfin, le sommet D (fig. 21) de l'un des triangles ABD, ne peut tomber sur le côté BC de l'autre ABC, puisqu'on aurait BD = BC, ce qui est impossible.

167. *Prolongeons l'un des côtés AC* (fig. 22) *du triangle ABC, l'angle extérieur BCD est toujours plus grand que chacun des angles intérieurs opposés B et A.* Car, par le milieu I de BC, et le sommet A, tirons une droite indéfinie AIF, prenons IF = AI et tirons FC. Les triangles IFC, AIB sont égaux, à cause de AI = IF (*constr.*), BI = IC (*hypo.*) et les angles I opposés au sommet; donc l'angle B = ICF < ICD.

En prolongeant le côté BC vers G, on prouve de même que l'angle ACG > BAC; et comme l'angle BCD est opposé au sommet de ACG, on a BCD > BAC.

Il en résulte que 1° *la somme de deux angles quelconques d'un triangle est plus petite que deux droits :* car BAC < BCD; ajoutant des deux côtés BCA, on a BAC + BCA < BCD + BCA ou 2 droits.

2° Un triangle a au moins deux angles aigus ; le 3e angle peut être aigu, droit ou obtus.

3° *Par un point A* (fig. 23) *pris sur le côté d'un angle aigu ACO, la perpendiculaire AD, menée sur l'autre côté CO, tombe dans la surface de cet angle :* car si cette perpendiculaire pouvait tomber comme AB dans l'angle obtus ACE, le triangle ABC aurait un angle droit B, et un angle ACB obtus, dont la somme serait > 2 droits.

4° La perpendiculaire menée du point A pris sur le côté d'un angle obtus ACE tombe au dehors de cet angle, c'est-à-dire sur le côté CE prolongé.

5° La perpendiculaire CD (fig. 13), menée du sommet C d'un triangle, tombe au dedans de la surface quand les angles intérieurs à la base sont tous deux aigus : elle tombe au dehors, quand l'un de ces angles est obtus.

6° *D'un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite ED* (fig. 23); car cela est évident si le point est en D sur la ligne ED ; et s'il est au dehors, en A, en sorte qu'on ait deux perpendiculaires AC et AD sur EO, les angles en D et C sont droits, ce qui est démontré impossible.

168. *Deux triangles sont égaux, quand deux de leurs angles sont respectivement égaux chacun à chacun, et qu'ils ont en outre un côté égal placé de la même manière par rapport à ces deux angles.*

1er *Cas.* Si les angles sont adjacents au côté, soit AB = *ab* (fig. 18), A = *a*, B = *b*. En portant le triangle *abc* sur ABC, et faisant coïncider les côtés égaux *ab*, AB, comme l'angle A = *a*, le côté *ac* prendra la direction AC. De même, puisque l'angle B = *b*, le côté *bc* prendra la direction BC : ainsi le point *c* tombera sur C, les surfaces *abc*, ABC coïncideront, d'où BC = *bc*, AC = *ac*, C = *c*.

2e *Cas.* Si le côté est opposé à l'un des angles, soit AB = *ab* (fig. 24), l'angle A = *a*, et C = *c* : supposons que AC soit > *ac*; prenons AH = *ac*, et tirons BH. Le triangle ABH = *abc*, à cause de AB = *ab* (*hypo.*); AH = *ac* (*constr.*), et l'angle A = *a* (*hypo.*) : donc l'angle AHB = *c*; or, *c* = C (*hypo.*), donc AHB = C, ce qui est impossible, puisque l'angle AHB est extérieur au triangle BHC (n° 167). Donc AC = *ac*, et les triangles ABC, *abc* sont égaux (n° 163).

Donc *deux triangles rectangles sont égaux quand, outre les hypoténuses égales, ils ont encore un angle aigu égal.*

Mesure des distances.

169. *Dans tout triangle BAC* (fig. 27), *de deux côtés, le plus grand est opposé au plus grand angle.* Si BC > AC, prouvons que l'angle CAB > B. Prenons sur CB la partie CD = AC, et tirons AD : l'angle ADC, extérieur au triangle ADB, est > B (n° 167); mais dans le triangle isocèle ACD, l'angle ADC = CAD ; donc l'angle CAD > B, et *à fortiori* CAB > B.

Donc les trois angles A, B, C (fig. 13) d'un triangle scalène sont inégaux.

Réciproquement (fig. 27), soit l'angle CAB > B, il faut que BC soit > AC : car ces deux côtés ne peuvent être égaux, puisque alors l'angle CAB serait = B (n° 164); on ne peut non plus avoir BC < AC, car l'angle CAB serait < B, contre l'hypothèse.

170. *La longueur d'une droite qui joint deux points en est la plus courte distance.*

1° *Un côté AB* (fig. 28) *de triangle ABC, est toujours plus petit que la somme des deux autres*, AC + BC. Prolongeons AC, prenons CD = CB, et menons BD. Le triangle CBD est isocèle, ainsi l'angle D = CBD (n° 164) et l'angle ABD > CBD est aussi > D; donc (n° 169) le côté AB < AD ou AC + CB.

2° Comparons la droite AB (fig. 25) au contour AICHB formé de lignes droites brisées : menons du point A les droites AC, AH à tous les sommets; nous avons AC < AI + IC (1°); de même, AH < AC + CH; d'où l'on tire *à fortiori* AH < AI + IC + CH; enfin AB < AH + HB, d'où AB < AI + IC + CH + HB.

3° Enfin s'il s'agit du contour courbe AICHB, on tirera des droites qui joignent les points deux à deux, et la somme de ces lignes sera > AB : mais puisque le contour formé de lignes brisées peut approcher autant qu'on veut de la courbe, en rendant les côtés plus courts et plus nombreux, en même temps qu'on allonge de plus en plus le contour, il est clair que la droite AB est plus courte que le chemin courbe.

171. *Si d'un point D* (fig. 26) *intérieur au triangle BAC, on mène des droites DA, DB, aux extrémités de la base AB, le chemin extérieur AC + CB est plus long que l'intérieur AD + DB, et l'angle C est < ADB.* Prolongeons AD en F, nous avons AF < AC + CF (n° 170, 1°); ajoutant FB des deux parts, comme CF + FB = CB, on a AF + FB < AC + CB. De même, DB < DF + FB; ajoutant AD, on a AD + DB < AF + FB : donc *à fortiori* AD + DB < AC + CB.

D'un autre côté, l'angle ADB, extérieur au triangle DFB, est > DFB (n° 167) : de même, l'angle DFB, extérieur au triangle AFC, est > C. Donc ADB > C.

172. Un contour ACDB (fig. 2) est *convexe* ou *concave*, lorsque toute droite IK ne peut le couper en plus de deux points : la concavité est tournée du côté de cette droite IK; la convexité regarde l'espace extérieur.

De deux chemins convexes ACDB, AEFGB, qui mènent de A à B, celui qui entoure l'autre est le plus long. Car en prolongeant EF, on a visiblement ICDK > IK, d'où ACDB > AIKB : de même, AI + EI > AE, d'où AIKB > AEKB; et ainsi de suite; on arrive enfin à ACDB > AEFGB.

La même chose a lieu pour deux contours curvilignes AEMB > ACB (fig. 3) : car en menant une droite EF qui *touche* ACB en un point C, on a EF < EMF (n° 170); d'où AECFB < AEMFB.

D'autres *tangentes ik, lm*, donneront A*iklm* B < AMB; et ainsi de suite, en diminuant de plus en plus le contour, à mesure que les côtés rectilignes deviennent plus courts, et approchent davantage de la courbe ACB : donc enfin AMB > ACB.

173. *Lorsque deux triangles ABC, abc* (fig. 29) *ont deux côtés respectivement égaux, AB = ab, AC = ac, et que les angles compris entre ces lignes sont inégaux BAC > bac, le 3e côté est le plus grand dans le triangle qui a l'angle opposé le plus grand, BC > bc.* En effet, faisons l'angle CAD = *bac*, prenons AD = AB = *ab*, et menons CD; le triangle CAD = *cab*, car AC = *ac* (*hypo.*), AD = *ab* et angle CAD = *a* (*constr.*). Ainsi *bc* = CD qu'il faut prouver < BC. Tirons AI qui coupe par moitiés l'angle BAD; AI tombe dans l'angle BAC > CAD; par le point I de section avec BC, tirons ID. Le triangle AID = AIB, car AB = AD (*constr.*), le côté AI est commun, et les angles en A sont égaux (*constr.*); donc ID = IB; enfin, CD < CI + ID ou BC.

174. *Réciproquement, si deux triangles ABC, abc* (fig. 29) *ont deux côtés respectivement égaux AB = ab, AC = ac, et si les 3es côtés sont inégaux BC > bc, l'angle* a *opposé au moindre côté* bc *est < BAC.* Car si cela n'est pas, l'angle *a* est = ou > BAC : or si *a* = BAC, on doit avoir BC = *bc*; et si *a* > BAC, il faut que *BC* soit < *bc*, conséquences contraires à la supposition. Donc *a* < BAC.

175. *Mesurer une droite A* (fig. 30), c'est chercher (n° 36) combien sa longueur A en contient de fois une autre B connue et prise pour *unité*. Le plus souvent l'unité B n'est pas contenue un nombre exact de fois dans A, et en portant B plusieurs fois le long de A, on trouve un reste R < B : la mesure de la distance A est alors le *Rapport de A à B*, qu'on trouve ainsi qu'il suit. On porte le reste R sur B pour trouver combien de fois B contient R; et s'il y a un autre reste R′, on le porte sur R; puis le nouveau reste R″ est porté sur R′; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un reste *r* qui soit exactement contenu dans le reste précédent. Ce reste *r* est visiblement la *commune mesure de A et de B*, c'est-à-dire est contenu un nombre exact *m* de fois dans A, et *n* de fois dans B, d'où A = *mr*, B = *nr*. Le rapport $\frac{A}{B} = \frac{mr}{nr} = \frac{m}{n}$, et on a $A = \frac{m}{n}B$. Lorsque, par exemple, A est les $\frac{5}{7}$ de B, cela signifie qu'en coupant B en 7 parties égales, A contient juste 5 de ces parties; la mesure de la distance est $A = \frac{5}{7}$ de l'unité B.

L'analogie de cette opération avec celle du commun diviseur de deux nombres (p. 26) est facile à saisir, puisque porter B sur A autant de fois qu'on peut, c'est chercher le quotient de la division de A par B, etc.

Mais s'il y a toujours un reste à chaque division, l'opération n'a plus de bornes, et le rapport de A à B est *incommensurable*, et impossible à exprimer par le rapport de deux nombres entiers, parce qu'il n'y a aucune longueur, si petite qu'elle soit, qui puisse être exactement contenue à la fois dans A et B. On se contente ordinairement d'une approximation ; en négligeant celui des restes successifs qu'on juge assez petit pour ne pas intéresser le résultat (n° 63).

En général, on peut toujours représenter des lignes par des nombres abstraits, en composer des formules, et les soumettre aux règles ordinaires des calculs numériques. Dans ces expressions, on entend par la ligne A, le nombre entier ou fractionnaire qui est le rapport de cette longueur A à celle de l'unité B. Réciproquement, les valeurs numériques peuvent être représentées par des lignes.

Du Cercle, de la Mesure des Arcs et des Angles.

176. La *ligne circulaire* est celle dont tous les points ABDEF (fig. 31) sont dans un plan (n° 154), et à égale distance d'un point intérieur C qu'on appelle *centre*. Le contour de cette courbe est une *circonférence ;* la surface qui y est renfermée est un *cercle;* les droites égales CA, CB, . . . qui partent du centre et se terminent à la courbe sont des *rayons;* un *diamètre* AE est une droite qui passe par le centre et a ses deux extrémités à la circonférence; c'est un double rayon. Tous les diamètres d'un cercle sont égaux.

Une partie AGB de la circonférence est un *arc;* la droite AHB qui joint les bouts de l'arc est sa *corde;* la surface ACBG comprise entre deux rayons et l'arc est un *secteur;* celle AGBH qui est enfermée par l'arc et sa corde est un *segment*.

De là on conclut que 1° *un diamètre est la plus grande des cordes,* car BC + CA > BA (n° 170, 1°) ; or BC = CE, donc CE + CA, ou EA > BA.

2° *Tout diamètre AE coupe le cercle en deux parties égales ;* en effet, en pliant la fig. suivant AE, les deux demi-cercles ABE, AFE

doivent coïncider, car sans cela tous les points de la courbe ne seraient pas à égale distance du centre C.

3° Par la même raison, deux cercles dont les rayons sont égaux, peuvent être appliqués l'un sur l'autre en coïncidence, en superposant les centres : deux arcs de ces cercles doivent aussi se coucher l'un sur l'autre.

4° Deux diamètres perpendiculaires EA, NF coupent la circonférence en quatre arcs égaux, qu'on appelle *quadrans*.

177. *Quand deux angles C, c* (fig. 32) *sont égaux, les arcs AB, ab, décrits de leurs sommets pour centre, avec le même rayon, sont égaux.* C'est ce qu'on reconnaît en appliquant les deux fig. l'une sur l'autre, et *cb* sur CB ; car le rayon *ca* couvre CA, et l'arc *ca* se couche sur CA ; il y a coïncidence entière.

Réciproquement, si deux angles C, *c*, comprennent des arcs égaux, ces angles sont égaux. Cela se voit de même.

1° *Les arcs égaux ont des cordes égales, quand les rayons sont égaux;* car soit l'arc AHL = DIF (fig. 33); menons les rayons CD, CA, CL, CF; les triangles ACL, DCF sont égaux, comme ayant deux côtés égaux, comprenant un angle égal ; donc corde AL = DF.

2° Réciproquement, *les cordes égales sous-tendent des arcs égaux ;* en effet si la corde AL = DF, en tirant les rayons, les triangles CAL, CDF sont égaux, comme ayant les trois côtés respectivement égaux (n° 166) ; ainsi l'angle ACL = DCF, et l'arc DIF = AHL.

3° *Construire un angle* c (fig. 32) *qui soit égal à un angle donné C?* Tirez une ligne indéfinie *cb*, puis avec un rayon quelconque, et des sommets C, *c* pour centres, tracez les arcs AB, *ab*, celui-ci indéfini. Portez de *b* en *a*, sur l'arc *ab*, la longueur de la corde AB ; comme les cordes AB et *ab* sont égales, les arcs sont égaux ; donc en tirant *ca*, les angles C et *c* sont égaux. Si l'on superpose les deux figures, elles seront en coïncidence l'une sur l'autre.

178. *Ajouter deux angles donnés.* Faites d'abord l'angle BCA (fig. 34) égal à l'un des angles proposés, puis BCD égal à l'autre, en y plaçant des arcs *np*, *nm* respectivement égaux à ceux qu'on tracera du sommet des angles donnés : alors DCA = BCA + BCD ; et si ces derniers angles sont égaux, vous aurez le double de l'un d'eux : on en aurait de même le triple, etc.

La soustraction est aussi facile à faire, car angle BCA = DCA − BCD. Enfin les opérations qu'on veut exécuter sur les angles se font sur les arcs décrits de leurs sommets pour centres avec le même rayon.

179. *Mesurer un arc AGD* (fig. 31), c'est chercher son rapport à un autre ABN, de même rayon, et pris pour unité connue (nos 36, 71). Si ces arcs étaient *rectifiés*, c'est-à-dire étendus en ligne droite, on les traiterait comme il a été dit n° 175 : mais la rectification n'est nullement nécessaire ici. On porte sur l'arc AD, autant de fois qu'on peut, une ouverture de compas égale à la corde de l'unité d'arc AN, et on obtient ainsi le nombre de fois que cette unité est contenue dans l'arc AB. S'il y a un reste R, on porte de même la corde de cet arc R sur l'arc AN pris pour unité, et ainsi de suite, pour trouver la commune mesure des arcs, si elle existe ; enfin tout se passe comme pour les droites, même dans le cas où les arcs seraient incommensurables. Cette construction résulte de ce que les arcs égaux répondent à des cordes égales.

On peut, comme on voit, ajouter, soustraire, multiplier, diviser des arcs, enfin les représenter par des nombres, et en composer des formules.

Quant à l'unité d'arc, elle est arbitraire ; on préfère ordinairement le quadrans AN, ou quart de la circonférence.

Comme on prend le quadrans pour unité d'arcs, *on prend pour unité d'angles l'angle droit* que dans la suite nous désignerons par D.

180. *De deux arcs moindres que la demi-circonférence, le plus grand a une corde plus grande.* Car si l'arc AHL > DIB (fig. 33), prenant l'arc DIF = AHL, et menant la corde DF, cette corde DF = AL (n° 177, 1°) : or les deux triangles DCB, DCF ont deux côtés égaux qui sont des rayons, comprenant l'angle DCF > DCB ; donc le 3e côté DF > DB (n° 173).

Réciproquement, *la corde la plus grande sous-tend le plus grand arc ;* car si la corde AL > DB, les triangles ACL, DCB ont deux côtés égaux, et le 3e AL > DB, dont l'angle ACL > DCB, et l'arc AHL > DIB.

181. *Le rapport de deux angles* BCA, DON (fig. 35) *est le même que celui des arcs* ba, dn *compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets comme centres, avec le même rayon.*

1° Si les arcs *ba, dn* sont commensurables, leur commune mesure *dx* sera contenue *m* fois dans *ba*, *p* fois dans *dn*, de sorte que $\frac{ba}{dn} = \frac{m}{p}$. Par chaque point de division *x, y* . . ., menons aux sommets *O, C,* des lignes *Ox, Oy* . . . ; les angles proposés seront de

même coupés en *m* et *p* angles égaux *xOd*, *yOx* . . . ; donc on a $\frac{BCA}{DON} = \frac{m}{p}$. Ces deux relations donnent *

$$\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

2° Si les arcs sont incommensurables, divisons l'un d'eux *nd* en un nombre quelconque *p* de parties égales *dx, xy* . . ., et portons-les sur l'autre arc *ba ;* soit *i* le point de division le plus voisin de *a ;* menons *CI*. Cela posé, les arcs *dn*, *bi* étant commensurables, on a $\frac{ICB}{DON} = \frac{bi}{dn}$; l'angle $ICB = BCA + ICA$, l'arc $bi = ba + ia$; donc

$$\frac{BCA}{DON} + \frac{ICA}{DON} = \frac{ba}{dn} + \frac{ia}{dn}.$$

Or, *ICA* et *ia* varient avec le nombre *p* des divisions de l'arc *nd*, et peuvent être rendus aussi petits qu'on voudra, tandis que les autres quantités restent constantes ; la 2e et la 4e fraction sont donc indéfiniment décroissantes, et l'on a, en passant aux limites (n° 113), $\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}$.

182. Pour trouver le rapport de deux angles, il n'est pas nécessaire de faire sur eux l'opération analogue à celle qui a été indiquée sur les lignes (n° 175), et qui serait ici fort embarrassante. On substitue au rapport cherché celui des arcs, qui est le même. Concluons de là que, 1° le rapport des surfaces des secteurs est le même que celui des arcs.

2° Si l'on prend pour unité d'arc *dn* (fig. 35), l'arc qui est compris entre les côtés de l'unité d'angle *DON*, *dn* et *DON* étant chacun l'unité de leur espèce, notre proportion (*A*) donne $BCA = ba$. Ainsi (nos 36 et 71), *tout angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre* **. On prend ordinaire-

* On ne doit pas oublier que l'égalité de deux rapports constitue une proportion (n° 71). En Géométrie, l'usage a prévalu de lire ainsi ces sortes d'expressions, BCA *est à* DON *comme* ba *est à* dn, et de préférer cette locution à l'équivalente, BCA *divisé par* DON *est égale à* ba *divisé par* dn. On doit en dire autant dans toute la Géométrie élémentaire.

** Ceci suppose une condition tacite, car l'angle *BAC* ne peut être égal à l'arc *ba ;* mais dans l'équation $BCA = ba$, ce n'est plus un angle et un arc qui entrent, ce sont deux