210. Résolvons maintenant quelques problèmes.

I. *Inscrire un cercle* (fig. 68) *dans un triangle* ABC, c'est-à-dire *tracer une circonférence de cercle qui soit tangente aux trois côtés.* Ce problème revient à trouver un point O intérieur, qui soit à égale distance des trois côtés du triangle ABC; car, si les perpendiculaires, OE, OD, OF sont égales, le cercle décrit du centre O, avec le rayon OE, sera tangent aux trois côtés (n° 199).

Cherchons d'abord un point o à égale distance des deux côtés AC, AB; menant Ao, les perpendiculaires égales oe, of donnent les triangles rectangles égaux Aeo, Aof (n° 207, 2°). Donc Ao divise l'angle A en deux parties égales.

Réciproquement, si la droite Ao coupe l'angle A en deux parties égales, tout point o de cette ligne donne les deux perpendiculaires égales oe, of.

Donc, tous les points de la ligne AO sont à même distance de AB que de AC, et les points de cette ligne jouissent seuls de cette propriété; en sorte que AO est *le lieu* de tous les centres des cercles tangents à ces deux côtés, et que, par conséquent, le centre cherché est l'un des points de AO. Ce centre doit aussi, par la même raison, se trouver sur la droite OB, qui divise l'angle B en deux parties égales; il sera donc à leur intersection O, qui non-seulement sera à égale distance des trois côtés du triangle, mais encore qui jouira seul de cette propriété. Menons la droite OC; elle divisera l'angle C en deux parties égales, puisque les deux triangles rectangles ECO, DCO ont l'hypoténuse commune et un côté égal, $OD = OE$.

Concluons donc de là,

1° *Qu'on peut inscrire un cercle dans tout triangle;*

2° *Qu'on n'en peut inscrire qu'un seul;*

3° *Que le centre est situé à l'intersection de deux lignes qui divisent en parties égales deux des angles du triangle;*

4° *Que la droite menée de ce centre au 3e angle, coupe pareillement cet angle en parties égales.*

Soit p le contour ou *Périmètre* du triangle (fig. 68); comme on a $AF = AE$, $BF = BD$, $CE = CD$, on en tire $p = 2AF + 2BD + 2CD$, ou $p = 2AF + 2BC$; d'où

$$AF = \tfrac{1}{2}p - BC = AE = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Il est donc aisé de trouver les points F, E, et par suite D, puisque

$CE = CD$; on pourra résoudre le problème en faisant passer une circonférence tangente aux trois côtés, en D, E, F.

II. Décrire un cercle (fig. 52) dans lequel deux droites données $AB = m$, $AD = n$, sous-tendent des arcs doubles l'un de l'autre? Comme le triangle ADB doit être isocèle, après avoir tiré $AB = m$, on décrira des centres A et B, avec le rayon n, des arcs qui détermineront le point D et le triangle ABD, auquel il ne s'agira plus que de circonscrire un cercle.

III. Construire le triangle rectangle BAC (fig. 69), dont un côté AB de l'angle droit et le périmètre BE sont donnés? Puisque $BC + CA = AE$, élevons en A la perpendiculaire $AD = AE$; nous aurons $BC = CD$, et le triangle BCD sera isocèle; ainsi, CI perpendiculaire au milieu de BD donnera le point C.

IV. Par un point I (fig. 59), mener dans l'angle BCA une droite AIB qui forme le triangle isocèle ABC, savoir $AC = BC$, et l'angle $A = B$. L'angle extérieur BCD étant $= A + B$ (n° 205) $= 2A$, si l'on mène CF qui coupe par moitiés l'angle BCD, FCD sera $= A$, et CF parallèle à AB. Donc, il faut tracer CF, et par le point donné I mener AIB parallèle à CF.

V. Par un point donné M (fig. 66), mener CD telle, que la partie dD interceptée entre les deux circonférences concentriques DB, db soit de longueur connue l? Si CD est la droite cherchée, toute corde $AB = CD$ est à la même distance du centre, ou $KO = OI$, $KB = ID$, $Kb = Id$, puis $Bb = Dd = l$. Qu'en un point quelconque B on porte la longueur l de B en b, entre les deux circonférences; qu'on mène la droite bB prolongée en A; enfin, qu'on trace le cercle OIK tangent à AB, il le sera aussi à la droite cherchée CD; il ne s'agira plus que de mener par le point M une tangente CD à ce cercle IK; ce sera la droite demandée.

VI. Construire un triangle rectangle BCD (fig. 64), dont on connaît l'hypoténuse BC, et la somme ou la différence des côtés CD, BD de l'angle droit? Soit $AD = BD = A'D$; les triangles rectangles isocèles BAD, $BA'D$ ont les angles A et A' égaux à la moitié d'un droit (n° 205, 3°). Dans le triangle BAC ou $BA'C$, outre BC, on connaît donc l'angle A ou A', et le côté AC ou $A'C$, et il est aisé de décrire ce triangle. Sur la base AC ou $A'C$, on tirera AB ou $A'B$ sous la direction d'un demi-angle droit; du centre C, et avec le rayon CB, on tracera un cercle qui coupera AB ou $A'B$ au sommet B (il y a en général deux points d'intersection, et par conséquent deux

solutions n° 207); il restera ensuite à abaisser la perpendiculaire *BD* qui terminera le triangle demandé *BCD*.

Mesure des angles dans le cercle.

211. Nous connaissons la mesure des angles dont le sommet est au centre (n° 181); cherchons cette mesure lorsque le sommet est situé d'une manière quelconque; et d'abord examinons le cas où l'angle est formé par deux cordes, le sommet étant sur la circonf.; on dit alors que l'angle est *Inscrit : il a pour mesure la moitié de l'arc compris entre les côtés.*

1° Si l'un des côtés *AD* de l'angle *GAD* (fig. 70) passe par le centre *C*, en menant *EF* parallèle à *AG*, on a $GE = AF$ (n° 201); mais aussi $ED = AF$, à cause des angles égaux *ACF* et *DCE*; ainsi, *E* est le milieu de l'arc *GD*, et l'angle *ECD*, ou son égal *GAD* (n° 182, 4°), a pour mesure *ED* ou la moitié de l'arc *GD*.

2° Si le centre *C* est entre les côtés de l'angle *BAG*, en menant le diamètre *AD*, les angles *BAD*, *DAG* ayant pour mesure les moitiés de *BD* et de *DG*, la somme, ou la moitié de l'arc *BDG*, est la mesure de l'angle *BAG*.

3° Si le centre *C* est hors de l'angle, comme pour *HAB*, on a de même $\frac{1}{2}$ *HD* et $\frac{1}{2}$ *BD* pour mesures des angles *HAD*, *BAD*; en retranchant, on trouve $\frac{1}{2}$ *HB* pour mesure de l'angle *HAB*.

4° Enfin, s'il s'agit de l'angle *TAB*, formé par une tangente *AT* et par une corde *AB*, le diamètre *AD* est perpend. sur *AT*, l'angle *TAD* a donc pour mesure le quadrans ou la moitié de l'arc *AHBD*; celle de *BAD* est $\frac{1}{2}$ *BD*; la différence de ces arcs est $\frac{1}{2}$ *AHB*, mesure de l'angle *TAB*.

Réciproquement, si un angle *BAG* a pour mesure $\frac{1}{2}$ *BG*, le sommet A est sur la circonf.; car si $\frac{1}{2}$ *BG* pouvait mesurer l'angle *BIG*, on formerait l'angle *BAG* qui aurait même mesure, d'où $BIG = BAG$, ce qui ne se peut (n° 171).

Prolongeons en *K* le côté *HA* de l'angle *HAG*; la moitié de l'arc *GAH* est la mesure de l'angle *KAG*, puisque *KAG* est supplément de l'angle *HAG*.

On verra aisément que

5° *L'angle* BAD (fig. 71) *inscrit dans le demi-cercle, est droit*, car il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence.

6° Tous les angles inscrits *A*, *C*, *D*, ... (fig. 72), qui s'appuient sur le même arc *BE*, ayant même mesure, sont égaux.

7° Si un angle *BAE*, de grandeur fixe, se meut de manière que ses côtés passent sans cesse l'un en *B*, l'autre en *E*, le sommet, prenant successivement les positions *A*, *C*, *D*, ... décrira la circonférence.

212. On résout divers problèmes à l'aide de ce théorème.

I. *Abaisser une perpendiculaire* AD (fig. 71) *à l'extrémité d'une ligne* AB *sans la prolonger.* Puisque l'angle *A* doit être droit, toute ligne *BD* doit être le diamètre d'un cercle passant en *A* (5°). On décrira donc, du centre quelconque *C*, un cercle qui passe en *A*; puis par le point *B* où ce cercle coupe *AB*, on mènera le diamètre *BD*, qui donnera le point *D*; *DA* sera la perpend. cherchée.

II. *Par un point extérieur* D (fig. 73) *mener une tangente* AD *au cercle* CAB. Puisque l'angle *CAD*, formé par la tangente et le rayon, doit être droit, cet angle est inscrit dans le demi-cercle dont *CD* est le diamètre (5°). On décrira donc cette circonf. *CADB*; elle coupera le cercle proposé *CAB* au point de contact *A*. On aura, outre la tangente *AD*, une autre solution *BD*, et il est prouvé que ces deux lignes satisfont seules à la question.

III. *Partager l'angle quelconque* ACB (fig. 74) *en trois parties égales.* Traçons du sommet *C* le cercle *IFAB*; concevons la ligne *AO* tracée de manière à former l'angle $O = \frac{1}{3}$ *ACB*. L'angle *ACB* est extérieur au triangle *AOC*, d'où $3O = O + OAC$; et $OAC = 2O$. Mais menant le rayon *FC*, le triangle isocèle *FAC* donne $OAC = AFC$; or l'angle *AFC*, extérieur au triangle *OFC*, est $= O + FCO = OAC = 2O$: il en résulte que l'angle $FCO = O$, et que le triangle *FCO* est isocèle; $OF =$ le rayon *CF* du cercle.

Le problème proposé consiste donc à savoir mener la droite *AO* telle, que la partie extérieure *OF* soit égale au rayon : l'angle *O* sera le tiers de l'angle *ACB*, l'arc *BG* ou *FI* le tiers de l'arc *AB*. Mais il n'appartient pas à la Géométrie élémentaire de donner des moyens de mener cette droite *AO* : comme on n'y traite que des propriétés de la ligne droite et du cercle, on n'y emploie aussi que la règle et le compas; on verra d'ailleurs des moyens d'opérer la *trisection de l'angle*, ce qu'on ne peut faire ici que par tâtonnement.

IV. Décrire un cercle qui passe en deux points donnés *B*, *E* (fig. 75), et qui soit tel, que les angles *O* inscrits soient égaux à un

angle donné A; c'est ce qu'on appelle *décrire sur une droite BE, un segment capable de l'angle* A. La tangente en E fera aussi l'angle $BEK = A = O$ (n° 211, 4°); si donc on mène la droite KEI telle que l'angle BEK soit $= A$, elle sera tangente. La question est donc réduite à faire passer en B un cercle tangent à KI au point E (n° 204). On élèvera les perpend. CE à KI, et CG sur le milieu de BE; C sera le centre.

Cette construction est souvent employée, surtout lorsqu'il s'agit de former un triangle dans lequel on connaît, entre autres choses, un côté et l'angle opposé, comme dans les questions suivantes.

V. Décrire un triangle BDE (fig. 76) dont on connaît la base b, la hauteur h et l'angle A du sommet. Après avoir tracé $BE = b$ et sa parallèle DD', à la distance $HG = h$ de BE, on décrira sur BE un segment capable de l'angle donné A, et les points où DD' coupera le cercle, donneront pour solutions les triangles demandés BDE, $BD'E$.

VI. Soient trois points B, A, C (fig. 77) tracés sur une carte, fixer le lieu d'un quatrième point D, connaissant les angles BDC et BDA. On décrira sur BC le segment *mi B* capable de l'angle BDC, ainsi qu'on vient de le dire, et le point cherché D fera sur cette circonférence *mni*, qui est *le lieu* des sommets D de tous les angles égaux à BDC. De même, sur BA, le segment pqA capable de BDA: le point D sera à l'intersection des deux circonf. Quand l'une de ces circonf. passe à la fois par les trois points ABC, selon que l'autre est ou n'est pas dans le même cas, le problème est indéterminé ou absurde.

VII. Construire un triangle ABC (fig. 68) dont on connaît la base AB, l'angle opposé C et le rayon OF du cercle inscrit? Puisque OA et OB divisent en deux parties égales les angles A et B du triangle cherché ABC, dans le triangle AOB, l'angle O, supplément de $OAF + OBF$, ou de $\frac{1}{2}(A + B)$, est $O = 2D - \frac{1}{2}(A + B)$; et comme $A + B = 2D - C$, on a $O = D + \frac{1}{2}C$. L'angle O étant connu, on déterminera le point O (probl. V), puis traçant le cercle EDF, qui touche AB en F, les tangentes AE, BD achèveront le triangle cherché.

VIII. Étant donnés un triangle $A'B'C'$ (fig. 78) et deux circonf. concentriques AO, CO, construire un triangle ABC qui ait deux sommets A et B sur la grande circonf., et l'autre C sur la petite, et qui soit équiangle avec le proposé $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$.

L'angle A ayant pour mesure $\frac{1}{2}BD$, si de A', comme centre, et du rayon AO on décrit l'arc HI, il sera moitié de BD. On prendra donc en un lieu quelconque l'arc $BD = 2.HI$; les côtés AB et AC passeront par B et D. De plus, l'angle BCD étant supplément de C', on aura le lieu du sommet C, en décrivant sur la corde BD un segment $BCcD$ capable de cet angle $2D - C'$; la droite DCA donnera le point A, et le triangle cherché ABC.

Le point c donne le triangle aBc, autre solution du problème; outre qu'on peut attribuer à la corde BD une infinité de situations, ce qui donne autant de solutions doubles.

213. *L'angle* BAC, *dont le sommet* A *est en un lieu quelconque du plan* (fig. 79 et 80), *a pour mesure la moitié de la somme ou de la différence des arcs* BC, DE, *compris entre les côtés, selon que le sommet* A *est au dedans ou au dehors de la circonférence.*

Menez EF parallèle à DC. 1° Si A est situé dans la circonférence (fig. 79), la mesure de l'angle $E = BAC$ est

$$\tfrac{1}{2}BF = \tfrac{1}{2}(BC + CF) = \tfrac{1}{2}(BC + DE).$$

2° Si A est situé hors du cercle (fig. 80), la mesure de l'angle $A = BEF$ est $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}(CB - CF) = \frac{1}{2}(CB - ED)$.

Ainsi, la mesure de l'angle A est $\frac{1}{2}(a \pm b)$, en faisant $a = BC$, $b = DE$. Cette formule est même générale, car $b = 0$ répond au cas où le sommet est sur la circonf., et $b = a$ à celui où il est au centre.

Lignes proportionnelles. Triangles semblables.

214. Soient deux droites quelconques AH, ah (fig. 81); si sur l'une on prend des parties égales AB, BC, CD...., et que par les points de division, on mène des parallèles Aa, Bb, Cc.... Hh, dans une direction arbitraire, les parties ab, bc, cd.... qu'elles interceptent sur ah, sont égales entre elles. Car si l'on mène ai, bl, cm, ... parallèles à AH, on aura des triangles aib, blc, cmd.... égaux entre eux, à cause de $ai = bl = cm.... = AB = BC = ...$

Il suit de là que AB sera contenu dans AH autant de fois que ab dans ah, etc., d'où, $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$; $AE : EH :: ae : eh$.

215. *Deux droites* AH *et* ah (fig. 82) *sont coupées en parties proportionnelles par trois parallèles quelconques* Aa, Ee, Hh, savoir, $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$; car,

1° Si les parties AE, EH sont commensurables, en portant la commune mesure sur AH, elle sera contenue un nombre exact de fois dans AE et EH : on retombera donc dans le cas ci-dessus, parce que les parallèles à Aa, menées par les points de division, couperont ah en parties égales.

2° Si AE et HE sont incommensurables, divisons AE en un nombre arbitraire de parties égales, et portons l'une d'elles de E vers H; soit I le point de division le plus près de H; menons Ii parallèle à Hh. Cela posé, AE et EI étant commensurables, on a $\frac{EI}{EA} = \frac{ei}{ea}$: et comme $EI = EH - HI$; $ei = eh - hi$, il vient $\frac{EH}{EA} - \frac{HI}{EA} = \frac{eh}{ea} - \frac{hi}{ea}$. Or, les distances HI et hi peuvent être rendues aussi petites qu'on voudra, en prenant le nombre de divisions de AE de plus en plus grand, les autres termes étant constants : de sorte que les points H et h sont les limites de I et i. Puisque les 2es termes des deux membres décroissent indéfiniment, le principe fondamental (n° 113) donne donc encore $\frac{EH}{EA} = \frac{eh}{ea}$.

De la proportion démontrée, on tire (n° 73)

$$\frac{AE}{AH} = \frac{ae}{ah}, \quad \text{d'où } \frac{AH}{ah} = \frac{AE}{ae} = \frac{EH}{eh}.$$

216. *Une parallèle* EB *à la base d'un triangle* HAC (fig. 82) *coupe les côtés en parties proportionnelles*, puisque $AB = ae$, $BC = eh$; d'où

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AB}{AC} = \frac{EH}{BC}.$$

On peut répéter sur le triangle HAC ce qu'on a dit sur la fig. 81.

Réciproquement, si l'on a $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BC}$, EB est parallèle à HC; car si cela n'était pas, menant HL parallèle à EB, on aurait $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BL}$; donc $BL = BC$.

217. Il suit de là que, 1° lorsqu'on a trois lignes m, n, p (fig. 82), pour *trouver une quatrième proportionnelle*, c'est-à-dire une ligne x, telle qu'on ait $\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$, on fera un angle quelconque HAC, on prendra sur ses côtés $AE = m$, $AB = n$, $AH = p$; puis menant

EB et sa parallèle HC, AC sera la quatrième proportionnelle cherchée x.

2° *Les lignes quelconques* AB, AC, AD, AE, AF, ... (fig. 83) *partant d'un même point* A, *sont coupées en parties proportionnelles par les parallèles* BF, bf; car en n'ayant égard qu'à AB et AC, on a $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac}$; de même $\frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad}$, à cause des droites AC et AD, etc. Réunissant ces proportions qui ont rapport commun, il vient

$$\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae} = \frac{AF}{Af} \ldots.$$

3° *Pour diviser une droite donnée* AF (fig. 84) *en plusieurs parties égales*, par ex., en cinq, on mènera une ligne quelconque indéfinie aF, sur laquelle on portera cinq fois l'ouverture de compas arbitraire $Fe = ed = dc = \ldots$, puis menant Aa et les parallèles Bb, Cc, Dd, Ee, on aura $AB = BC = CD = \ldots$

4° *Pour partager une ligne donnée* a'F (fig. 85) *en parties proportionnelles à celles d'une autre droite donnée* af, on tirera la ligne quelconque AF, sur laquelle on portera $FE = fe$, $ED = ed$, $DC = dc \ldots$; puis menant Aa' et les parallèles $Bb' \ldots$, on aura les points de division cherchés e', d', $c' \ldots$.

Si fa est l'une des dimensions d'une figure, et qu'on veuille que cette dimension devienne Fa', il faudra changer les parties fe, $fd \ldots$ en Fe', $Fd' \ldots$. L'échelle d'un plan étant, par ex., fa, elle est devenue Fa'. C'est à cette construction que se rapporte l'*art de réduire un plan* à une échelle donnée.

218. Deux triangles ABC, $A'B'C'$ (fig. 86) dont les angles sont respectivement égaux, sont nommés *Semblables* ou *Équiangles* : les côtés de même dénomination sont appelés *Homologues*. Soient $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$; AB est homologue de $A'B'$, BC de $B'C'$, AC de $A'C'$. *Les côtés homologues se distinguent en ce qu'ils sont opposés aux angles égaux.*

Deux triangles semblables ont les côtés homologues proportionnels. En effet, plaçons le triangle $A'B'C'$ sur ABC, de sorte que le côté $A'C'$ tombe sur son homologue AC de A en E; $A'B'$ tombera sur AB de A en D, à cause de $A = A'$. Mais l'angle $AED = C' = C$; donc DE est parallèle à BC, et l'on a $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$: de plus, $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$,

en menant EF parallèle à AB; et comme $BF = DE = B'C$, on a enfin

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Réciproquement, deux triangles qui ont les côtés homologues proportionnels, sont semblables. En effet, si $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, prenons $AD = A'B'$, et menons DE parallèle à BC, nous avons $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$; et à cause que $AD = A'B'$, le 1er rapport est commun aux deux proportions; les autres rapports sont donc égaux, savoir $A'C' = AE$, $B'C' = DE$. Les triangles ADE, $A'B'C'$ sont égaux, et par conséquent ABC, $A'B'C'$ sont équiangles.

219. *Deux triangles* ABC, A'B'C' (fig. 86) *qui ont un angle égal* A = A', *compris entre des côtés proportionnels* $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$, *sont semblables.* Car en appliquant $A'C'$ de A en E, $A'B'$ tombera en AD, et $A'B'C'$ en ADE. Or, par hypothèse, on a $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$; donc, DE est parallèle à BC (n° 216), et les triangles ABC et ADE ou $A'B'C'$ sont équiangles.

220. Donc (fig. 86), 1° *deux triangles dont les côtés sont respectivement parallèles sont semblables.* Cela est évident pour ABC et $A'B'C'$ (n° 192, 3°); quant à ABC et CIH, en prolongeant les côtés vers A' et B', puis menant $A'B'$ parallèle à HI ou AB, on a $I = A'$, $H = B'$ comme alternes-internes. Ainsi, $C'IH$ étant équiangle à $A'B'C'$, l'est à ABC. *Les côtés parallèles sont homologues.*

2° *Deux triangles* ABC, A'B'C' (fig. 87), *dont les côtés respectifs sont perpendiculaires, sont semblables;* car prolongeons les côtés $A'C'$, $B'C'$ jusqu'à leur rencontre en F et E avec AC, les angles C et E sont compléments, ainsi que C' et E, à cause des triangles rectangles ECG, $EC'F$: donc $C = C'$. On prouve de même que $A = A'$, $B = B'$. *Les côtés perpendiculaires sont homologues.*

3° *Les lignes* AB, AC, AD.... (fig. 88) *partant d'un même point* A, *coupent en parties proportionnelles deux parallèles quelconques* BF, bf; car les triangles ABC, abc, semblables donnent

$\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$; de même, ACD, acd, donnent $\frac{AC}{Ac} = \frac{CD}{cd}$; ainsi l'on a $\frac{CD}{cd} = \frac{BC}{bc}$. On a de même $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$....

4° Si les lignes Aa, Ee, Hh (fig. 82) sont des parallèles équidistantes, E, e, sont les milieux de AH et ah, et réciproquement. De plus, Ee est la moitié de $(Aa + Hh)$, puisqu'en menant AC parallèle à ah, la ligne $EB = \frac{1}{2}HC$, et $Be = Aa = Ch = \frac{1}{2}(Aa + Ch)$. Donc $Ee = \frac{1}{2}(Aa + Hh)$.

5° C'est sur ces principes qu'est fondée la construction des *Échelles.* Après avoir porté un nombre quelconque de parties égales sur une droite indéfinie CI (fig. 88), par ex., 5 de C en D, on élève par les points de division des perpend., puis on porte de même sur CA, 5 parties égales arbitraires Ca, ac....; par les points a, c, e...., on mène des parallèles indéfinies à CI; enfin, on tire les *Transversales* CB, 20 F, 15 G,.... Il suit de cette construction, que puisque Ca, Cc, Ce,.... sont $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$.... de CA; ab, cd, ef,.... sont de même $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$.... de AB; eo est $= ef + fo$ ou $(\frac{3}{5} + \frac{15}{5})$ de AB, ou enfin $\frac{18}{25}$ de CD.

On a donc ainsi partagé la ligne CD en 25es, ce qu'on n'aurait pu faire autrement d'une manière aussi distincte, vu la petitesse des parties. On peut se servir de cette échelle pour diviser une longueur en parties égales : on cherche combien cette longueur contient de parties de l'échelle, en portant une égale ouverture de compas sur une des parallèles indéfinies, et observant qu'elle réponde à des divisions à peu près exactes : si, par ex., elle tombe de L en o, la ligne contient 57 divisions. Pour couper Lo en 9, on calcule le 9e de 57, qui est 6, et l'on prend une longueur de six parties de l'échelle.

Cette échelle est surtout employée pour réduire les lignes d'un dessin dans un rapport donné : on a coutume de former CD et CA de dix parties, et de numéroter convenablement les transversales, afin d'en faciliter l'usage. C'est alors une *échelle de dixmes* (*voyez* fig. 89).

6° Voici un autre moyen remarquable de subdiviser une échelle en fractions très-petites. Si les longueurs égales AB, CD (fig. 90) sont partagées, l'une en 5, l'autre en 6 parties égales aux points 1, 2, 3.... et 11, 12...., la longueur $A11$, que nous désignerons par a, sera le 5e de AB, $a = \frac{1}{5}AB$, et $C1 = \frac{1}{6}AB$; d'où

$A11 - C1 = \frac{1}{5} AB - \frac{1}{6} AB = \frac{1}{30} AB$, ou $\frac{1}{6} a$. Donc, les règles étant appliquées C en A, D en B, le n° 11 dépassera le n° 1 de $\frac{1}{6} a$, 12 dépassera 2 de $\frac{2}{6} a$, 13 de $\frac{3}{6} a$ . . . .

D'après cela, si l'on a trouvé qu'une longueur portée sur l'échelle AB s'étend du point zéro jusqu'en i, elle contient 13 parties, plus la fraction $i13$, qu'il faut évaluer. On applique la règle CD (qu'on appelle *Vernier* ou *Nonius* du nom des inventeurs) en $C'D'$ le long de AB, de manière que C' réponde en i; examinant la suite des divisions, on en reconnaît deux qui coïncident, H et 5; ainsi la division 17 dépasse 4 de $\frac{1}{6} a$, 16 dépasse 3 de $\frac{2}{6} a$ . . . .; enfin 13 dépasse C' ou i de $\frac{5}{6} a = i13$; c'est la fraction cherchée, et $13\frac{5}{6}$ est la longueur proposée en parties de l'unité a.

On a soin de faire les divisions serrées, afin que les fractions soient plus petites, et qu'on soit assuré que deux divisions coïncideront toujours sensiblement. Si $n - 1$ parties de AB répondent à n divisions du vernier CD, celui-ci sert à évaluer le n^e d'une division de l'échelle, et si la coïncidence est établie à la graduation k^e du vernier, la fraction est $\frac{k}{n}$. L'entier est donné par le chiffre de la ligne AB, et la fraction par celui du vernier.

L'échelle de la fig. 91 a 9 de ses divisions coupées en 10 sur le vernier AB, qui donne les 10es : les divisions en coïncidence sont au n° 6 du nonius, et la longueur de o à A est 57,6.

Le même principe s'applique à la division des arcs de cercle, dans les instruments propres à mesurer les angles. Si l'on a divisé (p. 216) la circonférence en 360 parties égales ou *degrés*, et chaque degré en deux; qu'une alidade mobile autour du centre porte à son extrémité un vernier dont 30 parties interceptent 29 de ces demi-degrés; ces subdivisions du nonius dépasseront de $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$ . . . ., les demi-degrés, et donneront ainsi, à la seule inspection, des 60es de degrés ou des *minutes*. Si le zéro de l'alidade est d'abord placé (fig. 36) en a, au n° 0 du cercle, et si elle est dirigée à un objet A, l'instrument restant ainsi fixé dans le plan des points $A\,C\,B$; qu'on fasse glisser l'alidade sur le limbe pour la diriger à l'objet B, le zéro de l'alidade sera porté sur un point b du cercle, et l'arc ab qui mesure l'angle proposé ACB sera formé, par ex., de 53 degrés et d'une fraction que le vernier servira à faire estimer en minutes. Il suffira d'examiner quelle est la division du vernier qui coïncide avec une de celles du cercle, et de compter son rang à

partir de zéro. A cet effet, on grave les chiffres des divisions du vernier de 5 en 5; on lit ainsi les degrés sur le cercle et les minutes sur le vernier.

221. Soit un triangle ABC (fig. 92) rectangle en A; si l'on abaisse sur l'hypoténuse BC la perpend. AD, les deux triangles partiels ABD, ADC seront semblables entre eux et à ABC. Car l'angle B est commun aux triangles ABD et ABC; outre l'angle droit, en D pour l'un, et en A pour l'autre : il suit donc de là que l'angle C est égal à BAD, $C = \alpha$. De même, C est commun aux triangles ADC et ABC, outre l'angle droit; ainsi $\beta = B$. Les triangles ABD et ADC ont d'ailleurs les côtés perpend. En formant des proportions avec les côtés homologues, on trouve que,

1° *La perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse* BC. Car les triangles ABD et ADC donnent $\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC}$, d'où $AD^2 = BD \times DC$.

2° *Chaque côté* AB *de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière* BC *et le segment* BD *correspondant*. Car les triangles ABD, ABC donnent $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$, ou $AB^2 = BD \times BC$; ADC et ABC donnent $AC^2 = DC \times BC$.

3° *Le carré de l'hypoténuse* BC *est au carré d'un des côtés* BA *de l'angle droit, comme l'hypoténuse* BC *est au segment* BD *correspondant à ce côté*. Cela suit de l'équation $AB^2 = BD \times BC$, divisée par BC^2, puisqu'on a $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}$.

4° *Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés*. En effet, ajoutant les équations $AB^2 = BD \times BC$, $AC^2 = DC \times BC$, on trouve

$$AB^2 + AC^2 = BC\,(BD + DC) = BC^2.$$

Désignant par a, b, c les côtés opposés respectivement aux angles A, B, C, a étant l'hypoténuse, on a

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Cette proposition, la 47e d'Euclide, et la plus importante de toute la Géométrie, apprend à trouver la longueur de l'un des côtés de

tout triangle rectangle, connaissant les deux autres; on a, en effet,

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2)}, \text{ et } b = \sqrt{(a^2 - c^2)}.$$

Rapportant donc les côtés a, b, c à une unité, on en mesurera deux (n° 175), et l'on conclura par un calcul simple le nombre d'unités du troisième. Soit, par exemple, $b = 3$, $c = 4$, on trouve $a^2 = 9 + 16 = 25$, d'où $a = 5$.

La réciproque de cette proposition résulte des deux suivantes. On peut, au reste, démontrer directement que si $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (fig. 15), *le triangle* ADC *est rectangle :* car, menons DB perpend. sur CD, et prenons $DB = AD$; le triangle DCB est rectangle, et l'on a $CB^2 = DB^2 + DC^2$; ainsi, $CB^2 = AC^2$, et les deux triangles ACD, BCD sont égaux. Donc l'angle $ADC = CDB = 1$ droit.

222. *Le carré d'un côté de tout triangle quelconque est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ± le double du produit de la projection de l'un de ces deux côtés sur l'autre, multipliée par ce dernier côté.* On prend + quand le premier côté dont on cherche la valeur est opposé à un angle obtus, et — quand ce côté est opposé à un angle aigu.

En effet, si l'angle A (fig. 64) du triangle ABC est aigu, en abaissant la perpend. BD sur AC, on a deux triangles rectangles CBD, ABD qui donnent

$$BC^2 = BD^2 + DC^2, \quad BD^2 = AB^2 - AD^2;$$

d'ou $BC^2 = DC^2 + AB^2 - AD^2$, $a^2 = c^2 + DC^2 - x^2$,

en désignant par a, b, c les trois côtés BC, AC, AB du triangle, et faisant $AD = x$. Or, $DC = AC - AD = b - x$; en substituant, il vient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Si le triangle proposé a son angle A obtus, comme cela arrive à $A'BC$, tout se passe de même, si ce n'est que

$$DC = CA' + A'D = b + x, \text{ d'où}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Ici x désigne le segment adjacent à l'angle A qui est opposé au côté a dont on cherche la valeur.

223. Ainsi, lorsque les trois côtés d'un triangle sont donnés, il est bien aisé de juger de la nature de chacun de ses angles; on prendra les perpend. AB et AC (fig. 16) égales aux deux petits côtés

b et c, et l'on mènera BC; suivant que BC sera $<$, $>$ ou $= a$, l'angle opposé au grand côté a sera aigu, obtus ou droit : dans ce dernier cas, BAC serait le triangle même.

Si les côtés sont donnés en nombres, après en avoir fait les carrés a^2, b^2 et c^2, on comparera le plus grand à la somme des deux autres, et, suivant qu'il sera égal, plus petit ou plus grand que cette somme, l'angle opposé sera droit, aigu ou obtus. Le calcul peut même donner la longueur de la perpend. $BD = h$ (fig. 64). Car on tire de notre formule,

$$x = AD = \tfrac{1}{2} b - \frac{(a + c)(a - c)}{2b}.$$

x devient négatif, lorsque l'angle A auquel se rapporte le segment x est obtus, comme pour le triangle $A'BC$, pour lequel $a^2 > b^2 + c^2$. La fraction prend le signe + quand $a < c$, comme fig. 65.

Le second segment de la base est $CD = y = b - x$; enfin, la hauteur est *

$$h = BD = \sqrt{(c + x)\ (c - x)}.$$

Toutes ces formules se prêtent aux log. Soient, par exemple, $a = 150$, $b = 66$, $c = 110$; on voit que le triangle est possible (n° 206, 4°), car $150 < 110 + 66$, et $> 110 - 66$. De plus, $150^2 > 110^2 + 66^2$, donc l'angle A est obtus; on trouve

$$AD = x = 33 - 78{,}78\ldots = -45{,}7878\ldots \quad BD = h = 100{,}017.$$

224. *Si la ligne* AC (fig. 93) *divise en deux parties égales l'angle* A *au sommet du triangle* BAD, *les côtés* AB *et* AD *sont proportionnels aux segments* BC *et* CD *de la base.* En effet, en prolongeant DA en E, jusqu'à la rencontre de BE parallèle à AC, on a $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{BC}$: or, l'angle $BAC = ABE = DAC$, de plus $E = DAC$; donc $E = ABE$. Le triangle EAB étant isocèle, on a $AE = AB$; donc $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

225. *Les parties de deux cordes* BE, DC (fig. 94) *qui se coupent en* A, *forment des produits égaux* ** $BA \times AE = DA \times AC$. En

* On peut donc trouver la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés, puisqu'on a sa base b et sa hauteur h. Dans notre exemple numérique, cette aire est

$$= \tfrac{1}{2}\, 66 \times 100{,}017 = 3300{,}56.$$

** On énonce ordinairement ainsi ce théorème et celui du n° 228 : *Les cordes se cou-*