effet, menant BC et DE, nous avons les triangles BAC, DAE qui sont semblables à cause des angles (p. 233) inscrits au même arc, $E = C$, $B = D$. Comparant les côtés homologues, il vient $\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AE}$; d'où $BA \times AE = AD \times AC$.

226. La perpend. AD (fig. 95) au diamètre BE se nomme une *ordonnée*.

L'ordonnée AD est moyenne proportionnelle entre les segments, AB, AE *du diamètre;* car $AD = AC$ dans la proportion qui précède. D'ailleurs, ceci revient au n° 221, 1°, puisque (fig. 92) le triangle rectangle ABC est inscriptible au demi-cercle.

Si l'on veut donc *une ligne* x *moyenne proportionnelle entre deux lignes données* m *et* n (fig. 95), on prendra, sur une droite indéfinie, $AB = m$, $AE = n$; on élèvera une perpend. DC au point A, et sur le diamètre BE on tracera un cercle $BDEC$; AD sera x.

227. Il résulte aussi de la proposition (n° 221, 2°) que (fig. 92) *la corde* AB *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *et le segment* BD *correspondant*. On a donc (fig. 96) $BA^2 = BC \times BD$ et $BE^2 = BC \times BF$, d'où $\frac{BA^2}{BE^2} = \frac{BD}{BF}$: ainsi, *les carrés de deux cordes qui partent d'un même point de la circonférence sont entre eux comme les segments du diamètre qui passe par ce point.*

228. *Toute sécante* AE, AC (fig. 97) *multipliée par sa partie extérieure* AB, AD, *donne le même produit,* AB × AE = AD × AC : en menant les lignes DE, BC, on a les triangles semblables ABC, ADE; car outre l'angle commun A, ils ont $C = E$ (p. 233). Ainsi, on a $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, d'où $AB \times AE = AD \times AC$.

La tangente AB (fig. 98) *est moyenne proportionnelle entre une sécante quelconque* AC *et sa partie extérieure* AD. En effet, en menant BD, les triangles ABD, ABC sont semblables, car outre l'angle A commun, on a $C = ABD$ (n° 211, 4°); ainsi, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, ou $AB^2 = AD \times AC$.

pent en parties réciproquement proportionnelles; les sécantes sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures. Nous avons préféré les énonciations ci-dessus, comme comprises dans une phrase plus claire et plus facile à se présenter à l'esprit.

Ces théorèmes peuvent être renfermés en un seul; car, soient a et b les distances mesurées sur la droite AC (fig. 94, 97), d'un point A à la circonférence, ou $AD = a$, $AC = b$; soient de même a' et b' les parties analogues pour une autre ligne ABE, ou $AB = a'$, $AE = b'$; on a $ab = a'b'$, quel que soit l'angle sous lequel les lignes se coupent, et en quelque lieu que soit le point A. Si l'on fait tourner AE autour de A, les points d'intersection B et E changeront, et lorsque la ligne AB (fig. 97) sera tangente, B et E coïncideront; ainsi $a' = b'$, d'où $ab = a'^2$.

229. Voici plusieurs problèmes qu'on résout par ces divers principes :

I. *Mesurer la hauteur d'un édifice* AB (fig. 99). On plante verticalement un piquet ou *Jalon* DE; puis on dirige un rayon visuel DB au sommet B, et l'on marque le point C où il rencontre l'horizon; on a $\frac{CE}{DE} = \frac{CA}{AB}$; tout est ici connu, excepté le 4e terme AB, qu'on détermine par le calcul (n° 72, 2°).

On pratique cette opération plus commodément en se servant des longueurs AC et $C'E'$ de l'ombre que projettent les hauteurs AB, $D'E'$ sur l'horizon.

II. *Mener une tangente à deux cercles* (fig. 100). Soit $AD'D$ cette tangente; joignons les centres par la ligne $AC'C$, et menons les rayons CD, $C'D'$; nous avons $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD}$. Mais pour une sécante AI, en mettant CI et $C'I'$ au lieu de CD et $C'D'$, on aura $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'I'}{CI}$; donc CI est parallèle à $C'I'$.

On mènera donc deux rayons parallèles quelconques CI, $C'I'$; la droite II' ira couper $C'C$ au point A, par lequel menant la tangente à l'un des cercles, elle le sera aussi à l'autre. Lorsque les cercles ne se coupent pas, il y a une seconde solution en A', ce qui fait quatre tangentes.

III. *Par deux points donnés* C et D (fig. 98), *tracer une circonférence qui touche la droite donnée* AB? Cette droite ne passe pas entre C et D, puisqu'elle couperait la corde CD : en joignant C et D par une droite prolongée en A jusqu'à la rencontre avec AB, AD et AC sont connus, et il s'agit de trouver AB, car il ne restera plus qu'à faire passer un cercle par trois points donnés B, C, D (n° 198). Or, AB est tangente et AC sécante (n° 229), d'où $AB^2 = AC \times AD$:

on trouvera aisément (n° 226) la moyenne proportionnelle entre AC et AD.

Le problème a deux solutions, attendu qu'on peut porter la longueur AB en sens opposé; *voy.* n° 329, III, et la fig. 197, où A et B sont les points donnés et DD' la tangente.

Si la tangente était donnée parallèle à la corde, comme fig. 54, où A, B sont les points donnés, et TG la tang., le centre serait visiblement sur FF' perpend. au milieu de la corde AB, et le pied F serait le point de contact. Il faudrait ensuite tracer le cercle qui passe par A, B et F.

IV. *Décrire un cercle* CAB *qui passe par un point donné* m (fig. 101), *et touche deux droites données* DA, BD. On a vu (n° 210, 1) que le centre de ce cercle est sur CD coupant par moitié l'angle ADB. D'ailleurs, la corde im perpend. sur CD est coupée en o par le milieu : ainsi on mènera cette perpend. sur CD, on prendra $om = oi$, et il restera à faire passer un cercle par i et m, qui touche DB ou DA.

Si le point donné est en A sur l'une des droites, le centre est à la rencontre C de DC avec AC perpend. à DA.

On sait donc tracer un cercle qui passe par trois points, ou par deux points et touche une droite, ou par un point et touche deux droites, ou enfin un cercle qui touche trois droites données (n° 210, 1).

V. *Tracer un cercle* BiA (fig. 101) *tangent à deux droites* DA, DB, *et à un cercle* Km *donné*. Le centre C est sur CD, qui coupe en deux parties égales l'angle BDA : de ce centre inconnu C traçons un cercle HKG passant par le centre donné K; que ce centre K soit transporté en un point quelconque de HKG, le cercle CAm doit être tangent à ce cercle mobile. Considérons celui-ci dans sa position HA, où il touche DA; la tangente LH à l'arc HK est perpendiculaire au rayon CH, et par conséquent parallèle à DA. Donc la droite LH est connue, puisqu'elle est parallèle à DA, et distante de DA de la quantité donnée $Km = HA$. Il faut en dire autant de $L'H'$ parallèle à DB. Ainsi le cercle $HKGH'$ sera facile à décrire, puisqu'il est tangent aux droites tracées LH, $L'H'$, et passe en K; ce cercle KG a le même centre C que celui qu'on cherche; il ne reste donc qu'à mener CK, et Cm sera le rayon demandé.

Comme les parallèles LH, $L'H'$ peuvent être menées dans l'angle D, le problème comporte deux solutions, pourvu que la circonf. Km ne coupe DA, ni DB.

On trouve, dans le 2e *Supplément à la Géom. descript.* de M. Hachette, un grand nombre de problèmes de ce genre.

VI. Trouver un point C (fig. 117) sur la circonférence ABD, tel que les cordes BC, CD, menées à deux points donnés A et D de cette courbe, soient entre elles dans un rapport donné $= \frac{m}{n}$. En supposant le problème résolu, la ligne CO qui coupe en parties égales l'angle BCD (n° 224), donne $\frac{BC}{CD} = \frac{BO}{OD} = \frac{m}{n}$; on prendra donc le milieu A de l'arc DAB, et l'on partagera en O la corde DB dans le rapport donné ; la droite AO prolongée donnera le point C.

VII. Étant données la corde $AB = k$, et la hauteur $DE = h$ d'un segment $ABDE$ de cercle (fig. 52), trouver, par le calcul, le rayon $DC = r$? Le triangle rectangle ADE donne $AD^2 = \frac{1}{4}k^2 + h^2$; mais on tire du n° 227, $AD^2 = 2hr$; ainsi, en égalant ces deux valeurs, on trouve $r = \frac{1}{2}h + \frac{k^2}{8h}$. On a coutume de donner le nom de *flèche* du segment à sa hauteur DE.

Si $k = 313$ et $h = 12{,}32$, on trouve $r = 1000$. Cette formule peut servir à faire retrouver le centre C d'un arc tracé.

VIII. Par le point B (fig. 102) d'intersection de deux cercles, mener une corde CD, qui ait une longueur donnée M. Supposons le problème résolu; menons par le point B une ligne quelconque EF, et joignons A avec E, C, F et D; les triangles AEF, ACD ont l'angle $E = C$, comme appuyé sur le même arc BIA; de même, $F = D$: ainsi, $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$, et AC est une quatrième proportionnelle à EF, M et AE; on prendra donc $FL = M$; on mènera LK parallèle à AF, AK sera $= AC$: il ne s'agira plus que de décrire du centre A, avec ce rayon AK, un cercle qui donnera, par son intersection, le point C ou C' : on a ainsi les deux solutions du problème, qui serait absurde si l'arc décrit avec le rayon AK était entièrement au dehors du cercle AE.

IX. Proposons-nous de couper une ligne CA (fig. 103) en deux parties telles, que la plus grande BC soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie AB et la ligne entière AC; c'est ce qu'on appelle *couper la ligne* AC *en moyenne et extrême raison*. La proportion $AB : BC :: BC : AC$ ne peut faire connaître BC, parce qu'elle contient une 2e inconnue AB; mais augmentant chaque antécédent

de son conséquent (n° 73, 1°), comme $AC = AB + BC$, on a $AC : BC :: BC + AC : AC$ ou $AC^2 = BC\,(BC + AC)$; il s'agit donc de déterminer sur AC un point B tel, que AC soit moyen proportionnel entre BC et $BC + AC$; c'est ce qui aura lieu si l'on construit un cercle dont AC soit la tangente, $BC + AC$ la sécante entière, et BC la partie extérieure (par conséquent AC la partie interceptée dans le cercle). Élevons en A la perpendiculaire $AD = \frac{1}{2} AC$, menons l'hypoténuse DC; nous avons

$$AC^2 = CE \times CF = CE \times (CE + CA);$$

donc CE est la longueur inconnue qu'on doit porter de C en B; B sera le point demandé *.

X. *Inscrire un triangle* def *dans un autre* ABC (fig. 105), c'est-à-dire le placer comme DEF, de sorte que d tombe en D sur le côté AC, etc. En supposant le problème résolu, et traçant par les points EFB une circonférence, ainsi que par ADF, on voit que le segment FOE est capable de l'angle donné B, et le segment FOD capable de l'angle A (n° 212, IV). Décrivons donc sur fe et fd des segments capables de B et A. La base AB est donnée, et forme une double corde dans les deux cercles. Si donc, d'après le problème VIII, on décrit en f la corde $ab = AB$, il ne restera plus qu'à mener les lignes ad, be prolongées en c, et l'on aura le triangle $abc = ABC$; par conséquent on connaîtra les points D, E, F, puisque $BE = be$, etc. Comme on peut mener la corde ab de deux manières, le problème a deux solutions.

Des Polygones.

230. On nomme *Polygone* toute figure $ABCDEF$ (fig. 106) terminée par des droites. Le *Quadrilatère* a 4 côtés, le *Pentagone* 5,

* On peut encore opérer comme il suit (fig. 104). On a trouvé

$$AC^2 = BC^2 + AC \times BC = BC \times (BC + AC) = BC \times BD,$$

en prolongeant la ligne AC de $CD = CA$. E étant le milieu de DC, on a $BC = BE - EC$, $BD = BE + EC$; le produit change notre équation en $AC^2 = BE^2 - EC^2$; ainsi AC, BE, EC sont les trois côtés d'un triangle rectangle EFC. On mènera donc CF égal et perpendiculaire à AC; tirant l'hypoténuse EF et la portant de E en B, on aura le point B. Cette construction s'applique avec élégance au théorème n° 240.

l'*Hexagone* 6, l'*Octogone* 8, le *Décagone* 10, le *Dodécagone* 12, le *Pentadécagone* 15, etc. Le nombre des angles est le même que celui des côtés; car tant que le polygone n'est pas fermé, chaque côté qu'on trace fait un angle de plus, et la figure reçoit un côté de plus qu'elle n'a d'angles; enfin le côté qui ferme le polygone fait deux angles.

Une *Diagonale* est une ligne AD (fig. 118) qui traverse le polygone d'un angle à l'autre. La diagonale AC sépare le triangle ABC du polygone $ABCD\ldots$ de n côtés, et réduit la figure à $ACDEF$ de $n - 1$ côtés. Chaque diagonale menée de A sépare de même un nouveau triangle, et réduit le polygone à avoir un côté de moins; enfin, lorsqu'on n'a plus qu'un quadrilatère $ADEF$, la seule diagonale AE le partage en deux triangles. Ainsi, il y avait d'abord autant de diagonales que de triangles et de côtés supprimés; mais pour la figure de 4 côtés, une seule diagonale donne 2 triangles; donc *le nombre de diagonales qu'on peut mener d'un même angle* A *à tous les autres est* n — 3; *celui des triangles est* n — 2.

Tous les angles de l'hexagone $ABCD\ldots$ sont *Saillants*; l'angle A (fig. 107) est *Rentrant* (n° 172).

231. Pour construire un polygone dont toutes les parties soient données, après avoir pris sur une droite indéfinie (fig. 106), une longueur AB égale à l'un des côtés, on formera en A et B deux angles BAF, ABC égaux à ceux qu'on sait devoir être adjacents à AB; puis on prendra sur BC et AF les longueurs données, et ainsi de suite.

Après avoir ainsi tracé les côtés FA, AB, BC, CD et DE, le côté FE, destiné à fermer l'hexagone, est déterminé, ainsi que les angles E et F. Si donc n désigne le nombre des angles d'un polygone, $2n$ sera celui des parties qui le composent, $2n - 3$ est celui des quantités qu'il suffit de connaître pour pouvoir le construire. Il y a donc des relations qui lient entre elles ces $2n$ parties, de sorte qu'on puisse déterminer 2 côtés et un angle, d'après la connaissance des autres parties. Ce problème de *Polygonométrie* ne peut maintenant être résolu; mais il est facile d'assigner la relation qui existe entre les angles.

232. Si n est le nombre de côtés et D l'angle droit, *la somme des angles intérieurs est* 2D (n — 2), *ou* 2 *fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés moins deux*. Car menons d'un point quelconque intérieur O (fig. 106), les lignes OA, OB, $OC\ldots$; elles formeront

autant de triangles OAB, OBC.... qu'il y a de côtés. La somme de tous les angles est donc deux droits, répétés autant de fois qu'il y a de côtés, ou $2nD$. Mais la somme des angles en O vaut quatre droits : donc on a $2nD - 4D$. C'est aussi ce qui résulte de ce que ces angles sont la somme de ceux des $(n - 2)$ triangles en lesquels le polygone est décomposé par ses diagonales (fig. 118).

233. Les quatre angles d'un quadrilatère valent donc quatre droits. Si cette figure a deux de ses côtés parallèles Aa, Hh (fig.81), on la nomme *Trapèze;* c'est un *Parallélogramme* (fig. 108), si les quatre côtés sont parallèles deux à deux. On sait d'ailleurs (n° 193), que la diagonale BD partage tout parallélogramme en deux triangles égaux ABD, BCD; que les angles opposés sont égaux, $A = C$, $B = D$; que les côtés opposés sont égaux. Réciproquement, si $AB = DC$ et $AD = BC$, la figure $ABCD$ est un parallélogramme. Les diagonales AC, BD se coupent mutuellement en deux parties égales; cela résulte de l'égalité des triangles AOD et BOC.

Le *Rhombe* ou *Lozange* est un parallélogramme (fig. 109) dont les quatre côtés sont égaux. Il est visible que les diagonales AC et BD sont à angle droit, parce que les quatre triangles AOD, AOB, DOC et BOC sont égaux. Réciproquement, si $AO = OC$ et $DO = OB$, la figure $ABCD$ est un parallélogramme, qui devient même un rhombe, lorsque AC et BD sont à angle droit.

Enfin, si le parallélogramme $ABCD$ (fig. 110) a l'un de ses angles A droit, l'angle opposé C, qui lui est égal, sera aussi droit; il en est de même des autres B et D, puisque réunis ils valent deux droits, et qu'ils sont égaux; la figure a donc ses quatre angles droits. C'est pour cela qu'on nomme *Rectangle* le parallélogramme qui a ses angles droits. Les diagonales AC, BD sont égales.

Si $AB = AD$, le rectangle s'appelle *Carré;* le carré a donc les quatre côtés égaux et les quatre angles droits.

234. *La somme des angles extérieurs* GAB, HBC... (fig. 111), *formés en prolongeant dans un même sens les côtés d'un polygone, vaut toujours quatre angles droits.* En effet, les angles extérieurs sont suppléments des intérieurs adjacents : mais l'angle AOB est supplément des angles $OAB + OBA$; de même, BOC l'est de $OBC + OCB$, etc; donc la somme des angles en O, ou quatre droits, est la somme des suppléments des angles ABC, BCD... du polygone. *C. q. f. d.*

235. Les polygones qui ont les côtés égaux et les angles égaux sont appelés *Réguliers*. Un cercle qui touche tous les côtés d'un polygone est appelé *Inscrit;* le cercle est *Circonscrit* quand il passe par les sommets de tous les angles.

On peut toujours inscrire et circonscrire un cercle à un polygone régulier ABCDEF (fig. 112). 1° En effet, divisons les angles A et B en deux parties égales, par les lignes AO et BO, et du point O de concours menons OC. Le triangle $ABO = BOC$, car $AB = BC$; le côté OB est commun, et l'angle ABC a été divisé en deux parties égales : donc $OA = OC = OB$. On prouvera de même que $OB = OD = OC$, etc.

On voit donc que le point O est le centre du cercle circonscrit au polygone; que les lignes menées de ce centre aux angles sont égales; qu'elles divisent ces angles en deux parties égales; qu'elles forment des triangles isocèles AOB, BOC... Enfin que les angles *au centre* AOB, BOC..... sont égaux entre eux.

2° Les cordes AB, BC.... étant à la même distance du centre O, les perpendiculaires OG, OI... sont égales (n° 208); si donc on décrit du centre O avec le rayon OG une circonférence, elle touchera tous les côtés du polygone en leur milieu G, I....

236. Nous savons donc circonscrire et inscrire des circonférences à un polygone régulier donné. Le problème inverse consiste à inscrire ou circonscrire un polygone régulier d'un nombre de côtés déterminé à une circonférence donnée : or, il s'en faut de beaucoup qu'on sache résoudre ce problème en général. Nous allons exposer les cas dans lesquels on peut en trouver la solution.

Avant, nous remarquerons que, lorsqu'un polygone est inscrit, il est aisé d'en circonscrire un d'un même nombre de côtés, et réciproquement. En effet, soit ABC.... (fig. 113), un polygone régulier inscrit donné; aux points A, B, C.... menons les tangentes af, ab, bc..., leur système formera le polygone circonscrit demandé; car, les triangles aAB, bBC.... sont égaux et isocèles, parce que leurs bases AB, BC.... sont égales, et que leurs angles adjacents ont la même mesure (n° 211, 4°) : donc $aB = Bb = bC = Cc$..., l'angle $a = b = c$....

On pourrait aussi (fig. 112) mener des tangentes par les milieux g, i, k... des arcs AgB, BiC, CkD...; $abcdef$ formerait le polygone demandé : car les côtés étant parallèles à ceux du polygone inscrit, les angles sont égaux (n° 192, 3°) : de plus, l'angle GOI est

divisé en deux parties égales par OB, puisque B est le milieu de l'arc gi. D'un autre côté, le triangle $gOb = bOi$, et Ob coupe le même angle gOi en deux parties égales : ainsi les trois points O, B, b sont en ligne droite. Il en est de même de O, C et c, de O, D et d... On a donc,

$$\frac{AB}{ab} = \frac{OB}{Ob}, \quad \frac{BC}{bc} = \frac{OB}{Ob};$$

d'où $ab = bc$, puisque $AB = BC$. Et ainsi des autres côtés.

Cette double construction serait assez pénible : il est préférable de mener une seule de ces tangentes ab (fig. 112), de la conduire jusqu'aux rayons OA, OB prolongés, puis de décrire du rayon Oa une circonférence, sur laquelle on porte ab autant de fois qu'il y a de côtés.

Réciproquement, si le polygone circonscrit $abcdef$ est donné, on mènera du centre O les lignes aO, bO..., puis par les points A, B..., où elles coupent la circonférence, on décrira les cordes AB, BC...., et le polygone régulier sera inscrit.

237. Puisque la somme des angles au centre est $4D$, chacun vaut $\frac{4D}{n}$ lorsque le polygone est régulier, n désignant le nombre de côtés du polygone.

L'angle au centre du triangle équilatéral est donc $\frac{4}{3}D$,

Celui du carré est D, du pentagone régulier $\frac{4}{5}D$,

De l'hexagone $\frac{2}{3}D$, du décagone $\frac{2}{5}D$, etc...

La somme des angles à la circonférence (n° 232) est $2D(n-2)$; chacun vaut donc $\frac{2D(n-2)}{n}$. Ainsi l'angle du carré est droit; celui du pentagone régulier est $\frac{6}{5}D$, de l'hexagone $\frac{4}{3}D$, du décagone $\frac{8}{5}D$....

Chaque côté AB, BC... sous-tend un arc $= \frac{C}{n}$, C désignant la circonférence.

238. *Le côté* FE *de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon* OF (fig. 114) : car l'angle FOE est le 6e de quatre droits, ou $O = \frac{2}{3}D$; les angles égaux E et F du triangle isocèle OFE valent ensemble $2D - \frac{2}{3}D$ ou $\frac{4}{3}D$: chacun vaut donc $\frac{2}{3}D$, et le triangle OFE a ses trois angles égaux; d'où $FE = OF$.

Si l'on joint les angles de deux en deux, on aura le triangle BDF équilatéral inscrit : comme $EO = EF =$ le rayon R, $ODEF$ est

un rhombe, les diagonales sont à angle droit (n° 233), et $IO = EI = \frac{1}{2}R$; ainsi (n° 221, 4°),

$$FI = \sqrt{(FO^2 - IO^2)} = \sqrt{(R^2 - \tfrac{1}{4}R^2)} = R\sqrt{\tfrac{3}{4}};$$

d'où $FD = R\sqrt{3}$. C'est *le côté du triangle équilatéral inscrit.*

En divisant en 2, 4, 8... parties égales les arcs AB, BC..., on aura les polygones inscrits de 12, 24, 48... 3×2^i côtés.

239. Puisque (n° 237) l'angle au centre du carré (fig. 110) est droit, pour inscrire un carré dans un cercle $ABCD$, on mènera deux diamètres perpendiculaires AC, BD, et l'on joindra leurs extrémités. On voit, en effet, que la figure $ABDC$ a les quatre angles droits et les côtés égaux. On a

$$AD^2 = DO^2 + AO^2 = 2R^2; \text{ d'où } AD = R\sqrt{2}.$$

Puisque $\frac{AD}{R} = \sqrt{2}$ on voit que *la diagonale du carré est incommensurable avec son côté* (n° 63).

On sait donc inscrire les polygones de 4, 8, 16....2^i côtés.

240. Soit AB (fig. 115) le côté du décagone régulier inscrit, l'angle O au centre est $\frac{2}{5}D$ (n° 237); les angles égaux OAB, OBA réunis valent $2D - \frac{2}{5}D$ ou $\frac{8}{5}D$; donc chacun vaut $\frac{4}{5}D$, c'est-à-dire est double de O. Pour trouver le rapport de AB au rayon AO, divisons l'angle B en deux parties égales par la droite CB; l'angle $ABC = O = CBO$, indique que le triangle OBC est isocèle, d'où $OC = CB$. Mais le triangle ACB l'est aussi, à cause de $C = \frac{4}{5}D = A$; ainsi $CB = AB = OC$. Or, on a (n° 224) $\frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OB}$, ou $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}$, ou le côté AB moyen proportionnel entre AC et AO; d'ailleurs, CO ou $AB < AO$ donne aussi $AC < AB$: donc (n° 229, IX),

En divisant le rayon en moyenne et extrême raison, la plus grande partie sera le côté du décagone régulier inscrit.

$AB = BF$ donne AF pour le côté du pentagone régulier inscrit. On pourra aussi inscrire les polygones réguliers de 20, 40....5×2^i côtés. Et comme les côtés de l'hexagone et du décagone sous-tendent des arcs qui sont le 6e et le 10e de la circonférence C, la différence de ces arcs, ou $\frac{1}{6}C - \frac{1}{10}C = \frac{1}{15}C$, est sous-tendu par le côté du polygone régulier de 15 côtés, et de là ceux de 30, 60.... 15×2^i côtés.

Tels sont les polygones réguliers qu'on sait inscrire, et qu'on

peut comprendre dans la formule $a \times 2^i$, a étant l'un des quatre nombres 3, 4, 5 et 15, et $i = 0$, ou un nombre entier et positif quelconque. Quant aux autres polygones, on se contente, faute de mieux, de diviser, en tâtonnant, la circonférence en un nombre convenable de parties égales. On résout aussi le problème à l'aide du compas de proportion et du rapporteur ; mais comme ces instruments sont eux-mêmes construits par tâtonnement, on ne peut regarder ces procédés comme géométriques. La division de la circonférence en parties égales est surtout importante pour faire les instruments propres à la mesure des angles (*voy.* la *Géométrie du Compas*, par *Mascheroni*). Comme la *trisection de l'angle* compléterait cette opération (n° 212, III), on s'est longtemps, mais en vain, efforcé de trouver la solution de cette question. Elle est maintenant démontrée impossible par le secours de la règle et du compas seuls (n° 464, I).

241. Nous terminerons par l'exposition de quelques propriétés des quadrilatères inscriptibles au cercle.

I. On a, dans le quadrilatère $ABCO$ (fig. 116), $A + C = 2$ droits, puisque les angles A et C embrassent la circonférence entière (n° 211) ; de même, $B + O = 2$ droits. Ainsi, *dans tout quadrilatère inscriptible au cercle, les angles opposés sont supplémentaires.*

Réciproquement, si $A + C = B + O = 2$ droits, le quadrilatère $ABCO$ est inscriptible au cercle, puisque si la circonférence passant par AOC, ne passait pas en B, l'angle B' ne serait pas le supplément de O (n° 213).

Donc, *on peut toujours circonscrire un cercle à tout rectangle* $ABCD$ (fig. 110) ; les diagonales BD, AC sont les diamètres.

II. *Dans tout quadrilatère inscrit* ABCD (fig. 117), *le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.* Car, menons CK qui fasse l'angle $KCD = BCO$; d'où $BCK = OCD$, en ajoutant OCK aux deux membres : or, l'angle $BAC = BDC$ (n° 211) ; ainsi les triangles BAC et KCD sont semblables. De même, l'angle $CBK = CAD$, et le triangle CBK est semblable à CAD. Donc on a

$$\frac{KD}{CD} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{BK}{BC} = \frac{AD}{AC},$$

d'où $KD \times AC = AB \times CD$, $BK \times AC = AD \times BC$: ajoutant ces équ., il vient enfin $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

III. Si des points A et B (fig. 108), on abaisse sur la base DC du parallélogramme $ABCD$ les perpendiculaires AE, BF, les triangles ADC, BDC donneront (n° 222)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DE,$$
$$BD^2 = BC^2 + DC^2 + 2DC \times CF.$$

En ajoutant ces équ., comme $DE = CF$ et $AB = DC$, on a

$$BD^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 + AB^2.$$

Ainsi, *dans tout parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.* La proposition est d'ailleurs évidente pour un rectangle (n° 221, 4°).

Des Figures semblables et de la Circonférence.

242. On dit que *deux polygones* (fig. 118) *ABCDEF, abcdef sont semblables, lorsqu'ils sont formés des triangles* T *et* t, T′ *et* t′, T″ *et* t″ . . . . , *respectivement semblables et disposés dans le même ordre.*

Sur une droite donnée ab, homologue à AB, il est aisé de décrire un polygone $abcd$. . . . semblable à $ABCD$. . . . On fera d'abord t semblable à T, ce qui ne présente aucune difficulté (n° 218) ; puis t' semblable à T', sur ac homologue à AC, etc.

Les polygones semblables ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels. Car les triangles semblables T et t ont l'angle $B = b$, ainsi que l'angle $BCA = bca$; de plus (n° 218), $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$. De même, T' et t' ont l'angle $ACD = acd$; d'où l'on voit que l'angle $BCD = bcd$: en outre, $\frac{AC}{ac} = \frac{DC}{dc} = \frac{BC}{bc}$. On prouverait de même, à l'aide de T'' et t'', que l'angle $CDE = cde$, et que $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$, etc.

Réciproquement, si les polygones ont les angles respectivement égaux, et si de plus $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} =$ etc., *les polygones sont*