semblables; car B=b, et les côtés qui comprennent ces angles sont proportionnels, par hypothèse; d'où il suit (n° 219) que T et t sont semblables, et de plus, $\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}$, et l'angle BCA=bca. Retranchant ces angles de BCD=bcd, il reste l'angle ACD=acd; et comme on suppose que $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$, on a $\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}$, à cause du rapport commun, $\frac{BC}{bc}$; ce qui prouve que T' est semblable à t'; et ainsi de suite.

1° Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont des figures semblables, puisque leurs angles sont respectivement égaux, ainsi que leurs côtés (n° 235).

 2° Si après avoir conduit les diagonales des angles \mathcal{A} et a (fig. 119), on a des triangles semblables chacun à chacun, les angles sont égaux, et les côtés homologues proportionnels : donc, si l'on mène les diagonales d'un autre angle tel que E, e, les nouveaux triangles composants seront aussi semblables.

3º Donc, deux diagonales homologues quelconques BE, be (fig. 119) sont proportionnelles à deux côtés quelconques CD, cd, savoir, $\frac{BE}{be} = \frac{CD}{cd}$.

4° Soient deux polygones semblables ABC....abc (fig. 119): si l'on prend deux côtés homologues quelconques ED et ed, et si, de leurs extrémités, on mène les diagonales à tous les autres angles, on formera des triangles respectivement semblables, EDF à edf, EDA à eda, EBD à ebd, etc...; car les angles des polygones sont égaux, et les diagonales homologues sont proportionnelles aux côtés.

5° Lever un plan n'est autre chose que construire des polygones semblables à ceux que forment, sur le terrain, les droites qui joignent des points dont la situation respective est connue. Pour cela, on mesure sur le terrain un nombre suffisant de parties; puis on décrit ensuite, sur le papier (n° 218....), d'autres triangles semblables à ceux qui composent les polygones dont il s'agit.

243. Si, dans deux polygones semblables (fig. 119), on mène deux droites Gh, gh, placées semblablement, c'est-à-dire coupant les côtés BC, bc en parties proportionnelles, ainsi que Fe et fe, les longueurs GH, gh seront dans les rapports des côtés, ou $\frac{GH}{gh} = \frac{BC}{bc}$, et

feront des angles ègaux avec ces côtés. En effet, soit pris sur BC et be des points H et h, tels qu'on ait $\frac{HC}{hc} = \frac{CB}{cb} = \frac{CE}{ce}$, et menons HE, he. Les triangles HCE, hce seront semblables (n°219), puisque, l'angle HCE = hce. Il s'ensuit que l'angle EHC = ehc et

$$\frac{EH}{eh} = \frac{HC}{hc} = \frac{BC}{bc}.$$

Maintenant, en considérant les polygones semblables ABHEF, abhef, si les points G et g coupent les côtés FE et fe proportion-nellement, la ligne GH jouira de la même propriété que HE. Donc, etc.

244. D'un point quelconque O (fig. 120), pris dans l'intérieur du polygone ABC...., menons des lignes OA, OB.... aux sommets ABC....; prenons sur ces lignes des longueurs qui leur soient proportionnelles, ou telles qu'on ait $\frac{OA}{oa} = \frac{OB}{ob} = \frac{OC}{oc}...$ Les triangles OAB, Oab seront semblables, et AB parallèle à ab. En raisonnant de même pour OBC, Obc, etc., on verra que les polygones ABC, ... abc,... ont les côtés parallèles et proportionnels, et par conséquent sont semblables.

De même, sur les lignes Ob, Oa, si l'on prend des parties OK, Ok proportionnelles aux côtés ae, AE; puis OF, of proportionnelles à ab, AB, etc., les polygones KFG, ... kfg, ... seront semblables, comme formés de triangles OKI, Oki, OKF, okf, ... respectivement semblables.

245. Les périmètres de polygones semblables sont comme leurs lignes homologues; car (fig. 118) on a $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \cdots$, et le théorème (n° 73, 3°) donne

$$\frac{AB + BC + CD + \dots}{ab + bc + cd + \dots} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \dots$$

En appliquant ceci aux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, on a $\frac{ABCD...}{abcd...} = \frac{AB}{ab} = \frac{OB}{ob} = \frac{OI}{Oi}$ (fig. 121), parce que les triangles OBI, Obi sont semblables, comme ayant les angles au centre égaux (n° 235); ainsi, les périmètres des polygones mathém. Pures, T. I.

réguliers semblables sont entre eux comme les rayons des cercles inscrits et circonscrits.

246. La circonférence est la limite des polygones réguliers inscrits et circonscrits (n° 113). Chaque côté AB (fig. 122) d'un polygone régulier étant plus court que l'arc ACB qu'il sous-tend, on voit que la circonférence rectifiée est plus longue que le périmètre de tout polygone inscrit. De plus, prenant C au mílieu de l'arc BCA, on a la corde AB < AC + CB, ce qui fait voir qu'en doublant le nombre des côtés d'un polygone inscrit, le périmètre approche de plus en plus de la circonférence, sans cesser d'être plus petit qu'elle.

D'un autre côté, l'arc CAL < CE + EL (n° 172) fait voir que le périmètre de tout polygone circonscrit est plus grand que la circonférence; la tangente AK est le demi-côté du polygone circonscrit d'un nombre double de côtés (n° 236); et comme KA, perpendiculaire à AO, est < l'oblique KE, on a AK + KC < EC: en doublant le nombre des côtés d'un polygone circonscrit, le périmètre approche donc davantage de la longueur de la circonférence sans cesser d'être plus grand qu'elle.

P et p étant les périmètres de polygones réguliers semblables, l'un circonscrit, l'autre inscrit, et R et r les rayons OC, OI des cercles inscrits, on a $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$, et $P - p = \frac{P}{R}(R - r)$ (n°73, 1°). Or, P diminue en s'approchant de la circonférence $LCB \ldots$, R est constant, et R - r ou CI décroît indéfiniment lorsqu'on double successivement les nombres de côtés de polygones P et p (n° 209); ce qui prouve que la différence P - p entre leurs périmètres approche autant qu'on veut de zéro, c'est-à-dire que ces périmètres approchent indéfiniment de la circonférence, qui est toujours comprise entre eux, et qui ne leur est jamais rigoureusement égale : donc, etc.

247. Les circonférences sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres. En effet (fig. 121), désignons par C et c les circonférences dont les rayons sont BO = R, bO = r; par P et p deux polygones réguliers inscrits ABC....abc... semblables, enfin par Z et z la différence entre chaque périmètre et la circonférence circonscrite, ou C - P = Z, c - p = z. On en tire

$$\frac{P}{p}$$
 ou $\frac{R}{r} = \frac{C-Z}{c-z}$, d'où $\frac{C}{R} - \frac{Z}{R} = \frac{c}{r} - \frac{z}{r}$;

or, R, C, ret e restent constants, Z et z varient avec le nombre des côtés, et peuvent devenir aussi petits qu'on voudra; donc (nº 113)

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$$
, ou $\frac{C}{c} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r}$.

248. Trouver une ligne droite égale à une circonférence d'un rayon donné, c'est-à-dire rectifier cette courbe. Concevons deux circonférences C, c de rayons R, r: nous avons $\frac{C}{2R} = \frac{e}{2r}$; chaque circonférence contient donc son diamètre le même nombre de fois, que nous désignons par π . Si l'on connaissait ce quotient constant π , on aurait donc

circonférence
$$R = 2\pi R$$
.

Pour déterminer le rapport constant π de toute circonférence à son diamètre, il faut trouver la longueur rectifiée d'une circonférence quelconque, ainsi que celle de son diamètre; puis diviser la première par la seconde; le quotient sera le nombre π . Pour cela, prenons un polygone régulier quelconque dont nous connaissions le périmètre, et les rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit; puis concevons un autre poygone régulier isopérimètre, c'est-à-dire, d'un contour égal; et calculons les rayons r' et R' des cercles inscrit et circonscrit à ce dernier.

BE = a (fig. 123) est un côté de ce polygone, HD un diamètre perpendiculaire, C le centre du cercle BDE; CA = r, CB = R sont les rayons donnés des circonf. inscrite et circonscrite. Menons DB, DE, puis la perpendiculaire CG tombant au milieu G de la corde DE; et par le point G, IG parallèle à BE; IG sera moitié de BE (n° 218). Comme l'angle EDB est moitié de ECB, EDB sera l'angle au centre, et GI le côté du polygone régulier d'un nombre double de côtés; DF = r', DG = R' seront les rayons de cercles inscrit et circonscrit à ce dernier. Or on a

$$DF = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}(DC + CA)$$
, ou $r' = \frac{1}{2}(R + r)$;

dans le triangle rectangle CGD, $DG^2 = DC \times DF$ (n° 221, 2°), ou $R'^2 = Rr'$; ainsi r' et R' sont donnés par les équations

$$r' = \frac{1}{3}(R + r), R' = V(Rr').$$

Répétant ce calcul sur le polygone IG, on trouvera de même les rayons r'' et R'' des polygones réguliers isopérimètres d'un nombre double de côtés du précédent; puis les rayons r''', R''', etc.; on aura ainsi une série de résultats.

$$r, R, r', R', r'', R'', r''', R''' \dots,$$

dont chaque r est la moyenne arithmétique, et chaque R la moyenne géometrique entre les deux termes précédents. Tels sont les rayons des cercles inscrits et circonscrits à cette suite de polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés continuellement doublé.

Mais F étant au milieu de AD, AF ou DF > AC, r' > r; puis l'hypoténuse DC > DG, ou R' < R: ainsi r, r', r''.... croissent, et R, R', R''.... décroissent continuellement. Ces quantités tendent sans cesse vers l'égalité à mesure que les côtés deviennent plus nombreux; car $BC^2 - CA^2 = BA^2$, ou $R^2 - r^2 = \frac{1}{4}a^2$, donne

$$R-r=\frac{a^2}{4(R+r)}=\frac{a^2}{8r'},$$

et a décroît autant qu'on veut, tandis que r'augmente. On voit donc que si l'on superpose tous ces polygones en faisant coıncider leurs centres C, D, \ldots les circonf. inscrites s'en ecartent, et les circonscrites s'en rapprochent de plus en plus. Elles finissent par ne laisser entre elles qu'un espace aussi petit qu'on veut, dans lequel se trouve tracé le polygone régulier. Que l'on ait poussé le calcul des ret R jusqu'à 10 chiffres décimaux, par exemple, et l'on trouvera enfin deux rayons dont ces dix chiffres seront les mêmes : la distance du polygone à ses deux circonf. sera nulle dans cet ordre d'approximation, et l'on pourra prendre le périmètre de ce polygone pour longueur de ces circonf.

Soit donc a le côté du premier polygone de n côtés; na sera son contour, et celui de chacun des autres polygones : et si x est le rayon des cercles inscrit et circonscrit dans l'ordre de décimales conservées au calcul, ou celui de la circonférence définitive = na, on aura

$$na = 2\pi x, \ \pi = \frac{na}{2x}.$$

Par exemple, le côté de l'hexagone inscrit a = 1, le périmètre

= 6; R = 1, $r = V (OB^2 - IB^2)$ (fig. 122), ou $r = \frac{1}{3}V$ 3: on en tire successivement les résultats suivants:

r = 0,86602	5404	0,95356	5731	0,95490	8353
R=1		0,95561	1769	0,95494	0511
r'=0,93301	2702	0,95458	8750	0,95492	4332
R'=0,96592	5826	0,95510	0122	0,95493	2322
r'' = 0,94946	9264	0,95484	4436	0,95492	8327
R'' = 0,95766	2197	0,95497	2270	0,95493	0325 *

Dès qu'on arrive à deux rayons successifs égaux x, ce nombre est le rayon de la circonférence isopérimètre qui est $=6=2\pi x$; or $x=0,95492\,9662$; ainsi $\pi=3,14159\,2654$. On peut obtenir ainsi π avec telle approximation qu'on veut. Au reste, nous exposerons des procédés plus expéditifs. On obtient

$$\pi = 5,14159$$
 26555 89795 25846 26455 85279, $\log \pi = 0,49714$ 98726 94155 85455 12682 88291.

Si dans l'équ. circ. $R = 2\pi R$, on fait $R = \frac{\pi}{2}$, et = 1, il vient circ. = π , et $\frac{\pi}{2}$ circ. = π : donc le rapport constant π de toute circonférence à son diamètre exprime aussi la circonf. dont le diamètre est un, et la demi-circonf. qui a un pour rayon.

* Le calcul des rayons R est facile par \log ; mais on l'abrége encore par le procédé suivant. Soit R = r' + d, d étant la différ. des deux rayons entre lesquels on veut une moyenne géométrique. $R'^2 = \bigvee (r'^2 + r' d)$; on a $(n^0$ 135) en extrayant la racine

$$R' = r' + \frac{1}{2}d - \frac{d^2}{8r'}$$
, etc. $= r' \sqrt{(1 + \frac{d}{r'})}$.

Ces formules abrégent les opérations : mais on remarque que si d n'a au plus que la moitié des chiffres de r', en considérant ces nombres comme entiers, d^2 est $< 8\,r'$ parce que d^2 n'a plus que la même quantité de chiffres que r'. Pour avoir une valeur de R' approchée à moins de $\frac{1}{2}$, on peut donc se contenter de $R' = r' + \frac{1}{2}\,d$, qui est moyenne arithmétique entre R et r'. Ainsi dès qu'on est arrivé à deux valeurs consécutives de R et r', dont la moitié à gauche de leurs chiffres est une partie commune, on n'a plus a prendre que des moyennes arithmétiques. C'est ce qui arrive ci-dessus au nombre marqué (*) et à tous les suivants. Alors il n'est plus nécessaire de calculer ces moyennes successives; car soit m un de ces nombres et m+d le suivant, leur moyenne est $m+\frac{1}{2}\,\partial^2=m+\frac{2}{3}\,\partial^2-\frac{1}{6}\,\partial^2$; et continuant de prendre les moyennes, on trouve

$$m + \frac{2}{3} \delta^3 + \frac{1}{12} \delta^3$$
, $m + \frac{2}{3} \delta^3 - \frac{1}{24} \delta^3$, $m + \frac{2}{3} \delta^3 + \frac{1}{48} \delta^4$,...

nombres dont la limite est $m + \frac{2}{3} \sigma$: telle est la valeur définitive des quantités r et R lorsqu'elles sont devenues égales.

Si on limite la valeur à $\pi=3$, 142... on trouve qu'on peut poser $\pi=\frac{2^2}{7}=3\frac{1}{7}$. Ge résultat très-simple, dû à Archimède, est adopté dans les arts. Adrien Métius, en prenant 3, 141593, a trouvé $\pi=\frac{3.55}{11.3}$, nombre remarquable en ce que les termes sont formés des trois premiers impairs, répétés 2 fois, 113, 355. Ce résultat ayant 6 décimales exactes, ne produit pas une erreur d'un centimètre sur une circ. de 18000 mètres de rayon (1 ligne sur 4000 toises de rayon).

Voici une rectification graphique approchée de la circonf. On a prouvé (n^{os} 238, 239) que le côté du carré inscrit est RV 2; que celui du triangle équilatéral est RV 3: la somme est R(V2+V3) ou $R \times 3,14627...$, égale, à un demi-centième près, à la demi-circonf. rectifiée. Ainsi, après avoir inscrit au cercle proposé, par les procédés connus, un carré et un triangle équilatéral, on ajoutera le côté de l'un au côté de l'autre, et l'on aura, à très-peu près, une droite égale à la demi-circonférence.

Lorsque la circonférence C est donnée, et qu'on demande son diamètre D, de $C = \pi D$, on tire

$$D = \frac{1}{\pi}C = kCk = \frac{1}{\pi} = 0.31831..., \log k = \overline{1}.50285013.$$

$$z = \frac{\pi R \alpha}{180} = \frac{2\pi R}{n} = kR\alpha$$
, et en faisant $\log k = \overline{2}.24187737$.

CHAPITRE II.

DES SURFACES.

Aires des Polygones et du Cercle.

249. Une Aire est l'étendue comprise entre les lignes qui terminent une figure fermée. Les aires Équivalentes sont celles qui sont

d'égale étendue, sans qu'elles puissent coïncider par la superposition.

Deux rectangles AEFD, aefd (fig. 124) sont égaux lorsque leurs bases sont égales et que leurs hauteurs le sont aussi, ou AD = ad et AE = ae: on voit en effet qu'on peut faire coïncider l'une de ces figures avec l'autre. Mais si l'on compare le parallélogramme ABCD au rectangle AEFD, on les trouvers simplement équivalents, parce que le triangle AEB = DFC.

Les parallélogrammes ABCD, abcd, qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont équivalents, puisqu'ils équivalent aux rectangles égaux ADFE, adfe.

Soit un triangle ABC (fig. 125); menons CD et BD parallèles à AB et AC; les deux triangles ACB, BCD sont égaux : ainsi, tout triangle est la moitié d'un parallèlogramme de même base et de même hauteur. De sorte que tous les triangles ACB, AEB, AFB...., qui ont même base AB et leurs sommets sur CF parallèle à AB, sont égaux.

250. Comparons maintenant deux parallélogrammes quelconques.

1º Les rectangles de même base sont comme les hauteurs. En effet, si les deux rectangles ABCD = R, abcd = r (fig. 126) ont les bases AB et ab égales, et que les hauteurs AD = H et ad = h soient commensurables, il y aura une longueur ax contenue m fois dans H et n fois dans h, et l'on aura (nº 156) $\frac{H}{h} = \frac{m}{n}$. En menant par les points de division $x, x', y, y' \dots$ des parallèles aux bases, les rectangles R et r seront partagés, l'un en m, l'autre en n rectangles égaux, et l'on aura

$$\frac{R}{r} = \frac{m}{n}$$
, d'où $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$.

Si les hauteurs sont incommensurables, partageons de même AD en parties égales Ax', x'y'..., et portons l'une sur ad en xa, xy...; soit i le point de division le plus voisin de d: en menant il parallèle à dc, $\frac{al}{R} = \frac{ai}{H}$, à cause de la commensurabilité, ou $\frac{r}{R} + \frac{dl}{R} = \frac{h}{H} + \frac{id}{H}$, donc on a $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$, puisque dl et id sont aussi petits qu'on veut, et que r, R, h, H sont constants (n° 113).