Si on limite la valeur à $\pi=3$, 142... on trouve qu'on peut poser $\pi=\frac{2^2}{7}=3\frac{1}{7}$. Ge résultat très-simple, dû à Archimède, est adopté dans les arts. Adrien Métius, en prenant 3, 141593, a trouvé $\pi=\frac{3.55}{11.3}$, nombre remarquable en ce que les termes sont formés des trois premiers impairs, répétés 2 fois, 113, 355. Ce résultat ayant 6 décimales exactes, ne produit pas une erreur d'un centimètre sur une circ. de 18000 mètres de rayon (1 ligne sur 4000 toises de rayon).

Voici une rectification graphique approchée de la circonf. On a prouvé (n^{os} 238, 239) que le côté du carré inscrit est RV 2; que celui du triangle équilatéral est RV 3: la somme est R(V2+V3) ou $R \times 3,14627...$, égale, à un demi-centième près, à la demi-circonf. rectifiée. Ainsi, après avoir inscrit au cercle proposé, par les procédés connus, un carré et un triangle équilatéral, on ajoutera le côté de l'un au côté de l'autre, et l'on aura, à très-peu près, une droite égale à la demi-circonférence.

Lorsque la circonférence C est donnée, et qu'on demande son diamètre D, de $C = \pi D$, on tire

$$D = \frac{1}{\pi}C = kCk = \frac{1}{\pi} = 0.31831..., \log k = \overline{1}.50285013.$$

L'are ACB (fig. 122) étant le n^{i2mc} de la circonférence, ou l'angle O le n^{i2mc} de 4 droits, α son nombre de degrés, on a la proportion 180° : αR : α : la longueur α de l'arc α CB; donc

$$z = \frac{\pi R \alpha}{180} = \frac{2\pi R}{n} = kR\alpha$$
, et en faisant $\log k = \overline{2}.24187737$.

CHAPITRE II.

DES SURFACES.

Aires des Polygones et du Cercle.

249. Une Aire est l'étendue comprise entre les lignes qui terminent une figure fermée. Les aires Équivalentes sont celles qui sont

d'égale étendue, sans qu'elles puissent coïncider par la superposition.

Deux rectangles AEFD, aefd (fig. 124) sont égaux lorsque leurs bases sont égales et que leurs hauteurs le sont aussi, ou AD = ad et AE = ae: on voit en effet qu'on peut faire coıncider l'une de ces figures avec l'autre. Mais si l'on compare le parallélogramme ABCD au rectangle AEFD, on les trouvers simplement équivalents, parce que le triangle AEB = DFC.

Les parallélogrammes ABCD, abcd, qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont équivalents, puisqu'ils équivalent aux rectangles égaux ADFE, adfe.

Soit un triangle ABC (fig. 125); menons CD et BD parallèles à AB et AC; les deux triangles ACB, BCD sont égaux : ainsi, tout triangle est la moitié d'un parallèlogramme de même base et de même hauteur. De sorte que tous les triangles ACB, AEB, AFB...., qui ont même base AB et leurs sommets sur CF parallèle à AB, sont égaux.

250. Comparons maintenant deux parallélogrammes quelconques.

1º Les rectangles de même base sont comme les hauteurs. En effet, si les deux rectangles ABCD = R, abcd = r (fig. 126) ont les bases AB et ab égales, et que les hauteurs AD = H et ad = h soient commensurables, il y aura une longueur ax contenue m fois dans H et n fois dans h, et l'on aura (nº 156) $\frac{H}{h} = \frac{m}{n}$. En menant par les points de division $x, x', y, y' \dots$ des parallèles aux bases, les rectangles R et r seront partagés, l'un en m, l'autre en n rectangles égaux, et l'on aura

$$\frac{R}{r} = \frac{m}{n}$$
, d'où $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$.

Si les hauteurs sont incommensurables, partageons de même AD en parties égales Ax', x'y'..., et portons l'une sur ad en xa, xy...; soit i le point de division le plus voisin de d: en menant il parallèle à dc, $\frac{al}{R} = \frac{ai}{H}$, à cause de la commensurabilité, ou $\frac{r}{R} + \frac{dl}{R} = \frac{h}{H} + \frac{id}{H}$, donc on a $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$, puisque dl et id sont aussi petits qu'on veut, et que r, R, h, H sont constants (n° 113).

2° Les rectangles sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs. Car (fig. 127) soient des rectangles AC, ac dont les bases sont AB = B, ab = b: portons l'une de ces figures sur l'autre, en faisant coïncider l'un de leurs angles droits, ce qui déterminera les rectangles AK = r, et AH = R', de même hauteur AI; R' ayant même base AB que le rectangle AC = R, et même hauteur AI que r, on a donc

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{h}, \frac{R'}{r} = \frac{B}{b}, \text{ d'où } \frac{R}{r} = \frac{BH}{bh}.$$

3° Les mêmes théorèmes ont également lieu pour les parallélogrammes, puisqu'ils sont équivalents aux rectangles de même base et de même hauteur. Donc les parallélogrammes sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.

251. Mesurer une aire, c'est chercher le nombre de fois qu'elle contient une autre aire donnée. Prenons pour unité de surface le rectangle abcd, pour mesurer le rectangle ABCD (fig. 128); puisque $\frac{R}{r} = \frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$, on portera la base ab sur AB, afin de savoir combien l'une est contenue dans l'autre : on en dira autant des hauteurs ad, AD; ensuite on multipliera ces nombres de fois ; puisque $3 \times 4 = 12$, R contient iei 12 fois r.

Comme les bases et les hauteurs pourraient ne pas se contenir exactement, on dit plus généralement que la mesure d'une aire ABCD (fig. 127) est son rapport avec une autre abcd prise pour unité (n^{os} 36, 71); cette mesure est le produit du rapport $\frac{B}{b}$ des bases par celui $\frac{H}{h}$ des hauteurs. Il en est de même de tout parallélogramme. D'où il résulte que si l représente le nombre abstrait $\frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$, l'aire du parallélogramme est l fois celui qui est l'unité de la surface.

Si l'on prend pour unité d'aire le carré abcd (fig. 128) dont le côté est l'unité linéaire, on a b=h=1, d'où R=BH. BH est le produit abstrait des nombres d'unités linéaires contenus dans B et H; soit encore ce produit BH=l, l'équ. revient à R=l fois le carré pris pour unité d'aire. Ainsi, l'aire d'un parallélogramme est le produit des nombres de fois que l'unité linéaire est contenue dans sa

base et dans sa hauteur, ce qu'on exprime d'une manière abrégée, quoique incorrecte, en disant que l'aire d'un parallélogramme est le produit de sa base par sa hauteur.

La mesure de l'aire ABCD (fig. 110) du rectangle qui a ses côtés égaux est $BC \times BC$; l'aire du carré est donc la seconde puissance de son côté. C'est pour cela que les mots carré et seconde puissance sont regardés comme synonymes.

252. Tout ce qui a été dit précédemment du produit des lignes évaluées en nombres, doit se dire aussi des rectangles qui ont leurs côtés pour facteurs. Par exemple, la proposition (n° 228) peut s'énoncer ainsi: Le carré construit sur la tangente est égal au rectangle qui a pour base la sécante entière, et pour hauteur sa partie extérieure; et ainsi des autres.

Le caractère essentiel des démonstrations géométriques est de réunir la rigueur du raisonnement à une clarté comparable à celle des axiomes. On ne doit jamais y perdre de vue les objets comparés : ainsi ces théorèmes n'ayant été obtenus que par des calculs fondés sur la théorie des lignes proportionnelles, nous donnerons ici une démonstration directe des trois propositions fondamentales, relatives au rapport des aires. Les autres en dérivent ensuite sans efforts, ainsi qu'on peut s'en convaincre en les reprenant tour à tour.

253. I. Construisons (fig. 129) sur la ligne AC = AB + BC les carrés AF et AI: il est visible que l'aire AI = AF + FI + EH + CF, ou = AF + FI + 2CF, parce que les rectangles EH et CF sont égaux. Comme AF est le carré de AB, FI celui de BC, on retrouve ainsi la proposition,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a et b étant des lignes, et a2, b2, ab des aires.

Pareillement, AF = AI + FI - 2EI, à cause de BD = BI - FI et de EI = BI: on retrouve donc aussi

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
.

254. II. Soit un triangle ABC (fig. 130) rectangle en A; décrivons des carrés BF, BG, AE sur ses trois côtés; puis menons les obliques AF, BE et la perpendiculaire AL sur l'hypoténuse BC. Les triangles ACF, BCE sont égaux; car leurs angles en C se composent de l'angle commun BCA plus d'un angle droit BCF ou ACE; d'ailleurs, les côtés adjacents sont BC = CF, AC = CE, côtés des

carrés. Mais ces triangles sont les moitiés des rectangles CD, AE, puisque les bases communes sont CF, EC, et que les sommets A et B sont sur les bases opposées DL, BA: donc rectangle CL = AE. On prouve de même que rectangle BL = BG, et ajoutant ces équations BF = AE + BG, ou $a^2 = b^2 + c^2$; c'est-à-dire que le quarré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit (comme n° 221, 4°).

Les rectangles CL et BF de même hanteur sont entre eux comme les bases DC et BC: ainsi $\frac{CL \text{ ou } CI}{BF} = \frac{CD}{BC}$; on a encore

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BD}{BC}$$
, et $\frac{AE}{BG} = \frac{CD}{BD}$.

Ces propositions reviennent à celles du nº 221, 2º et 3º.

III. Si le triangle ABC n'est pas rectangle (fig. 131), et que l'angle A soit aigu, faites la même construction que ci-dessus, et abaissez BK, CM perpend. sur les côtés opposés. Le même raisonnement prouvera que les triangles ACF, BCE sont égaux, ainsi que les rectangles CL, CK, dont les aires sont doubles de celles des triangles. Ainsi, rectangle CL = CK = AE - AK; rectangle BL = BM = BG - AM. Or, les triangles rectangles BAI, AOC sont semblables, à cause des deux côtés perpendiculaires qui comprennent un angle égal (n° 205, 8°); d'où AI:AO:AB:AC, et $AI \times AC = AO \times AB$, rectangle AK = AM. Ajoutant donc les rectangles CL et BL, il vient BF = AE + BG - 2AK, ou $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times AI$ (comme n° 222).

Si l'angle BAC est obtus (fig. 133), la même construction donne encore le triangle BCE = CAF, d'où rectang. CL = CK = AE + AK; on trouve de même BL = BG + AK; ajoutant, il vient

BF = AE + BG + 2AK, ou $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times AI$ (comme n° 222).

255. Le côté du carré équivalent à un parallélogramme est moyen proportionnel entre sa base et sa hauteur. Car soient B la base, H la hauteur d'un parallélogramme, et x le côté du carré équivalent, on a $x^2 = BH$. D'après cela, pour carrer un parallélogramme, ou en avoir la quadrature (n° 251), portez-en la base et la hauteur (fig. 92), de B en C, et de B en D, sur une droite; puis, sur le diamètre BC, décrivez une demi-circonférence BAC qui coupera en A

la perpendiculaire DA menée en D sur BC: la corde BA sera le côté du carré cherché (n° 227). Si la figure donnée est le rectangle CL (fig. 130), en prenant BC = DL, on a le carré CI = rect. CL.

256. L'aire du triangle est la moitié du produit de sa base B par sa

hauteur H, ou = 1/2 HB, d'après ce qu'on a dit (nº 249).

1º Le carré équivalent à un triangle donné est $x^2 = \frac{1}{2}BH$; on a donc la quadrature d'un triangle, en cherchant une moyenne proportionnelle entre la hauteur et la moitié de la base, c'est-à-dire en prenant (fig. 130) BD égal à la moitié de la base, et BC à la hauteur, et achevant la construction comme ci-dessus; BG est équivalent au triangle proposé.

2º Les triangles ABF, BIC (fig. 134) qui ont même hauteur, sont

entre eux comme leurs bases AF, IC.

Pour couper par une ligne BF un triangle ABC en deux parties qui aient entre elles un rapport donné, il suffit de partager (n° 217, 4°) la base AC en deux segments AF, FC qui soient dans ce rapport, et de tirer BF.

257. Soit un polygone ABDE (fig. 135); menons AD et sa parallèle BC, qui rencontre en C le côté ED prolongé; enfin, tirons AC. Le triangle ABD peut être remplacé par ACD, qui lui est équivalent; ainsi l'hexagone ABDEFG est équivalent au pentagone ACEFG.

En appliquant de nouveau cette construction à ce pentagone, on le changera en un quadrilatère, puis en un triangle, et enfin, si l'on veut, en un carré. On sait donc réduire tout polygone à un trian-

gle, ou à un carré équivalent.

258. L'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en triangles, et cherchant l'aire de chacun. Si le polygone est régulier, comme ABCD.... (fig. 112), l'aire est égale au périmètre, multiplié par la moitié du rayon OG du cercle inscrit, qu'on nomme Apothème. Car n étant le nombre des côtés, on prendra n fois l'aire AOB d'un des triangles au centre, savoir,

$$n \times AB \times \frac{1}{2} OG = \text{périmètre} \times \frac{1}{2} OG.$$

259. L'aire du trapèze AHah (fig. 82) est le produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases parallèles, ou par la ligne menée à distance égale de chacune. En effet, menons AC parallèle à ah, puis Ee par les milieux de AH et ah; Ee sera parallèle à Hh (n° 220, 4°). Or, l'aire du parallélogramme ACha est le produit de

sa hauteur par Ch ou Be: celle du triangle AHC est le produit de cette même hauteur par $\frac{1}{2}HC$ ou EB; ainsi, l'aire AHah est le produit de la hauteur commune par Ee, ou par $hC + \frac{1}{2}HC$, ou enfin par $\frac{1}{2}(Aa + Hh)$ (voyez, pour l'aire du quadrilatère, n° 318, V; et 364, VI).

260. L'aire (fig. 112) du trapèze $ABba = \frac{1}{2} Gg \times (AB + ab)$. En multipliant AB et ab par le nombre des côtés des polygones réguliers $ABCD \dots$, $abcd \dots$, on obtient leurs périmètres P et p. Ainsi, la différence de leurs aires est $= \frac{1}{2} Gg (P + p)$. Comme Gg tend sans cesse vers zéro, lorsqu'on fait croître le nombre des côtés, et que $\frac{1}{2} (P + p)$ approche de plus en plus de la circonférence, cette différence peut être rendue aussi petite qu'on veut. Ainsi, l'aire du cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits et circonscrits (n° 113).

L'aire C d'un cercle de rayon R est le produit de la moitié du rayon par sa circonférence, ou du carré du rayon par le rapport π de la circonférence au diamètre. En effet, soient α l'excès de l'aire du polygone circonscrit sur celle du cercle, p la circonf., et β l'excès du périmètre du polygone sur la circonférence; l'aire de ce polygone, ou $C + \alpha$ est donc $(n^{\circ} 258) = \frac{1}{4} R \ (p + \beta)$. Comme les variables α et β décroissent indéfiniment *, on comparera les termes constants $(n^{\circ} 113)$, et l'on aura, à cause de $p = 2\pi R \ (n^{\circ} 248)$,

cercle
$$C = \frac{1}{2} pR = \text{circonf.} \times \frac{1}{2} R = \pi R^2$$
.

Soit D le diamètre, on a cercle $=\frac{1}{4}\pi D^2$, ou à peu près

$$=D\times \frac{7}{9}D.$$

Lorsque l'aire C du cercle est donnée, le rayon

$$R = \sqrt{\frac{C}{\pi}} = \sqrt{kC}, \ k = \frac{1}{\pi} = 0,31831, \log k = \overline{1.50285013}.$$

* Observons qu'on aurait été conduit au même résultat, si, raisonnant d'une manière analogue, mais inexacte, on eût négligé les termes α et β , qui doivent disparaître ensuite : c'est ce qui arrive dans la méthode des *infiniment petits*, où l'on considère la circonférence comme un polygone régulier d'une infinité de côtés; car alors C est l'aire de ce polygone, at p le périmètre, et l'on trouve $C = \frac{pR}{2}$. Ce procédé pourrait donc être regardé comme parfaitement rigoureux, si l'on s'assurait à priori que les termes ainsi négligés sont infiniment petits. Consultez, à ce sujet, les Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, par Carnot.

Un rectangle qui a pour base la demi-circonférence rectifiée, et pour hauteur le rayon, est égal au cercle; on a ainsi la solution approchée du fameux problème de la quadrature du cercle. Pour le résoudre rigoureusement, ce qui est à peu près inutile, il faudrait trouver la valeur exacte de π .

261. L'aire du secteur AOBI (fig. 136) est le produit de la moitié du rayon par l'arc AIB; en effet on a

$$\frac{AOBI}{AODI} = \frac{AIB}{AID}, \ AOBI = \frac{\text{cercle}}{\text{circonf.}} \times AIB, \ \text{ou} = \frac{1}{2} R \times AIB.$$

La longueur de l'arc AIB est connue (page 262): ainsi Secteur $=\frac{\pi R^2}{n}=\frac{\pi R^2\alpha}{360}=hR^2\alpha$, $\log h=\overline{3}.9408473$.

l'arc AIB étant le $n^{ième}$ de la circonférence, et α son nombre de degrés.

L'aire du segment ALBI est égale à celle du secteur, moins le triangle AOBL (n° 364, VII).

Aux arcs semblables et concentriques ABD, abd (fig. 168), circonscrivons des portions de polygones réguliers; le système de ces trapèzes formera une aire dont la limite sera ADBabd. Il est aisé d'en conclure que l'aire ABDabd, comprise entre deux arcs concentriques, est égale au produit de la distance Aa entre ces arcs, multipliée par la moitié de leur somme, ou par l'arc a'b'd' décrit à distance égale de l'un et de l'autre (n° 259).

On peut toujours évaluer, par approximation, une aire curviligne, en la considérant comme un polygone dont les côtés sont fort petits, et la décomposant en triangles ou en trapèzes. Par exemple, traçons dans l'aire aADd (fig. 162) les parallèles équidistantes Aa, iI, bB, kK...dD, que nous désignerons par p'p''..., $p^{(n)}$, et menons une perpend. quelconque a'd' sur Aa: l'aire sera ainsi coupée en trapèzes, dont les aires sont $\frac{1}{2}(p'+p'')k$, $\frac{1}{2}(p''+p''')k$..., k étant la distance de deux parallèles. La somme est $aADd = k (\frac{1}{2}p'+p''+p'''+p''')$, ainsi, l'aire curviligne est le produit de la distance k entre les parallèles, par leur somme diminuée de la moitié des deux extrêmes.

Comparaison des Surfaces.

262. Comparons les aires des polygones semblables.

I. Les aires de deux triangles semblables ABC, abc (fig. 137) sont

comme les carrés de leurs côtés homologues. Car la similitude donne $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$: mais les perpendiculaires BD et bd aux bases AC, ac, forment les triangles semblables ABD, abd, d'où $\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$: donc $\frac{AC}{ac} = \frac{BD}{bd}$ (ce qui est conforme au théorème 243). Multipliant les deux membres par $\frac{BD}{bd}$, on a

$$\frac{AC \times BD}{ac \times bd} = \frac{BD^2}{bd^2} = \frac{AB^2}{ab^2} = \dots$$

II. Les aires de deux polygones semblables ABCD, abcd, sont comme les carrés de leurs lignes homologues (fig. 118). Car la similitude des triangles ABC, abc (n° 242) donne la proportion $\frac{T}{t} = \frac{AB^2}{ab^2}$: on a de même $\frac{T'}{t'} = \frac{AC^2}{ac^2} = \frac{AB^2}{ab^2}$, etc.; réunissant ces rapports égaux, il vient

$$\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''} = \dots = \frac{AB^2}{ab^2},$$

d'où (n° 73, 3°)
$$\frac{T+T+T'+T''\cdots}{t+t'+t''\cdots} = \frac{AB^2}{ab^2} = \frac{ABCD\cdots}{abcd\cdots}$$

263. Concluons de là que, 1° si l'on construit trois polygones M, N et P (fig. 138) semblables, de figures quelconques, dont les côtés homologues soient ceux d'un triangle rectangle ABC, on aura

$$\frac{M}{AB^2} = \frac{N}{BC^2} = \frac{P}{AC^2}, \text{ d'où } \frac{M}{AB^2} = \frac{N+P}{BC^2+AC^2}.$$

or, $AB^2 = BC^2 + AC^2$; donc M = N + P. Cette proposition étend celle du carré de l'hypoténuse (n° 254) à tous les polygones semblables; de sorte qu'on peut aisément construire une figure égale à la différence des deux autres, ou à leur somme, ou à la somme de tant d'autres qu'on voudra, pourvu qu'elles soient toutes semblables.

2º Les aires des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont comme les carrés des rayons des cercles inscrits et circonscrits.

3º Les cercles C, c sont comme les carrés de leurs rayons R, r, ou

de leurs diamètres: car soient α et β les excès des aires des polygones circonscrits sur celles des cercles C, c; $C + \alpha$, $c + \beta$ seront les aires des polygones;

d'où
$$\frac{C+\alpha}{c+\beta} = \frac{R^2}{r^2}$$
; puis (n° 113) $\frac{C}{c} = \frac{R^2}{r^2}$.

Cela résulterait aussi de ce que $C = \pi R^2$, $c = \pi r^2$.

4° Le cercle qui a pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle est donc égal à la somme de ceux qui ont pour diamètres les côtés de l'angle droit; de sorte qu'il est facile de former un cercle égal à la somme ou la différence de tant de cercles qu'on voudra.

264. Deux triangles ABC, abc (fig. 137), qui ont un angle égal A = a, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle. En effet, les perpendiculaires BD, bd sur leurs bases donnent (n° 256) $\frac{ABC}{abc} = \frac{BD \times AC}{bd \times ac}$: or, les triangles semblables ABD, abd donnent $\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}$;

donc
$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB \times AC}{ab \times ac}.$$

On peut à l'aide de ce théorème, résoudre les questions suivantes:

I. Diviser un triangle ABC (fig. 134) en trois parties égales, par des droites FD, FE qui se joignent en un point donné F sur la base AC. Divisons la base en trois également aux points H et I; comme le triangle CBI est le tiers de CBA (n° 256, 2°), l'aire inconnue CDF = CBI. Or, on a,

$$\frac{CDF}{CBI} = \frac{CD \times CF}{CB \times CI}$$
:

donc
$$CD \times CF = CB \times CI$$
, ou $\frac{CD}{CB} = \frac{CI}{CF}$,

ce qui prouve (n° 216) que DI est parallèle à BF, et que, par conséquent, il faut mener BF, puis ses parallèles HE, DI, et enfin DF, FE.

II. La même construction sert à diviser l'aire ABC (fig. 189) en 4, 5, ... parties égales par des lignes FE, FE', FD', FD: il

faut couper la base AC en autant de parties égales. On sait donc diviser l'héritage triangulaire ABC, en parts égales, par des sentiers qui aboutissent à un puits commun F.

III. Décrire un triangle EIK qui soit équivalent à ABC (fig. 140), dont la base soit EI et le sommet situé en un point K de la ligne donnée NK.

Supposons d'abord que les deux triangles ABC, ADF soient équivalents : comme

$$\frac{ABC}{ADF} = \frac{AB \times AC}{AD \times AF},$$

 $AB \times AC = AD \times AF$, ou $\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}$:

ainsi, BF est parallèle à DC (n° 216). Donc si l'on veut construire un triangle EGH = ABC, dont le sommet E soit donné, la base GH étant dans la direction AH de celle du triangle donné, on mènera ED parallèle à AC, puis DC et sa parallèle BF, et l'on aura ADF = ABC: prenant ensuite dans la direction AC, GH = AF, le triangle GHE sera = ABC, et remplira la condition demandée. Observez que la même construction s'appliquerait encore au cas où, au lieu de donner le sommet E, on donnerait la base GH; on pourrait même donner aussi l'angle H: autant de problèmes différents qui sont résolus par le même procédé.

En prenant EG pour base, on pourra de même transformer le triangle EGH en un autre EIL équivalent, qui aurait son sommet en I; on aurait changé le triangle ABC en EIL, le côté EI et l'angle IEL étant donnés. Enfin LK, parallèle à EI, coupe la droite donnée NK au point K, et le triangle EIK = EIL = ABC résout le problème proposé. On pourrait déterminer le point K en se donnant la longueur IK, ou l'angle EKI (n° 212, IV), ou toute autre condition.

Des Plans et des Angles dièdres.

265. De la définition du Plan (nº 154), il suit que,

1º Le plan est une surface infinie en longueur et largeur.

2º Trois points, ou deux droites qui se coupent, sont toujours dans un même plan, et en déterminent la position. En effet, on peut visiblement concevoir une infinité de plans qui passent par l'une des droites, ou par la ligne qui joint deux des points donnés, puisqu'on peut faire tourner l'un de ces plans autour de cette ligne comme sur une charnière. Mais ce plan s'arrêtera dans son mouvement, si l'on fixe hors de la ligne un point par lequel il doit passer.

3º Un triangle est toujours dans un plan.

4º Deux parallèles déterminent un plan.

5º Deux plans ne peuvent, sans se confondre, avoir trois points communs en ligne droite: ainsi l'intersection de deux plans est une droite.

266. Faisons tourner l'angle droit PAB (fig. 141) autour de AB, jusqu'à ce que AP fasse, avec une troisième ligne AC, un angle droit PAC; on dit alors que AP est perpendiculaire au plan des deux droites AB, AC.

Si une droite AP est perpendiculaire à deux autres AB, AC, qui se croisent en A, elle l'est aussi à toute ligne AI tracée par ce point dans le plan BAC des deux dernières. En effet, évaluons l'angle PAI: pour cela, joignons les trois points P, C, B quelconques, mais tels néanmoins que AB = AC. Les lignes PB, PC seront egales, à cause du triangle PAC = PAB. Au milieu O de la base BC des triangles isocèles PBC, ABC, menons PO, AO, qui seront perpendiculaires sur cette base BC (n° 163, 2°); les triangles rectangles PCO, PAC, ACO donnent

$$PC^{2} = PO^{2} + CO^{2} = AP^{2} + AC^{2}, AC^{2} = CO^{2} + AO^{2},$$

éliminant AC^2 , il vient $PO^2 = AP^2 + AO^2$; ce qui prouve que le triangle APO est rectangle (p. 241).

Les triangles rectangles POI, APO, AOI donnent

$$PI^{2} = PO^{2} + OI^{2}, PO^{2} = AP^{2} + AO^{2}, OI^{2} = AI^{2} - AO^{2};$$

d'où $PI^2 = AI^2 + AP^2$; ainsi l'angle PAI est droit; PA est perpendiculaire à toute droite AI, tracée dans le plan MN.

On conclut de là, que, 1° les obliques PC, PB (fig. 141), qui s'écartent également de la perpendiculaire AP, sont égales, et réciproquement. Cela suit du triangle PAC = PAB.

Les pieds B, E, D, C des obliques égales PB, PE.... (fig. 142) étant sur une circonférence dont le centre est en A, on voit que, pour abaisser d'un point P hors d'un plan MN une perpendiculaire à

ce plan, on marquera trois points E, B, C sur ce plan, à égales distances de P; le centre A du cercle passant par ces trois points sera le pied de la perpendiculaire.

2º Si l'on fait tourner l'angle droit PAB (fig. 142) autour de son côté AP, l'autre côté AB décrira un plan perpendiculaire à AP; car menant en A le plan MN perpendiculaire à AP, s'il ne contenait pas la droite AB dans toutes ses positions; que l'une fût, par ex., AD hors de MN, le plan DAP qui couperait MN selon CA perpendiculaire à AP, donnerait, dans ce plan DAP, deux perpendiculaires CA, DA à AP.

3º Par un point C ou A (fig. 142), on peut toujours mener un plan MN perpendiculaire à une droite AP, et l'on n'en peut mener qu'un seul. Car, soit menée CA perpendiculaire sur AP; en faisant tourner l'angle droit PAC autour de AP, AC décrira le plan MN dont il s'agit.

 4° D'un point A ou P (fig. 142), on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire AP à un plan MN; elle est la plus courte distance du point P au plan : plus une oblique s'écarte de AP, plus elle est longue. Comme les obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire, on peut en effet ramener ces diverses lignes à être dans le même plan. Si l'on admet, par exemple, que AI > AC, on prendra AE = AC dans le plan PAI, et puisque PI > PE = PC, on en tire PI > PC.

5° Deux plans ME, mn (fig. 143) perpendiculaires à une même droite AP ne peuvent se rencontrer; car s'ils n'étaient pas parallèles, en joignant un point quelconque O de leur ligne d'intersection avec les pieds A et P, les lignes AO, PO seraient deux perpendiculaires abaissées d'un point O sur la même ligne AP, ce qui est absurde (n° 167, 6°).

6° Pour mener d'un point P (fig. 141) une ligne PO, perpendiculaire à une droite BC, située dans un plan quelconque MN, on mènera PA perpendiculaire sur ce plan MN; puis du pied A de celleci, on abaissera AO perpendiculaire sur BC; enfin, joignant les points O et P, PO sera la perpendiculaire demandée. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre sur BC, OB = OC, de mener AB et AC, puis de répéter la démonstration ci-dessus.

Remarquez que le plan PAO est perpendiculaire sur BC, ce qui donne aussi le moyen de mener, par un point donné P, un plan perpendiculaire à une droite BC.

267. Lorsque deux droites PA, QO (fig. 144) sont parallèles, le plan MN perpendiculaire à l'une PA, l'est aussi à l'autre QO; car, menant dans le plan MN, la droite AO et sa perpendiculaire BO; ici, comme fig. 141, BO est perpendiculaire au plan PAO, et par conséquent à QO, qui est dans ce plan PAO (n° 266). Mais en outre, à cause des parallèles PA, QO, l'angle PAO étant droit, QOA l'est aussi; en sorte que QO est perpendiculaire sur AO et BO, c'est-àdire, sur le plan AOB ou MN.

Réciproquement, deux droites AP, QO, perpendiculaires au même plan MN, sont parallèles entre elles; car, sans cela, on pourrait mener en A une parallèle à QO, autre que AP; cette parallèle serait, aussi bien que AP, perpendiculaire au plan MN, ce qui serait absurde (n° 266, 4°).

Donc, deux lignes Aa et Bb (fig. 145), parallèles à une troisième Cc, sont parallèles entre elles; car, en menant un plan perpendiculaire à Cc, il le serait aussi à ses parallèles Aa et Bb, en vertu de notre proposition: il suit de sa réciproque, que Aa est parallèle à Bb.

268. Les intersections KI, ki (fig. 143) de deux plans parallèles MN, mn par un même plan kKI sont parallèles; car d'une part elles sont dans un même plan, et de l'autre elles ne peuvent se rencontrer.

Donc, 1º la ligne AP, perpendiculaire au plan MN, l'est aussi à tout autre plan parallèle mn; car, en menant par AP un plan quelconque BCcb, les intersections BC, be étant parallèles, l'angle bPA est droit. Ainsi, AP est perpendiculaire à toute ligne be tracée par le point P dans le plan mn.

2º Les parallèles li, Kk, interceptées entre deux plans parallèles MN, mn, sont égales; car le plan IKhi de ces lignes donne les parallèles IK, ik; ainsi la figure Ik est un parallélogramme, d'où Ii = Kk.

Donc deux plans parallèles sont partout à égale distance l'un de l'autre.

269. Si la droite Cc (fig. 145) est parallèle à la ligne Aa, elle l'est aussi à tout plan AabB qui passe par Aa: puisque Co est entièrement comprise dans le plan Ac des deux parallèles, si Co pouvait rencontrer le plan Ab, ce ne serait que dans l'un des points de Aa, qui ne serait pas parallèle à Cc.

Étant données deux droites ab, Ce non parallèles, et qui ne se coupent pas, on peut toujours faire passer par l'une un plan paral-