ce qui prouve que ces derniers angles sont aussi dans le même plan, puisque, s'ils formaient un angle trièdre, on aurait (n° 279) $A'E'D' < A'E'B' + B'E'D'$. On voit que ce plan passe aussi par $B'C'D'$.

Il suit de là que, 1° deux polyèdres semblables sont décomposés en pyramides semblables par les plans qui passent suivant les diagonales menées de deux angles polyèdres homologues à tous les autres.

2° Si d'un point intérieur quelconque, on mène des lignes à tous les angles, et qu'on les prolonge proportionnellement à leur longueur, les plans menés par les extrémités de ces lignes seront parallèles aux faces du polyèdre proposé, et en formeront un autre qui lui sera semblable. On trouve ici l'analogue du théorème 244.

297. *Deux polyèdres semblables ont leurs faces semblables, leurs arêtes homologues proportionnelles, leurs angles dièdres égaux, ainsi que leurs angles polyèdres.* Pour s'en convaincre, il suffit de mener, de deux angles homologues (fig. 172), les diagonales qui décomposent les corps en pyramides semblables ; les angles polyèdres et dièdres de ces pyramides seront égaux, leurs faces seront semblables : or les faces des polyèdres servent de bases à ces pyramides, dont les angles dièdres et polyèdres constituent, par leur système, ceux des corps proposés.

Réciproquement, si deux polyèdres ont les faces semblables et disposées dans le même ordre ; et les angles dièdres égaux, ils sont semblables ; car les angles polyèdres sont égaux, comme décomposables en angles trièdres égaux (n° 281). Faisons donc coïncider l'un de ces angles polyèdres avec son homologue, les autres faces seront respectivement parallèles. De plus, la similitude des faces donne les lignes homologues proportionnelles ; leurs aires sont donc entre elles comme les carrés de ces lignes ; ce qui prouve que les diagonales de l'un des corps sont le prolongement de celles de l'autre (n° 278) : ces corps sont donc formés de pyramides semblables.

298. Des lignes qui joignent quatre angles polyèdres homologues $ABCD$, $abcd$ (fig. 172) de deux corps semblables étant proportionnelles, forment des tétraèdres semblables (n° 294). Il en résulte que si des angles ABC, abc de triangles homologues, on mène des lignes à tous les angles $DEF\ldots$, $def\ldots$ de deux polyèdres semblables, les tétraèdres ainsi formés seront semblables ; ceci est analogue au n° 242, 4°.

Réciproquement, deux polyèdres sont semblables, lorsque leurs angles étant joints aux trois angles homologues ABC, abc, les tétraèdres ainsi formés sont respectivement semblables. En effet, si les tétraèdres $DABC$, $dabc$ sont semblables, ainsi que $EABC$, $eabc$, les angles dièdres $DACB$, $EACB$ seront égaux à $dacb$, $eacb$: ainsi l'angle dièdre $DACE = dace$. D'ailleurs, les faces DAC, dac de nos tétraèdres sont semblables ainsi que EAC, eac : donc les tétraèdres $EACD$, $eacd$ sont semblables, et on a $\frac{DE}{de} = \frac{AC}{ac}$ (n° 294).

Soient F, f, I, i des angles homologues ; on aura de même $\frac{FE}{fe} = \frac{AC}{ac}$ et $\frac{DF}{df} = \frac{AC}{ac}$: ainsi, *les corps ont leurs lignes homologues proportionnelles, et les triangles* DFE, dfe *homologues sont semblables :* de plus, *leurs angles dièdres sont égaux,* puisque IDF est semblable à idf, IFE à ife, d'où l'angle $IFD = ifd$, $IFE = ife$, $DFE = dfe$. En outre, si les points $DIFE$ sont dans le même plan, l'équation $IFE = IFD + DFE$ se change en $ife = ifd + dfe$: d'où il suit que les points e, f, i étant aussi dans un même plan, *les faces des polyèdres sont semblables :* enfin, *les angles polyèdres sont égaux,* comme composés d'angles trièdres égaux (281, 4°). Ainsi les corps sont semblables (n° 297).

299. Lorsque deux polyèdres sont semblables, les aires de leurs faces sont comme les carrés des lignes homologues de ces polyèdres ; mais comme ces lignes sont proportionnelles, on a une suite de rapports égaux, formés par les faces homologues, d'où l'on conclut (comme n° 262, II) que *les aires totales des polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues.*

On verra aisément que les surfaces de cônes ou de cylindres semblables, c'est-à-dire engendrées par deux triangles ou deux rectangles semblables, sont entre elles comme les carrés de leurs génératrices. En effet, les circonférences C et c des bases sont proportionnelles aux génératrices A et a ; les aires S et s le sont à $C \times A$ et $c \times a$ (n°s 287, 5°, et 290, 1°),

$$\text{d'où } \frac{S}{s} = \frac{C.A}{c.a},\ \frac{C}{c} = \frac{A}{a};\ \text{donc } \frac{S}{s} = \frac{A^2}{a^2}.$$

De même, *les aires des sphères sont comme les carrés de leurs rayons, puisqu'elles valent quatre grands cercles.*

300. Lorsque deux polyèdres sont tels, qu'on peut les placer l'un en dessus, l'autre en dessous d'un plan MN (fig. 173), de sorte que les sommets des angles polyèdres A, a, B, b.... soient, deux à deux, à égale distance de ce plan, et sur une perpendiculaire Aa, Bb...., à ce plan, ces deux polyèdres sont appelés *Symétriques*. B étant un angle polyèdre du premier corps, en menant BQb perpendiculaire au plan MN, et prenant $QB = Qb$, b sera l'angle homologue du second polyèdre.

Les polyèdres symétriques ont toutes les parties constituantes égales. Pour le prouver, plions le trapèze $ABPQ$ suivant PQ, les lignes AP, aP égales et perpend. sur MN coïncideront, ainsi que BQ et Bq; d'où $AB = ab$: donc *les lignes homologues sont égales*. D, d, C, c étant des angles polyèdres symétriques, on aura $BC = bc$, $AC = ac$; ainsi, le triangle $ABC = abc$; *les triangles homologues sont donc égaux*. De plus, le triangle $ADC = adc$, $BDC = bdc$: ainsi l'angle $DCB = dcb$, $ACD = acd$, $ACB = acb$. Or,

1° Si les plans de ces triangles forment en C et c des angles trièdres, ils seront égaux : *donc les angles dièdres et trièdres homologues sont égaux. Il en est de même des angles polyèdres,* puisqu'ils sont formés d'angles trièdres égaux disposés dans le même ordre.

2° Si les points $ABCD$ sont dans le même plan, comme l'angle $DCB = ACD + ACB$, on a $dcb = acd + acb$; d'où il suit que les points $abcd$ sont aussi dans le même plan (n° 279), donc *les faces homologues sont égales,* comme formées de triangles égaux semblablement placés.

301. *Tout parallélépipède* ACc (fig. 174) *est formé de deux prismes triangulaires symétriques* ABd, BCd; *les angles dièdres opposés sont égaux, et les angles trièdres opposés sont symétriques.* En effet, les deux corps $Aabd$, $Ccbd$ sont visiblement des prismes (n° 282); la base BDC ou bdc de l'un sera égale à ABD. Rapprochons ces prismes triangulaires, en faisant coïncider bdc avec ABD, savoir bc avec AD, et dc avec AB; $Ccbd$ prendra la situation $AEHI$. Or, les perpend. aF, Cf sur les bases sont égales (n° 268), 2° on a de plus $Aa = Cc$ et l'angle $AaF = cCf$; ainsi, le triangle $AaF = CcF$, d'où $AF = cf$. Par une raison semblable, $fb = DF$; ainsi les triangles égaux ADF, bcf coïncident, et le point f tombant en F, fC se porte en FE sur le prolongement FE de aF. Donc le sommet E ou C est symétrique de a : on verra de même que I, ou B, l'est de d; et H ou D, l'est de b.

CHAPITRE III.

DES VOLUMES.

302. *Former un prisme droit équivalent à un prisme oblique* AD (fig. 176), *la génératrice conservant la même longueur* AC. Prolongeons les arêtes CA, DB, menons-leur un plan quelconque MN perp.; enfin prenons $Pp = BD$, menons le plan op parallèle à MN, on aura ainsi le prisme droit Op. Appliquons les prismes tronqués $BAOP$, $DCop$, de manière à coucher la base op sur OP qui lui est égale : les génératrices étant perpend. aux bases, et de plus égales (puisque $DB = Pp$ donne $BP = pD$, et ainsi des autres), les prismes coïncideront, ou $oD = OB$. Retranchant la partie commune Ap, il reste le prisme oblique AD équivalent au prisme droit Op.

303. On peut toujours disposer deux prismes symétriques, AD, ad (fig. 176) relativement à un plan MN, en sorte que ce plan soit perpend. aux génératrices. Prolongeons l'arête DB en Pd; puis, à partir du point P de rencontre avec un plan quelconque MN perp., prenons $Pb = PB$, $Pd = PD$, ou $BD = bd$. En raisonnant de même pour chaque arête, on formera le prisme ad symétrique à AD.

Les prismes symétriques AD, ad sont équivalents. Car prenons $Pp = Pp' = BD$, et menons les plans op, $o'p'$ parallèles à MN : les prismes $OPop$, $OPo'p'$ sont droits et équivalents aux proposés (n° 302). De plus, ils sont égaux entre eux, puisqu'en les appliquant, de sorte que la base $o'p'$ de l'un tombe sur celle OP de l'autre qui lui est égale, il y aura coïncidence.

304. *Deux parallélépipèdes de même hauteur et de même base sont équivalents.* Pour le démontrer, rapprochons ces corps de manière à faire coïncider leurs bases inférieures égales; les supérieures seront situées dans le même plan : il se présentera deux cas.

1° Si les faces latérales FG, EK (fig. 175) sont dans un même plan, les triangles égaux EGH, FIK servent de bases à deux prismes superposables EHM, FIN. Donc, en retranchant tour à tour ces prismes du corps entier EN, il restera les parallélépipèdes équivalents $EFIM$, $EHNL$.

2° Si les faces ont une disposition quelconque, les bases supérieures AC, ac (fig. 178) seront des parallélogrammes égaux à ceux des