CHAPITRE III.

DES VOLUMES.

302. Former un prisme droit équivalent à un prisme oblique AD (fig. 176), la génératrice conservant la même longueur AC. Prolongeons les arêtes CA, DB, menons-leur un plan quelconque MN perp.; enfin prenons Pp = BD, menons le plan op parallèle à MN, on aura ainsi le prisme droit Op. Appliquons les prismes tronqués BAOP, DCop, de manière à coucher la base op sur OP qui lui est égale : les génératrices étant perpend. aux bases, et de plus égales (puisque DB = Pp donne BP = pD, et ainsi des autres), les prismes coincideront, ou oD = OB. Retranchant la partie commune Ap, il reste le prisme oblique AD équivalent au prisme droit Op.

303. On peut toujours disposer deux prismes symétriques, AD, ad (fig. 176) relativement à un plan MN, en sorte que ce plan soit perpend. aux génératrices. Prolongeons l'arête DB en Pd; puis, à partir du point P de rencontre avec un plan quelconque MN perp., prenons Pb = PB, Pd = PD, ou BD = bd. En raisonnant de même pour chaque arête, on formera le prisme ad symétrique à AD.

Les prismes symétriques AD, ad sont équivalents. Car prenons Pp = Pp' = BD, et menons les plans op, o'p' parallèles à MN: les prismes OPop, OPo'p' sont droits et équivalents aux proposés (n° 302). De plus, ils sont égaux entre eux, puisqu'en les appliquant, de sorte que la base o'p' de l'un tombe sur celle OP de l'autre qui lui est égale, il y aura coïncidence.

304. Deux parallélépipèdes de même hauteur et de même base sont équivalents. Pour le démontrer, rapprochons ces corps de manière à faire coïncider leurs bases inférieures égales; les supérieures seront situées dans le même plan : il se présentera deux cas.

1° Si les faces latérales FG, EK (fig. 175) sont dans un même plan, les triangles égaux EGH, FIK servent de bases à deux prismes superposables EHM, FIN. Donc, en retranchant tour à tour ces prismes du corps entier EN, il restera les parallélépipèdes équivalents EFIM, EHNL.

2º Si les faces ont une disposition quelconque, les bases supérieures AC, ac (fig. 178) seront des parallélogrammes égaux à ceux des

300. Lorsque deux polyèdres sont tels, qu'on peut les placer l'un en dessus, l'autre en dessous d'un plan MN (fig. 173), de sorte que les sommets des angles polyèdres A, a, B, b... soient, deux à deux, à égale distance de ce plan, et sur une perpendiculaire Aa, Bb..., à ce plan, ces deux polyèdres sont appelés Symétriques. B étant un angle polyèdre du premier corps, en menant BQb perpendiculaire au plan MN, et prenant QB = Qb, b sera l'angle homologue du second polyèdre.

Les polyèdres symétriques ont toutes les parties constituantes égales. Pour le prouver, plions le trapèze ABPQ suivant PQ, les lignes AP, aP égales et perpend. sur MN coîncideront, ainsi que BQ et Bq; d'où AB = ab: donc les lignes homologues sont égales. D, d, C, c étant des angles polyèdres symétriques, on aura BC = bc, AC = ac; ainsi, le triangle ABC = abc; les triangles homologues sont donc égaux. De plus, le triangle ADC = adc, BDC = bdc: ainsi l'angle DCB = dcb, ACD = acd, ACB = acb. Or,

1° Si les plans de ces triangles forment en C et c des angles trièdres, ils seront égaux : donc les angles dièdres et trièdres homologues sont égaux. Il en est de même des angles polyèdres, puisqu'ils sont formés d'angles trièdres égaux disposés dans le même ordre.

2º Si les points ABCD sont dans le même plan, comme l'angle DCB = ACD + ACB, on a dcb = acd + acb; d'où il suit que les points abcd sont aussi dans le même plan (n° 279), donc les faces homologues sont égales, comme formées de triangles égaux semblablement placés.

301. Tout parallèlépipède ACc (fig. 174) est formé de deux prismes triangulaires symétriques ABd, BCd; les angles dièdres opposés sont égaux, et les angles trièdres opposés sont symétriques. En effet, les deux corps Aabd, Ccbd sont visiblement des prismes (n° 282); la base BDC ou bdc de l'un sera égale à ABD. Rapprochons ces prismes triangulaires, en faisant coïncider bdc avec ABD, savoir bc avec AD, et dc avec AB; Ccbd prendra la situation AEHI. Or, les perpend. aF, Cf sur les bases sont égales (n° 268), 2° on a de plus Aa = Cc et l'angle AaF = cCf; ainsi, le triangle AaF = CcF, d'où AF = cf. Par une raison semblable, fb = DF; ainsi les triangles égaux ADF, bcf coïncident, et le point f tombant en F, fC se porte en FE sur le prolongement FE de aF. Donc le sommet E on C est symétrique de a: on verra de même que I, ou B, l'est de d; et H ou D, l'est de b.

bases inférieures MN, en sorte que les lignes AB, DC, ab, dc seront égales et parallèles; de même pour AD, BC, ad, bc. Prolongeons ces lignes, nous aurons le parallélogramme A'C' égal à AC et à ac. Or, concevons le parallélépipède qui aurait pour base supérieure A'C', et la même base inférieure MN que les proposés; ce corps sera équivalent à chacun de ceux-ci, puisqu'il sera, relativement à eux, dans l'état examiné ci-dessus. Les proposés sont donc équivalents.

305. Il est facile de changer un parallélépipède donné en un autre rectangulaire équivalent. De chaque angle de la base inférieure ABCD (fig. 177), élevons des perpendiculaires à son plan: on aura un parallélépipède droit ABEI équivalent au proposé, qu'il était inutile de tracer dans la figure. Puis, menant AF, BG, perpend. sur AB dans la base AC, on formera sur AG le parallélépipède rectangle ABHK équivalent à ABEI, puisqu'il a même base AM et même hauteur AF.

306. Deux parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs. Si ces hauteurs ont une commone mesure, on coupera les corps en tranches égales, et l'on raisonnera comme pour les rectangles (n° 250, 1°, fig. 126). On démontrera de même le théorème pour le cas où les hauteurs sont incommensurables.

Les parallélépipèdes rectangles P et p de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases. En effet, plaçons ces corps de manière à faire coïncider l'un de leurs angles polyèdres et leur arête égale. Les bases seront disposées comme AC (fig. 179) pour P, et AK pour p; or, prolongeons IK en H; le parallélépipède Q construit sur la base AH et de même hauteur, peut être regardé comme ayant AI pour hauteur, et la face AB pour base : comparé à P, il donne donc $\frac{P}{Q} = \frac{AD}{AI}$. Mais si l'on prend la face AIGF pour base des parallélépipèdes Q et p, leurs hauteurs seront AE et AL; d'où $\frac{Q}{p} = \frac{AE}{AL}$. En multipliant ces proportions, il vient

$$\frac{P}{p} = \frac{AD \times AE}{AI \times AL} = \frac{base \ AC}{base \ AK}.$$

Ensin, les parallélépipèdes rectangles P et p sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. Car si les bases son t AC et AK, et les hauteurs AG et AO, en prolongeant les faces de

celui qui a une hauteur moindre, tel que p, jusqu'à la base supérieure de l'autre, on formera un parallélépipède ALFKG = R, qui aura la même hauteur H que l'un P, et même base AK que l'autre p; on aura donc d'une part $\frac{R}{p} = \frac{AG}{AO}$, et $\frac{P}{R} = \frac{AC}{AK}$ de l'autre; d'où $\frac{P}{p} = \frac{AC \times AG}{AK \times AO}$.

En désignant par H, I, K les arêtes qui forment un angle trièdre A de P, et par h, i, k celles de p, on a $\frac{P}{p} = \frac{H \cdot I \cdot K}{h \cdot i \cdot k}$. On voit donc que pour mesurer le volume d'un parallélépipède rectangle P, c'est-à-dire pour trouver son rapport avec un autre p pris pour unité (n° 36, 71) on cherchera les rapports $\frac{H}{h}$, $\frac{I}{i}$, $\frac{K}{k}$ entre les arêtes respectives qui forment un angle trièdre, et l'on multipliera ces trois nombres. Représentons par l le produit de ces trois rapports; l est un nombre abstrait, et le parallélépipède qu'il s'agit de mesurer a pour volume l fois celui du parallélépipède pris pour unité.

Le volume d'un parallélépipède est le produit de sa base par sa hauteur, quand on prend, pour unité de volume, le cube qui a pour côté l'unité linéaire: car h, i et k seront = 1, et l'on aura H. I. K pour le volume de P; H, I et K sont des nombres abstraits, qui marquent combien les arêtes de notre parallélépipède P contiennent de fois l'unité linéaire; soit l leur produit H. I. K, l'éq. P = H. I. K revient à P = l fois le cube pris pour unité de volume.

Lorsque H = I = K, on a $P = H^3$; de là la dénomination de Cube donnée aux troisièmes puissances.

307. Donc, le volume d'un prisme est le produit de sa base par la hauteur: car, 1° s'il s'agit d'un parallélépipède quelconque, il est équivalent à celui qui est rectangle de même hauteur et de base équivalente (n° 304).

2º Si le prisme est triangulaire, comme ABDabd (fig. 174), en formant le parallélépipède Ac, le volume de notre prisme est égal à son symétrique BDCbdc (nº 303): donc, chacun de ces prismes a pour volume le produit de sa hauteur par la moitié de la base AC, ou plutôt par sa base ABD.

3º Enfin, si l'on fait passer des plans par la génératrice Aa (fig. 157) du prisme Ad et par toutes les autres, il sera décomposé

en prismes triangulaires de même hauteur; la somme de leurs volumes sera donc le produit de cette hauteur par la somme des bases, ou par ABCDE.

On voit aussi que les volumes des prismes de même base sont comme les hauteurs, ou de même hauteur, sont comme leurs bases.

308. Le volume V d'un cylindre est le produit de sa hauteur H par l'aire B de sa base. En effet, désignons par β l'excès de la base du prisme circonscrit sur celle du cylindre, et par α l'excès du volume de ce prisme sur celui V du cylindre : $B + \beta$ sera la base du prisme, $V + \alpha$ son volume ; d'où $V + \alpha = (B + \beta) H$; donc V = BH, puisque le volume du cylindre est la limite de celui du prisme (n° 113).

309. Les pyramides de même hauteur et dont les bases sont équivalentes, sont égales en volume. Pour le prouver, coupons un tétraèdre
par des plans parallèles à sa base et équidistants. Soit ACcbaB
(fig. 180) l'une des tranches: menons par les points A, C, a, c des
parallèles à l'arête Bb; nous formerons deux prismes, l'un BDFcba
intérieur, l'autre BACebi extérieur au tronc: la différence de ces
prismes est le prisme DCea, qui a même hauteur, et dont la base
CFDA èst la différence entre les bases ABC, abc.

En opérant de même pour chaque tranche, en aura une série de prismes d'égale hauteur, tels que De. Or, il est visible qu'en partant de la base du tétraèdre, chaque prisme intérieur DFbB est égal au prisme extérieur de la tranche suivante; ainsi, en prenant la différence entre tous les prismes intérieurs et tous les extérieurs, il ne reste que les prismes DCea, depuis la 1^{re} tranche MN: cette différence est donc un prisme de même hauteur que les tranches, et qui a pour base celle BMN du tétraèdre. Plus les tranches sont nombreuses, et plus la hauteur devient petite; on peut donc rendre aussi petite qu'on voudra la différence entre les prismes intérieurs et extérieurs, et, à plus forte raison, entre les prismes intérieurs et le tétraèdre.

Il est évident que ce raisonnement peut se faire également pour toute pyramide à base quelconque.

Cela posé, soient maintenant deux pyramides P et p de même hauteur, dont les bases équivalentes reposent sur le même plan : coupons-les par une série de plans parallèles à ces bases et équidistants, puis formons pour chacune les prismes intérieurs. Soient α et β les excès des pyramides sur la somme des prismes intérieurs,

dont les volumes sont $P-\alpha$ et $p-\beta$. Or, chaque plan parallèle aux bases des pyramides donne des sections équivalentes, puisque ces sections sont entre elles comme les bases (n° 278): donc, les prismes intérieurs sont égaux deux à deux, d'où $P-\alpha=p-\beta$, et (n° 113) P=p.

Le même théorème a lieu pour deux troncs formés dans nos pyramides par deux plans parallèles.

310. Un tétraèdre DABC (fig. 183) est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur : car, sur les trois arêtes formons le prisme AE; en ôtant le tétraèdre DABC, il reste la pyramide quadrangulaire DACEF. Le plan CDF en forme deux tétraèdres : l'un FDEC, qui est égal au proposé, comme ayant même hauteur et la base FDE = ABC; l'autre DACF = DFCE, par la même raison, attendu que le triangle AFC = EFC. Nos trois tétraèdres étant équivalents, chacun est le tiers du prisme.

Donc, le volume de toute pyramide est le produit du tiers de sa base par sa hauteur, puisqu'elle est décomposable en tétraèdres.

Et comme le cône est la limite des pyramides circonscrites, le volume du cône est le tiers de sa base multipliée par sa hauteur, ou le tiers du cylindre de même base et de même hauteur.

On aura le volume d'un polyèdre quelconque en le décomposant en pyramides.

311. Le volume du tronc de prisme triang. ABEF (fig. 184) est le produit de la base par le tiers des trois hauteurs des angles trièdres F, D, Ede'la base supérieure. En effet, faisons les mêmes sections surce tronc ABEF qu'au n° 310; le plan ADC donne le tétraèdre DABC; le plan DCF coupe la pyramide quadrangulaire DACEF en deux tétraèdres DFCA, DFCE. Or, on peut, sans changer les bases AFC, EFC, mettre les sommets de ceux-ci en B, puisque DB est parallèle au plan ACEF (n° 269). Donc on aura les tétraèdres BCAF, BCEF: ce dernier peut même prendre CEA pour base, puisque les triangles CEF et CEA sont équivalents. Le tronc de prisme est donc formé des trois tétraèdres DABC, FABC, EABC, qui ont même base inférieure ABC, et leurs sommets aux trois angles trièdres FDE de la base supérieure; donc, etc. Ce théorème sert à trouver le volume du prisme tronqué à base quelconque.

312. Le tronc de pyramide quelconque à bases parallèles est composé de trois pyramides de même hauteur que le tronc, dont les bases sont la base inférieure du tronc, la base supérieure et une moyenne pro-

portionnelle entre ces deux aires. Soient une pyramide et un tétraèdre de même hauteur, de bases équivalentes, posés sur le même plan; leurs volumes sont égaux. Un plan parallèle aux bases forme deux trones, et coupe le tétraèdre et la pyramide suivant un triangle et un polygone qui sont équivalents, puisqu'ils sont proportionnels aux bases (278): donc la pyramide et le tétraèdre retranchés étant égaux, les trones le seront aussi. Il reste à démontrer le théorème pour le trone de tétraèdre ABFE (fig. 185).

Le plan ADC donne les deux corps DABC et DACEF: le plan DFC forme les tétraèdres DFEC et DFAC; or, menant DG parallèle à AF, ce dernier pourra avoir son sommet en G, au lieu de D, et deviendra FAGC. Ces trois tétraèdres ont même hauteur que le trone; leurs bases sont ABC, DFE, AGC. Cela posé, on a (n° 256, 2°) $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG}$, $\frac{AGC}{FDE} = \frac{AC}{FE}$: or, les seconds membres sont égaux à cause des triangles semblables FDE, ABC; donc $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{FDE}$. Donc, etc.

Soient A et B les bases d'un tronc de pyramide, H sa hauteur : on a pour levolume $\frac{1}{2}H(A+B+VAB)$.

Il est visible que ce théorème a également lieu pour le tronc de cône. Soient R et r les rayons des bases, $A = \pi R^2$, $B = \pi r^2$, le volume du tronc de $\frac{1}{2}$ π H $(R^2 + r^2 + Rr)$.

313. Tout triangle ABC (fig. 186, 187, 188 et 189), qui tourne autour d'une ligne quelconque CI située dans son plan et passant par un de ses sommets C, engendre un volume égal au produit du tiers de la perpend. CD = p abaissée de ce sommet sur la base AB, multiplié par la surface engendrée par cette base AB.

1er cas. Le triangle CAB tourne autour de l'un de ses côtés CB (fig. 188 et 189). On a vol. CAB = cône CAP + cône BAP (voy. n° 310), ou = $\frac{1}{3}$ cercle $AP \times CB = \frac{1}{3}\pi AP^2 \times CB$: or $AP \times CB = 2$ fois aire $ABC = AB \times CD$; done volume $CAB = \frac{1}{3}\pi p \cdot AP \times AB$; et comme la surface du cône engendré par AB est = $\frac{1}{2}$ circ. $AP \times AB = \pi AP \times AB$, on a volume $CAB = \frac{1}{3}p \times Surf$. AB. Cette démonstration convient aux trois cas où l'angle A est aigu, droit ou obtus.

2° cas. Le triangle CAB tourne autour d'une ligne extérieure CI (fig. 186); volume CAB = volume CAI — volume BCI = $\frac{1}{3}p$ (surf. AI — surf. BI) = $\frac{1}{3}p$. surf. AB.

3° cas. La base AB est parallèle à l'axe CI de rotation (fig. 187): volume CAB = cylindre ABEF + cône CAE - cône CBF, ou = cercle CD (AB + $\frac{1}{3}CE$ - $\frac{1}{3}CF$) = $\frac{1}{3}\pi CD^2$ (3EF + CE - CF) = $\frac{1}{3}\pi CD^2 \times 2EF$: or, la surface engendrée par AB est celle d'un cylindre, et = circ. $CD \times EF$ = $2\pi CD \times EF$; donc vol. CAB = $\frac{1}{3}CD \times Surf$. AB.

Ce théorème sert à trouver les volumes de la sphère, du secteur et du segment sphérique; car si l'on circonscrit à l'arc de cercle ADP (fig. 169) une portion de polygone à côtés égaux, et qu'on fasse tourner la fig. autour du diamètre AO, la révolution complète de tous les triangles CAB, CBD, CDI. . . . engendrera un volume $=\frac{1}{3}p$ (surf. AB + surf. BD +). Ainsi, ce volume est le produit de la surface engendrée par tous les côtés du polygone, multipliée par le tiers du rayon. Donc

1° Si le polygone est circonscrit au demi-cercle ADB (fig. 167) de rayon R, désignons par α l'excès de l'aire P de la sphère sur celle qu'engendre le polygone; par β l'excès du volume V de la sphère sur celui que forme le polygone; on a $V+\beta=\frac{1}{3}R(P+\alpha)$; d'où l'on tire (n° 113) $V=\frac{1}{3}R\times P$; le volume de la sphère est le produit de sa surface multipliée par le tiers de rayon, ou celui de l'aire d'un des grands cercles par les $\frac{4}{3}$ du rayon (n° 293, 2°), ou enfin

Volume V de la sphère
$$= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3 = 0.5236 D^3$$
,

D étant le diamètre 2R.

2º Le rayon R de la sphère qui a V pour volume est

$$R = \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)} = \sqrt[3]{kV}, \qquad \log k = \overline{1}.3779114.$$

3° Pour le secteur sphérique DAC, le même raisonnement prouve que le volume est égal à la surface de la calotte multipliée par le tiers du rayon, ou (n° 293, 1°), la flèche AI étant h,

Volume du secteur sphérique = $\frac{2}{3}\pi R^2h$.

4° Si l'on retranche le cône DGC du secteur, le reste est le segm. sphérique ADIG; or le vol. du cône DGC est $=\frac{1}{3}$ $CI \times$ cercle DI $=\frac{1}{3}$ $CI \times \pi DI^2$; CI = R - h, $DI^2 = DC^2 - CI^2 = 2Rh - h^2$; donc

Volume du segment sphérique $=\frac{1}{3}\pi h^2 (3R^2 - h)$.

5° Le cylindre DGFE (fig. 170) et le cône HIK circonscrits à la sphère AB ont pour volumes, savoir, 1° le cylindre $=\pi R^2 \times 2R$ ou $2\pi R^3$; 2° le cône (voyez n° 293) $3\pi R^2 \times \frac{1}{3}$ HB, et comme $HB^2 = HI^2 - IB^2 = \frac{3}{4}HI^2$, on trouve HB = 3R, et cône $= 3\pi R^3$. Comparant les quantités $\frac{4}{3}\pi R^3$, $2\pi R^3$ et $3\pi R^3$, on voit qu'elles sont entre elles comme 4:6:9; ce sont les rapports des volumes de la sphère, du cylindre et du cône circonscrits; le cylindre est moyen proportionnel entre les deux autres; la sphère est les deux tiers du cylindre circonscrit.

314. Les volumes de deux pyramides sont entre eux comme les produits des hauteurs par les aires des bases (n° 310). Mais si ces pyramides SAC, Sac (fig. 151) sont semblables, on a $\frac{ABC...}{abc...} = \frac{SH^2}{Sh^2}$ (n° 278); multipliant de part et d'autre par $\frac{SH}{Sh}$, il vient

$$\frac{SABC...}{Sabc...} = \frac{SH^3}{Sh^3}.$$

315. Les volumes des polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs lignes homologues. En effet, comme deux polyèdres semblables P, p, sont décomposables (n° 295) en pyramides semblables S, s, S', s'... en désignant par A, a, A', a' des lignes homologues de ces pyramides, on a $\frac{S}{s} = \frac{A^3}{a^3}$, $\frac{S'}{s'} = \frac{A'^3}{a'^3}$... D'ailleurs, tous ces rapports sont égaux, puisqu'en vertu de la similitude supposée, on a $\frac{A}{a} = \frac{A'}{a'} = \dots$ Donc $\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s'} = \dots = \frac{A^3}{a^3}$; d'où (n° 73, 3°)

$$\frac{S+S'+S''+\ldots}{s+s'+s''+\ldots}=\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}.$$

Il sera aisé de voir que les volumes des sphères sont entre eux comme les cubes de leurs rayons; que ceux des cylindres droits et des cônes droits semblables (c'est-à-dire engendrés par des rectangles ou des triangles rectangles semblables) sont entre eux comme les cubes des longueurs de leurs génératrices, ou de leurs hauteurs, ou enfin des rayons de leurs bases.

Les polyèdres symétriques ont leurs volumes égaux, puisqu'il est évident qu'on peut les décomposer en tétraèdres symétriques, et que ceux-ci ont des bases et des hauteurs égales.

LIVRE QUATRIÈME.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Quelques Problèmes sur les Lignes.

316. Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont étè séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles, et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Viète et à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques (LAGRANGE, Écol. Norm., t. IV, p. 401).

C'est donc en introduisant dans les formules algébriques les grandeurs qui composent les parties d'une figure, que nous transporterons dans la Géométrie toutes les ressources de l'Algèbre, et nous parviendrons sans peine à des résultats qu'il serait difficile d'obtenir par la Géométrie seule. Celle-ci a l'avantage de ne jamais faire perdre de vue l'objet principal, et d'éclairer la route entière qui conduit des premiers axiomes à leurs dernières conséquences (voy. n° 252); mais l'Algèbre a bien plus de ressources.

Ces réflexions conduisent à préférer dans la Géométrie élémentaire les méthodes directes, celles qui ne reposent sur aucun principe étranger, et permettent, pour ainsi dire, d'isoler chaque théorème, en le présentant comme une vérité aussi claire que l'axiome d'où il est déduit. Mais, lorsque les questions deviennent plus compliquées, cette méthode, qu'on nomme Synthèse, perd la