5° Le cylindre $DGFE$ (fig. 170) et le cône HIK circonscrits à la sphère AB ont pour volumes, savoir, 1° le cylindre $= \pi R^2 \times 2R$ ou $2\pi R^3$; 2° le cône (*voyez* n° 293) $3\pi R^2 \times \frac{1}{3} HB$, et comme $HB^2 = HI^2 - IB^2 = \frac{3}{4} HI^2$, on trouve $HB = 3R$, et cône $= 3\pi R^3$. Comparant les quantités $\frac{4}{3}\pi R^3$, $2\pi R^3$ et $3\pi R^3$, on voit qu'elles sont entre elles comme $4 : 6 : 9$; ce sont *les rapports des volumes de la sphère, du cylindre et du cône circonscrits; le cylindre est moyen proportionnel entre les deux autres; la sphère est les deux tiers du cylindre circonscrit.*

314. *Les volumes de deux pyramides sont entre eux comme les produits des hauteurs par les aires des bases* (n° 310). Mais si ces pyramides SAC, Sac (fig. 151) sont semblables, on a $\frac{ABC\ldots}{abc\ldots} = \frac{SH^2}{Sh^2}$ (n° 278); multipliant de part et d'autre par $\frac{SH}{Sh}$, il vient

$$\frac{SABC\ldots}{Sabc\ldots} = \frac{SH^3}{Sh^3}.$$

315. *Les volumes des polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs lignes homologues.* En effet, comme deux polyèdres semblables P, p, sont décomposables (n° 295) en pyramides semblables S, s, S', s' . . . en désignant par A, a, A', a' des lignes homologues de ces pyramides, on a $\frac{S}{s} = \frac{A^3}{a^3}$, $\frac{S'}{s'} = \frac{A'^3}{a'^3}\ldots$ D'ailleurs, tous ces rapports sont égaux, puisqu'en vertu de la similitude supposée, on a $\frac{A}{a} = \frac{A'}{a'} = \ldots$. Donc $\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''} = \ldots = \frac{A^3}{a^3}$; d'où (n° 73, 3°)

$$\frac{S + S' + S'' + \ldots}{s + s' + s'' + \ldots} = \frac{P}{p} = \frac{A^3}{a^3}.$$

Il sera aisé de voir que *les volumes des sphères sont entre eux comme les cubes de leurs rayons;* que ceux des cylindres droits et des cônes droits semblables (c'est-à-dire engendrés par des rectangles ou des triangles rectangles semblables) sont entre eux comme les cubes des longueurs de leurs génératrices, ou de leurs hauteurs, ou enfin des rayons de leurs bases.

Les polyèdres symétriques ont leurs volumes égaux, puisqu'il est évident qu'on peut les décomposer en tétraèdres symétriques, et que ceux-ci ont des bases et des hauteurs égales.

LIVRE QUATRIÈME.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Quelques Problèmes sur les Lignes.

316. Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles, et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Viète et à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques (Lagrange, *Écol. Norm.*, t. IV, p. 401).

C'est donc en introduisant dans les formules algébriques les grandeurs qui composent les parties d'une figure, que nous transporterons dans la Géométrie toutes les ressources de l'Algèbre, et nous parviendrons sans peine à des résultats qu'il serait difficile d'obtenir par la Géométrie seule. Celle-ci a l'avantage de ne jamais faire perdre de vue l'objet principal, et d'éclairer la route entière qui conduit des premiers axiomes à leurs dernières conséquences (*voy.* n° 252); mais l'Algèbre a bien plus de ressources.

Ces réflexions conduisent à préférer dans la Géométrie élémentaire les méthodes directes, celles qui ne reposent sur aucun principe étranger, et permettent, pour ainsi dire, d'isoler chaque théorème, en le présentant comme une vérité aussi claire que l'axiome d'où il est déduit. Mais, lorsque les questions deviennent plus compliquées, cette méthode, qu'on nomme *Synthèse,* perd la

clarté, qui est son plus précieux avantage ; *l'Analyse* reprend toute sa supériorité, et, par sa féconde influence, généralise les résultats, simplifie les recherches, et lorsqu'elle est employée avec adresse, donne à ses artifices une élégance et même une clarté à laquelle le mécanisme du calcul semblait s'opposer. Les problèmes suivants serviront de preuve à ces assertions.

317. *Mesurer la distance d'un point inaccessible* D *à un autre point* A (fig. 181). On prendra sur l'alignement AD une partie quelconque AC, et formant un triangle arbitraire ABC, on en mesurera les côtés $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ *; puis marquant sur BC un point E quelconque, on dirigera vers D le rayon visuel FD; soient $AD = x$, $EC = g$, $FA = d$. La parallèle EG à AB donne

1° $$\frac{BC}{EC} = \frac{CA}{GC} = \frac{AB}{EG}, \text{ ou } \frac{a}{g} = \frac{b}{CG} = \frac{c}{EG};$$

donc $$CG = \frac{bg}{a}, \quad EG = \frac{cg}{a}.$$

2° $$\frac{DA}{FA} = \frac{DG}{EG}, \text{ ou } \frac{x}{d} = \frac{DG}{EG}.$$

Or, on a $DG = DA - GA = DA - (CA - CG)$,

ou $DG = x - b + \frac{bg}{a}$; en divisant cette valeur par celle de EG,

on trouve $$\frac{x}{d} = \frac{ax - ab + bg}{cg};$$

d'où $$x = bd\left(\frac{g - a}{cg - ad}\right).$$

S'il arrive que $BF = AF$, ce qu'on est maître de supposer, comme $c = 2d$, la solution se réduit à $x = b \cdot \frac{g - a}{2g - a}$.

Il ne s'agira plus que de mettre pour a, b, c, d, et g leurs valeurs numériques, ou le nombre de fois que ces lignes contiennent l'unité, pour trouver x exprimé en nombres.

318. *Quelle est la relation qui lie les côtés* a, b *et* c *d'un triangle* BAC (fig. 117) *inscrit à un cercle de rayon R?* Menons le diamètre

* Dorénavant nous désignerons les angles des triangles par A, B, C...., et par a, b, c..... les côtés qui sont respectivement opposés.

BD, et les lignes AD, DC; le quadrilatère $ABDC$ donne (n° 241, II) $2Rb = c \times CD + a \times AD$. Des triangles rectangles BCD, BAD, nous tirons $CD = \sqrt{(4R^2 - a^2)}$, $AD = \sqrt{(4R^2 - c^2)}$; donc

$$2Rb = c\sqrt{(4R^2 - a^2)} + a\sqrt{(4R^2 - c^2)};$$

équation cherchée, qui donne l'une des quantités a, b, c et R, connaissant les trois autres.

I. Étant données les cordes de deux arcs AB, BC, on a donc b, ou la corde AC d'un arc ABC égal à leur somme.

Si les arcs AB et BC sont égaux, on a $a = c$, d'où

$$Rb = a\sqrt{(4R^2 - a^2)},$$

équ. qui donne la corde b d'un arc, connaissant celle a d'un arc moitié moindre.

II. *Trouver le rayon* R *du cercle circonscrit au triangle* ABC (fig. 117). Élevons notre équ. au carré, l'un des radicaux disparaîtra ; transposons ensuite les termes rationnels, et carrons de nouveau pour chasser l'autre radical, nous trouvons

$$R = \frac{abc}{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}.$$

Cette formule ne se prête pas au calcul des log. : mais le radical affecte la différence de deux carrés, qui $= (2ac + a^2 + c^2 - b^2) \times (2ac - a^2 - c^2 + b^2)$, ou $[(a + c)^2 - b^2] \times [b^2 - (a - c)^2]$; chaque facteur souffre la même décomposition, et l'on a

$$R = \frac{abc}{\sqrt{a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)}},$$

ou $$R = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{p \cdot (p - a)\ (p - b)\ (p - c)}},$$

en faisant, pour abréger, le périmètre $2p = a + b + c$.

III. *Trouver l'aire* z *d'un triangle, connaissant les trois côtés* a, b, c (n° 222, fig. 182). Le segment $AD = x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$; or, le triangle ABD donne $BD = \sqrt{(c^2 - x^2)}$; $z = \frac{1}{2}b \times BD$ devient donc $z = \frac{1}{4}\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}$,

ou $$z = \sqrt{p \cdot (p - a)\ (p - b)\ (p - c)}.$$

On a donc, pour le rayon du cercle circonscrit, $4Rz = abc$.

IV. *Trouver le rayon* r *du cercle inscrit au triangle.* Les aires (fig. 68) des triangles AOB, AOC, BOC étant $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}ar$, la somme est $z = pr$, d'où (*voy.* n° 364, IX)

$$r = \frac{z}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

V. *Évaluer l'aire d'un quadrilatère* $ABCD$ (fig. 77). Menons la diagonale $AC = b$, et prenons-la pour base des deux triangles ABC, ADC; h et h' étant les hauteurs, l'aire demandée est $\frac{1}{2}b(h+h')$.

On peut encore opérer comme il suit. Soit $ABCD$ (fig. 191); abaissez les perp. $DE = h$, $CF = h'$ sur la base $AB = a$, faites $AE = b$, $BF = b'$, d'où (n° 259)

$$\text{l'aire } CFED = \tfrac{1}{2}(h+h') \times (a-b-b').$$

De plus $ADE = \frac{1}{2}bh$, $CBF = \frac{1}{2}b'h'$: vous trouvez enfin, pour la somme de ces aires,

$$ABCD = \tfrac{1}{2}(a-b)h' + \tfrac{1}{2}(a-b')h.$$

Cette équ., facile à appliquer, ne convient plus dès que l'une des perpend. tombe hors du quadrilatère. Ainsi (fig. 192), il faudrait changer b en $-b$ et b' en $-b'$ (*voy.* n°s 339 et 364, VI).

VI. *Mener* EF *perpend. à la base* AC *du triangle* ABC (fig. 193), *telle que les triangles* AEF, ABC *soient dans le rapport donné de* m *à* n. Soient b et x les bases AC, AE ; h et y les hauteurs BD, EF; les aires sont $\frac{1}{2}bh$, $\frac{1}{2}xy$, d'où $\frac{xy}{bh} = \frac{m}{n}$. D'ailleurs, les triangles semblables AEF, ABD donnent $\frac{y}{h} = \frac{x}{k}$, en faisant $AD = k$; donc, éliminant y, $x = \sqrt{\left(\frac{kbm}{n}\right)}$. Si l'on avait $x > k$ ou AD, le point E devrait être situé vers H, au delà de D, et la perpend. à AC séparerait un triangle qui n'est plus contenu dans ABC : ce cas arrive quand $bm > kn$, ou

$$\frac{m}{n} > \frac{k}{b} = \frac{AD}{AC}.$$

319. Connaissant le côté $AB = a$ (fig. 122) d'un polygone régulier inscrit, cherchons celui $AC = x$ d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est double. CO, perpend. sur AB, donne (n° 227)

$AC^2 = CI \times 2CO$. Représentant par z le rayon OI du cercle inscrit au polygone donné, on a $CI = R - z$, et $OI^2 = AO^2 - AI^2$: donc

$$x^2 = 2R(R-z), \text{ et } z^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

En faisant, par ex., $a = R$, on a $R\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ pour le côté du dodécagone inscrit. De même, $a = R\sqrt{3}$ (n° 238) donne $x = R$ pour le côté de l'hexagone, etc.

On peut aussi trouver le côté $EF = y$ d'un polygone régulier circonscrit, connaissant celui $AB = a$, qui est inscrit d'un même nombre de côtés. Car les triangles AOI, EOC donnent

$$\frac{OI}{OC} = \frac{AI}{EC}, \text{ ou } \frac{z}{R} = \frac{a}{y}:$$

donc
$$y = \frac{aR}{z} \text{ et } z^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

320. C'est ainsi que $a = R\sqrt{2}$ donne $z = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ et $y = 2R$ pour le côté du carré circonscrit (n° 239); $a = R\sqrt{3}$ donne, pour le côté du triangle équilatéral circonscrit, $y = 2R\sqrt{3}$, ou le double du coté du triangle inscrit.

Il est facile de déduire de ces formules *le rapport approché* π *de la circonférence au diamètre,* ou la demi-circonférence π du cercle, dont le rayon est l'unité (n° 248). Pour cela, posons $R = 1$, nos équ. deviendront

$$x = \sqrt{(2-2z)}, \quad z = \sqrt{(1-\tfrac{1}{4}a^2)}, \quad y = \frac{a}{z}.$$

Faisant $a = 1$, on a, pour le côté du dodécagone inscrit, $x = \sqrt{(2-\sqrt{3})} = 0{,}517638$. Si de nouveau on fait $a = 0{,}517638$, on trouvera $x = 0{,}26105238\ldots$ pour le côté du polygone régulier inscrit de 24 côtés ; et ainsi de suite.

Quatre opérations semblables donneront, par ex., 0,065438166 pour le côté du polygone régulier de 96 côtés ; en mettant cette valeur pour a dans z et y, on a le côté du polygone régulier circonscrit semblable ; et multipliant par 48, on a, pour les demi-périmètres de ces polygones 3,1410 et 3,1427... Comme la demi-circonf. π est comprise entre ces longueurs, on aura donc $\pi = 3{,}14\ldots$, en ne prenant que les décimales communes.

Pour obtenir une plus grande approximation, comme la circon-

férence approche d'autant plus des périmètres des polygones, que l'on multiplie davantage les côtés (n° 246), il faudra recourir à des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Soit, en général, calculé le côté a d'un polygone inscrit d'un nombre n de côtés; on aura, pour les demi-périmètres de ce polygone et de celui qui est circonscrit semblable,

$$\tfrac{1}{2}an \text{ et } \frac{\tfrac{1}{2}an}{\sqrt{[(1+\tfrac{1}{2}a)(1-\tfrac{1}{2}a)]}}:$$

NOMBRE DES CÔTÉS.	DEMI-PÉRIMÈTRES DES POLYGONES inscrits.	DEMI-PÉRIMÈTRES DES POLYGONES circonscrits.
96	3,1410319	3,1427146
192	3,1414524	3,1418730
384	3,1415576	3,1416630
768	3,1415839	3,1416101
1536	3,1415904	3,1415970
3072	3,1415921	3,1415937
6144	3,1415925	3,1415929
12288	3,1415926	3,1415927

on en déduit enfin le nombre π donné p. 261.

Constructions géométriques.

321. L'art de résoudre les problèmes de Géométrie consiste, comme on a pu le remarquer (n°s 212, 229...), à les supposer résolus, à rapprocher les propriétés de la figure de celles qu'on connaît et qui sont analogues; à trouver ainsi la loi à laquelle les parties du système sont soumises, et à en conclure les inconnues. Ces procédés exigent beaucoup d'exercice et d'adresse, et l'on ne peut donner de règles générales pour ces combinaisons. L'emploi de l'Algèbre, lorsque le choix des inconnues est fait avec adresse, conduit souvent à des solutions plus élégantes; on sait mieux reconnaître leur nombre, et l'on juge facilement si le problème est possible ou non, déterminé ou indéterminé.

Concevons qu'après avoir résolu un problème de Géométrie, on ait construit la figure qui en règle les parties, qu'on ait désigné par des lettres les longueurs des diverses lignes qui la composent, et qu'en faisant usage des principes connus, on les ait liées par des équ.; le calcul conduira bientôt à la valeur des inconnues. Cela posé, si toutes les lignes de la figure sont exprimées par des nombres, l'Arithmétique donnera numériquement ces dernières. Mais il est remarquable qu'on peut assigner ces longueurs cherchées, même sans le secours des nombres, à l'aide de procédés géométriques, qui auront d'autant plus d'élégance, qu'ils rendront la figure moins confuse. C'est ce qu'on appelle *construire* la valeur de l'inconnue.

322. Remarquons, avant tout, que le calcul dont il vient d'être question ne peut avoir pour éléments que des rapports de lignes; en sorte que la ligne A ne peut y être introduite qu'en ayant égard à son rapport avec une autre ligne B, qu'on peut prendre pour unité (n° 175). Alors $\frac{A}{B}$ représente un nombre abstrait, auquel on peut substituer celui de deux autres grandeurs quelconques a et b, pourvu qu'on ait $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$.

Il n'entre donc, dans les calculs, que des expressions telles que $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots$ Or, il suit des règles mêmes du calcul, que toutes combinaisons de ces éléments par voie de multiplication, division, réduction au même dénominateur, etc., doit conduire à un résultat *homogène*, c'est-à-dire, *dont les termes renferment tous le même nombre de facteurs*. Ainsi, les lettres $a, b, c, \ldots$ qui entrent dans une formule, peuvent y désigner des lignes au lieu de nombres, et les termes doivent être homogènes : s'il n'en est pas ainsi, quelqu'une de ces lignes, telles que r, a dû être prise pour l'unité, qui n'est d'ailleurs qu'une longueur arbitraire et connue (n° 36). Dans ce cas, on peut rétablir le facteur r partout où il a dû disparaître, lorsqu'on a posé $r=1$, c'est-à-dire, *introduire* r *et des puissances convenables de* r *dans les divers termes, afin qu'ils redeviennent homogènes*. Pour que les quantités

$$\frac{2a^4c+ab^3-d}{b^4+a^3-c},\quad \frac{a-b}{1+ab},\quad \sqrt{\left(\frac{1\pm a}{2}\right)}.$$

représentent des lignes, elles doivent revenir à

$$\frac{2a^4c+ab^3r-dr^4}{b^4+a^3r-cr^3},\quad \frac{(a-b)r^2}{r^2+ab},\quad \sqrt{\left(\frac{r^2\pm ar}{2}\right)}.$$

En effet, par exemple, $x=\sqrt{\left(\frac{1\pm a}{2}\right)}$, en faisant évanouir le radical, devient $2x^2=1\pm a$, qui, en restituant des puissances

convenables de r, devient $2x^2 = r^2 \pm ar$. Mise sous cette forme, on peut prendre dans l'expression pour unité tout autre signe que r, et même une longueur qui n'y entre pas.

Lorsqu'une formule sera *homogène*, nous en évaluerons le *degré* par le nombre des facteurs de l'un de ses termes, si elle est entière; on retranchera le degré du dénominateur de celui du numérateur, si elle est fractionnaire; enfin, on divisera le degré de la fraction par l'ordre du radical qui l'affecte, si elle est irrationnelle. Concluons de là qu'en général, pour qu'une fraction représente une ligne, c'est-à-dire *soit linéaire, il faut que chaque terme du numérateur ait un facteur de plus que dans le dénominateur; et s'il entre un radical, il doit affecter une quantité de même degré que lui:* le radical carré précédera une fraction du second degré, etc.; les formules de *première dimension*, c'est-à-dire du 1er degré, sont constructibles par une ligne; celles de *seconde dimension* par une aire; enfin celles de *troisième dimension* représentent un volume : et si elles ne sont pas homogènes, on les rend telles en distribuant des puissances convenables de la ligne r qui y a été prise pour unité.

323. *Toute fraction monome linéaire* ne peut être que de la forme $x = \frac{ab}{c}$, $x = \frac{abc}{de}$, $x = \frac{abcd}{efg} \ldots$; celle-ci, par exemple, équivaut à $\frac{a}{e} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g} \times d$; de sorte qu'on voit que la ligne d doit être prise autant de fois qu'il y a d'unités dans le produit des rapports abstraits $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$.

1° La construction de $x = \frac{ab}{c}$ n'offre pas de difficulté; x est une quatrième proportionnelle à c, a et b. On sait la trouver (n° 217, fig. 82); on pourrait même faire usage des théorèmes (nos 225 et 228).

2° Pour $x = \frac{abc}{de}$, on cherchera une ligne $k = \frac{ab}{d}$, et l'on aura $x = \frac{kc}{e}$; ainsi deux 4es proportionnelles donneront x.

3° De même, $x = \frac{abcd}{efg}$ se construit en faisant $k = \frac{ab}{e}$, $= \frac{cd}{f}$, et l'on a $x = \frac{kl}{g}$. Il faut trois constructions.

Et ainsi de suite.

324. Pour la *fraction polynome* $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$, dont le dénominateur est monome, on écrit $x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm}$; on construit chaque fraction à part, et l'on a trois lignes à ajouter ou à soustraire.

Cependant si l'on a $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$, il sera plus court de faire $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, c'est-à-dire de chercher une 4e proportionnelle aux lignes c, $a + b$ et $a - b$.

325. On rend le dénominateur monome, lorsqu'il ne l'est pas, en l'égalant à un seul terme de même dimension, et dont on prend à volonté tous les facteurs, excepté l'un y qui y est inconnu, et qu'on détermine ainsi qu'il vient d'être dit. Par ex., pour $x = \frac{abc + def}{db + cd}$, on fera $ab + cd = ay$;

$$\text{d'où } x = \frac{abc}{ay} + \frac{def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}, \text{ et } y = b + \frac{cd}{a}.$$

Cette équ. donne y; la 1re fait ensuite connaître x.

Pour $x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$, on fera le dénominateur $q^2i - klq + cmd = q^2y$; d'où l'on tire $y = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2}$; une fois y connu, on a

$$x = \frac{abc^3}{q^2y} + \frac{qh}{y} - \frac{m^2p}{q^2y}.$$

Le choix des facteurs de l'inconnue y se fait quelquefois de manière à rendre les constructions plus simples; un peu d'adresse et d'exercice facilitent l'application du principe général : ainsi $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$ devient $x = \frac{m(c-m)}{c+m}$, en faisant $m = \frac{ab}{c}$.

326. Les *Constructions radicales* se ramènent à la forme

$$\sqrt{(ab)} \text{ ou } \sqrt{(a^2 \pm b^2)}:$$

$\sqrt{(ab)}$ est une moyenne proportionnelle entre a et b; on la construit

comme il a été dit (n° 226, fig. 95); on pourrait aussi la trouver à l'aide des théorèmes (n°s 227, 228).

Quant à $\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$, c'est un côté d'un triangle rectangle dont a et b sont les autres côtés. Pour $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, on prendra (fig. 92) $AB = a$, $AC = b$ sur deux lignes indéfinies AB, BC à angle droit; l'hypoténuse BC est $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. De même, pour $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, on tracera, comme ci-dessus, les lignes AB et AC; on prendra $AB = b$; puis du centre B avec le rayon $BC = a$, on marquera le point C, AC sera $\sqrt{(a^2 - b^2)}$. Ou autrement, sur la ligne $BC = a$ comme diamètre, on décrira le demi-cercle ABC; puis du centre B avec le rayon $AB = b$, on marquera le point A; AC sera $\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

327. Pour construire toute quantité affectée d'un radical carré, comme elle doit avoir deux dimensions, on l'égalera à un produit ay; a étant une quantité qu'on choisira à volonté; et y une inconnue; on aura alors $x = \sqrt{(ay)}$. La valeur de y se déduira aisément; elle sera une fraction qu'on construira par les principes ci-dessus.

Soit, par ex., $x = \sqrt{\left(\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}\right)}$; on fera $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay$, d'où $y = \frac{b^2}{b + c} + \frac{cd^2}{a(b + c)}$; on construira y par une 3e et deux 4es proportionnelles : enfin on aura $x = \sqrt{(ay)}$.

Au reste, le procédé général se simplifie souvent avec un peu d'adresse; ainsi, pour $\sqrt{(ac + bd)}$, on fera $bd = ay$; d'où $y = \frac{bd}{a}$ et $x = \sqrt{[a(c + y)]}$. De même, $x = \sqrt{(ab + bc)}$ devient $x = \sqrt{[(a + c)b]}$. *Voy.* aussi (n° 329, V) la construction de $\sqrt{\left(\frac{nk^2}{m}\right)}$, etc.

328. Quoiqu'on puisse construire par cette voie $x = \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$, cependant la construction du triangle rectangle donne une solution plus simple : c'est pourquoi il arrive souvent qu'on ramène à cette forme les quantités radicales. Ainsi, $x = \sqrt{(a^2 \pm bc)}$ devient $x = \sqrt{(a^2 \pm y^2)}$, en faisant $y^2 = bc$; d'où $y = \sqrt{(bc)}$.

De même, $x = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ldots)}$ se construit ainsi. On fait $y = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; sur les côtés AB, BC de l'angle droit B (fig. 194), on prend $AB = a$, $BC = b$; l'hypoténuse AC est y. On a $x = \sqrt{(y^2 + c^2 + d^2 + \ldots)}$; on fait $y' = \sqrt{(y^2 + c^2)}$: ainsi, sur DC perpend. à AC, on prend $CD = c$, et AD est y'; d'où $x = \sqrt{(y'^2 + d^2 + \ldots)}$, et ainsi de suite. La dernière hypoténuse AF est x (*voy.* pour la construction de $\sqrt{n}$ et $\sqrt{\frac{m}{n}}$, n° 329, IX et V).

Pour $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$, on fera indifféremment ou

$$ac - fg + mq + rd = ay,$$

d'où $$y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}, \text{ et } x = \sqrt{(ay)};$$

ou bien $$ac = y^2, \quad fg = z^2, \quad mq = t^2, \quad rd = u^2,$$

d'où $x = \sqrt{(y^2 + t^2 + u^2 - z^2)}$; et la construction précédente, convenablement modifiée, donnera x.

Enfin si l'on a $x = \sqrt{\left(a^2 - f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}\right)}$, on fera . . . . $y^2 = f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}$, d'où $x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$: il ne restera plus qu'à obtenir y. On fera $c^2 + d^2 = z^2$ et $ab + cd = t^2$; z et t se trouveront aisément, et l'on aura $y = \frac{fz}{t}$.

329. Appliquons ces principes à quelques exemples.

I. *Partager une longueur* AC (fig. 195) *en deux parties* CB, AB, *qui soient entre elles dans le rapport donné de* m *à* n. Soient $AC = a$, $CB = x$; on a $AB = a - x$, et, d'après la condition prescrite, $\frac{x}{a - x} = \frac{m}{n}$; d'où $x = \frac{am}{m + n}$. Sur une ligne quelconque EC, on prendra $CD = m$, $ED = n$, si m et n sont des lignes; si ce sont des nombres, on portera une ouverture de compas arbitraire m fois de C en D, et n fois de D en E. On mènera AE et sa parallèle BD; B sera le point cherché.

II. Étant données deux parallèles BC, DE (fig. 196), et un point A, mener par ce point une oblique AI, telle que la partie IK comprise entre les parallèles soit de longueur donnée $= c$. Menons AG perpend. sur DE, et faisons $AG = a$, $FG = b$, l'inconnue $GI = x$; on a $\frac{AI}{AG} = \frac{IK}{FG}$, ou $\frac{AI}{a} = \frac{c}{b}$; puis $AI^2 = a^2 + x^2$; donc $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{(c^2 - b^2)}$. On voit d'abord que le problème est