impossible quand b est $> c$, ou $FG > IK$. Pour construire cette valeur, du centre F, on décrira l'arc HH' avec le rayon c; GH sera $\sqrt{(c^2 - b^2)}$; AI parallèle à FH sera la ligne cherché, puisqu'on voit que IG est 4e proportionnelle à b, a et GH.

Il y a une seconde solution en AI'; c'est ce qu'indique le double signe de la valeur de x (*voy.* n° 338).

III. *Étant donnés deux points* A *et* B (fig. 197), *et une droite* DD', *décrire un cercle qui passe par ces deux points et soit tangent à la droite.* Il suffit de trouver le point D du contact. Soit donc prolongée la ligne AB en C; et fait $CD = x$, $CI = a$, $IB = b$, I étant le milieu de AB. La tangente CD donne (n° 228) $x^2 = CA \times CB = (a - b)(a + b)$; d'où $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Sur l'hypoténuse CI on tracera le triangle rectangle IEC, dont b et x sont les côtés de l'angle droit, en décrivant le demi-cercle CEI, prenant $EI = AI$; CE sera $x = CD$. Il y a une 2e solution en D', à cause de la valeur négative de x (n° 338).

IV. Deux parallèles AE', BF (fig. 198) et leur perpend. AB étant données, mener une sécante EF, telle que AC, moitié de AB, soit moyenne proportionnelle entre les segments AE, BF. Soient $AE = x$, $BF = y$, $AC = a$: on a $a^2 = xy$: le problème est donc *Indéterminé* (n° 117), et le nombre des solutions infini. Parmi les diverses manières de les obtenir, la suivante est assez élégante.

Soit $CD = r$, D étant le point de rencontre de la ligne cherchée EF, avec CD perpendiculaire sur AB en son milieu C; II' perpend. à CD donne les deux triangles égaux EDI, $I'DF$; ainsi, $y = r + IE$, $x = r - IE$, d'où $x + y = 2r$. Éliminant y de $a^2 = xy$, on a $x^2 - 2rx = -a^2$; r est ici arbitraire, et l'on a $x = r \pm \sqrt{(r^2 - a^2)}$. On devra donc prendre le point D, tel que r soit $> a$, ou $CD > AC$: le cercle décrit du centre D avec le rayon r donne $EI = \sqrt{(r^2 - a^2)}$; donc les points E et F d'intersection satisfont à la condition, ainsi que E' et F'. Chaque centre D donne ainsi deux solutions EF, $E'F'$.

V. *Par le point* A (fig. 204), *mener une corde* ABD *dont les segments* BA, AD *aient entre eux un rapport donné* $= \frac{m}{n}$. Menons le diamètre HAG; soit $CH = r$, $CA = b$, $AD = x$: on a $HA \times AG = BA \times AD$, d'où $r^2 - b^2 = x \times BA$; mais, par condition, $BA = \frac{mx}{n}$; donc $\frac{mx^2}{n} = r^2 - b^2$. Faisons $r^2 - b^2 = k^2$,

nous aurons $x = \sqrt{\frac{nk^2}{m}}$, quantité facile à construire. On pourrait lui donner la forme $x = \frac{k}{m}\sqrt{(mn)}$, et il faudrait trouver une moyenne et une 4e proportionnelle; mais on doit préférer le procédé suivant. Remplaçons le rapport de $\frac{m}{n}$ par celui des deux carrés: sur une ligne indéfinie (fig. 199), prenons DF et FE, tels qu'on ait $\frac{FE}{DF} = \frac{n}{m}$; décrivons le demi-cercle DAE, puis menons AF perpend. sur DE, et les cordes AD, AE; nous aurons $\frac{AE^2}{AD^2} = \frac{FE}{DF} = \frac{n}{m}$ (n° 227); ainsi $x = \frac{k \times AE}{AD}$: prenons donc $AB = k$ sur AD, prolongé s'il est nécessaire; BC parallèle à DE, donnera $AC = x$ (n° 216).

VI. *Un polygone étant donné, en construire un semblable, les aires étant dans le rapport connu de* m *à* n. Nommons A l'un des côtés du polygone donné, x son homologue inconnu; les aires étant $:: m : n$ d'une part, et aussi $:: A^2 : x^2$ de l'autre (n° 262); on a $\frac{A^2}{x^2} = \frac{m}{n}$, d'où $x = A\sqrt{\frac{n}{m}}$. On vient de construire cette expression (fig. 199); ainsi x est une longueur connue. Il ne reste plus qu'à former, sur le côté x homologue à A, une figure semblable à la proposée (n° 242). La même construction s'applique aussi aux cercles (n° 263, 3°); m et n sont ici des lignes ou des nombres donnés.

Pour trouver le rapport de deux figures données semblables, ABC...., abc.... (fig. 118), on prend sur les côtés d'un angle droit DAE (fig. 199) des parties AB, AC égales à deux lignes homologues des figures proposées: la droite BC est coupée par sa perpendiculaire AG en deux segments BG, CG, qui ont le même rapport que ces figures.

VII. *Cherchons une figure* X *semblable à une autre* P *et égale à une troisième* Q. P et Q sont donnés: prenons un côté A de P, et soit x son homologue inconnu, on a $\frac{P}{X} = \frac{A^2}{x^2}$, d'où $\frac{P}{Q} = \frac{A^2}{x^2}$, puisque $X = Q$. Soient M et N les côtés de deux carrés équivalents à P et Q (n° 257), ou deux carrés M^2 et N^2 qui aient même rapport que

ceux-ci (fig. 199); il en résultera $\frac{M}{N} = \frac{A}{x}$; ainsi x est 4e proportionnelle à M, N et A.

VIII. *Trouver deux lignes* x *et* y, *qui aient même rapport que deux parallélogrammes donnés.* Les bases étant B, b, les hauteurs H, h, on doit avoir $\frac{x}{y} = \frac{BH}{bh}$. Si l'on donne y, une construction facile (n° 323) fera connaître x. Mais si ces deux lignes sont inconnues, l'une est arbitraire; et l'on peut prendre $y = b$, d'où $x = \frac{BH}{h}$; x est alors une 4e proportionnelle à h, H et B. Ce problème revient à *construire un rectangle* hx, *dont on a la hauteur* h, *et dont l'aire équivaut à celle d'un rectangle donné* BH.

IX. *Pour construire* $\sqrt{n}$, on peut prendre une moyenne proportionnelle (n° 226) entre n et 1. On remarque (nos 238, 239) que si l'on décrit le cercle qui a l'unité pour rayon, en y inscrivant un carré et un triangle équilatéral, leurs côtés sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Quant à $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$...., la construction (n° 328) s'applique à cette recherche; car, sur l'angle droit CBA (fig. 194), prenons $AB = 2$, $CB = 1$, on aura $AC = \sqrt{5}$. De même, $CD = 1$, donne $AD = \sqrt{6}$, etc.

330. L'équation du second degré $x^2 + px = q$ suppose une ligne r prise pour une unité (n° 322); il faudrait donc remplacer q par qr, ou plutôt par m^2, en faisant $m^2 = qr$. Les racines de $x^2 + px = m^2$ sont $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}p^2)}$; on les construit aisément d'après les procédés généraux que nous avons indiqués; mais il est plus élégant d'opérer comme il suit :

1° Si l'on a $x^2 - px = -m^2$, comme $m^2 = x(p - x)$, m est moyen proportionnel entre x et $p - x$. Si donc on élève (fig. 200) $AD = m$ perpend. sur $AB = p$, puis si l'on décrit la demi-circonférence AEB sur le diamètre AB, DE' parallèle à AB donne les points E, E', pour lesquels la perpend. EF ou $E'F$ est moyenne proportionnelle entre les segments du diamètre. Les deux racines sont donc $x = AF$ et $x = AF'$.

2° Si l'on a $x^2 - px = m^2$, comme m est moyenne proportionnelle entre x et $x - p$, avec le rayon $AD = \frac{1}{2}p$ (fig. 103), on décrira le cercle AEF, puis prenant sur la tangente une longueur $AC = m$, la sécante CEF passant par le centre, donne $x = CE$ et $= -CF$, puisque $m^2 = CE \times CF$.

3° Si l'on a $x^2 + px = \pm m^2$, on fera la même construction que dans les cas précédents; seulement les racines sont changées de signe, puisqu'il suffit de changer x en $-x$, pour retomber sur les équ. déjà traités.

X. Soit proposé, par ex., de mener par le point A la corde BD (fig. 204), dont la longueur soit donnée $= c$. Conservant la notation du problème V, nous avons encore $r^2 - b^2$, ou $k^2 = x \times BA$, par condition; $BA = c - x$; donc $k^2 = (c - x)x$.

XI. *Couper une droite en moyenne et extrême raison;* il faut trouver sur la ligne $AC = a$ (fig. 103) un point B tel que le segment $BC = x$, soit moyen proportionnel entre la ligne AC, et le petit segment $AB = a - x$, d'où $x^2 = a(a - x)$, et

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

Le radical est l'hypoténuse CD du triangle rectangle ADC, dont le côté $AD = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AC$; ce triangle est facile à construire : on a donc $x = -\frac{1}{2}a + CD$. Du centre D, avec le rayon AD, décrivez le cercle EAF; CE est $= x$; on porte CE de C en B, et le problème est résolu, comme on l'a fait p. 247. Quant à la 2e racine, elle ne convient pas à la question; pour l'interpréter (n° 107), il faut changer x en $-x$ dans l'équ. ci-dessus qui devient $x^2 = a(a + x)$; et donne $x = \frac{1}{2}a + CD = CF$: on portera CF de C en D, et ce point D donnera DC moyen proportionnel en DA et CA. Les deux solutions conviendront à cette question : *Trouver sur la droite indéfinie* AC *un point* B ou D, *tel que sa distance au point* C *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* A *et la longueur* AC.

331. *Pour construire les formules de deux dimensions,* on les réduit à deux facteurs BH (comme n° 327); l'un est la base, l'autre la hauteur du rectangle, dont l'aire a pour valeur l'expression proposée. Ainsi, pour $x = \sqrt{cd(a^2 - b^2)}$, on fera $a^2 - b^2 = B^2$, $cd = H^2$; B et H seront des lignes faciles à trouver, et l'on aura $x = BH$, rectangle connu.

Mais si l'on veut que l'aire cherchée soit un parallélogramme ou un triangle, etc., comme la base et la hauteur ne suffisent plus pour déterminer la figure, le problème admet une infinité de solutions, et n'est déterminé que si l'on donne une autre condition, telle qu'un angle, ou le rapport des côtés, etc.

Pour former un triangle équivalent à un cercle dont le rayon

est $R = a\sqrt{\frac{m}{n}}$, on prendra le diamètre $2R$ pour base, et la hauteur sera une ligne h égale à la demi-circonférence, ou $h = \pi R = \frac{22}{7} a\sqrt{\frac{m}{n}}$. Ces valeurs se construisent par la fig. 199, et il reste ensuite à tracer un triangle dont on prend un angle à volonté.

332. *Toute formule à trois dimensions* se réduit à un produit de trois facteurs, $x = ABC$, qui sont les dimensions d'un parallélépipède rectangle, dont le volume est x. On peut aussi construire cette expression par un cube, ce qui constitue la *Cubature* des corps, ou par des tétraèdres, des cylindres, etc.

Sur les Signes des quantités dans l'Algèbre appliquée à la Géométrie.

333. Lorsque deux figures ne diffèrent l'une de l'autre que par la grandeur de leurs parties, qui y sont d'ailleurs disposées dans le même ordre, on dit que ces figures sont *Directes*. Si les quantités $a, b, c, d \ldots x$, qui composent la 1re, sont liées par une équation $X = 0$, elle a également lieu pour la 2e. Mais si les deux figures diffèrent en outre par la disposition de quelques-unes de leurs parties, de sorte, par exemple, qu'on ait $x = a - b$ dans la 1re et $x = b - a$ dans la 2e, on dit alors qu'elles sont *Indirectes* *. L'éq. $X = 0$, qui a eu lieu pour l'une, peut avoir besoin de quelques modifications pour devenir applicable à l'autre ; c'est ce qu'il s'agit d'examiner.

En nommant x le segment CD (fig. 190 et 193) formé par la perpendiculaire BD sur la base AC du triangle ABC, et a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, on a (page 241)

$$BD^2 = c^2 - AD^2 = a^2 - x^2,\ c^2 = a^2 + AD^2 - x^2 \ldots . \quad (1)$$

Mettant pour AD sa valeur $AC - CD = b - x$ (fig. 193), ou $AC + CD = b + x$ (fig. 190), on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx, \text{ ou } c^2 = a^2 + b^2 + 2bx. \ldots . \quad (2)$$

* *Carnot*, qui est l'auteur de cette théorie, qu'il a développée dans sa *Géométrie de position*, nomme *corrélatives directes* les figures directes, et *corrélatives inverses* les figures indirectes. Consultez cet excellent ouvrage.

Les figures 193 et 190 sont indirectes, puisque $x = b - AD$ dans l'une, et $x = AD - b$ dans l'autre : chacune des formules (2) n'est directement applicable qu'à l'une des fig. Mais la formule (1) appartenant à l'une et à l'autre, la substitution de la valeur de AD y a seule introduit des différences qui, ne provenant que du signe de x, montrent que l'une de ces équ. (2) doit se déduire de l'autre en changeant x en $-x$.

334. En général, si, entre les quantités $a, b, c \ldots . x$ qui composent deux figures indirectes, on a les équ. $X = 0$ pour l'une, et $X' = 0$ pour l'autre, il faut qu'il y ait au moins une ligne, telle que a, qui soit la somme dans la 1re fig., et la différence dans la 2e de deux autres b et x ; de sorte que $a = b - x$ pour l'une, et $a = b + x$ pour l'autre. Or, on peut toujours concevoir une troisième équ. $Y = 0$, vraie pour l'une et l'autre, et telle qu'on en déduise $X = 0$, ou $X' = 0$, suivant qu'on y mettra $b + x$, ou $b - x$ pour a.

Or, ces valeurs de a ne différant que par le signe de x, X et X' doivent se déduire l'une de l'autre en changeant x en $-x$. S'il y avait plusieurs quantités indirectes, il faudrait en dire autant de chacune d'elles. Indiquons les moyens de reconnaître ces quantités. Si l'on fait varier la position des points de la 2e fig. pour la rendre directe avec la 1re, en comparant les deux valeurs $x = b - a$ et $a - b$, on voit que a a dû devenir $> b$, de $< b$ qu'il était ; et comme la variation s'est faite en suivant la loi de continuité, il faut qu'on ait eu $a = b$: ainsi x a dû devenir nul.

Par ex., si C (fig. 193) se meut vers D et depasse ce point, afin que la fig. soit rendue directe avec 190, CD, ou x, a été nul lorsque C a passé sur D.

x peut être $= \frac{K}{a - b}$ pour l'une des fig., et $= \frac{K}{b - a}$ pour l'autre ; alors x aurait passé par l'infini. *C'est donc le propre des quantités indirectes de ne pouvoir être rendues directes par le mouvement continu des parties de l'une, sans se trouver dans l'intervalle devenir zéro ou infini.*

Lors donc qu'on a une équ. $X = 0$, *entre les lignes* a, b, c.... x *d'une figure, pour obtenir celle* $X' = 0$, *qui convient à une figure indirecte, il faut simplement changer le signe des quantités indirectes : on reconnaît celles-ci en faisant mouvoir les lignes de l'une des figures pour la rendre directe avec l'autre ; on distingue alors quelles sont*

celles des lignes a, b, c... x *qui passent par zéro ou par l'infini; ces dernières peuvent seules être indirectes.*

Mais ce caractère peut s'offrir sans que, pour cela, les lignes qui le présentent soient indirectes; il faut en outre que les relations qu'on tire des deux figures, à l'aide des théorèmes connus, servent, par leur comparaison, à distinguer les quantités indirectes, pour leur attribuer ensuite des signes contraires. C'est ainsi qu'après avoir reconnu que $CD = x$ devient zéro (fig. 193), quand C coïncide avec D, on doit ensuite tirer les valeurs de CD, qui sont $AC - AD$ (fig. 193), et $AD - AC$ (fig. 190); ce qui montre que x a un signe différent.

335. Appliquons cette théorie. Dans le triangle ABC (fig. 201), menons, par un point donné D, une droite DF, et cherchons le rapport α des deux triangles ABC, AEF. Faisons $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; menons DI parallèle à AC, et soient $AI = d$, $DI = f$, $AF = x$. Le rapport α est $= \frac{AE \times AF}{AC \times AB}$ (n° 264). Or, les triangles semblables AEF, DIF donnent $AE = \frac{fx}{x + d}$, d'où

$$abc\,(x + d) = fx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Cette équ. suppose que le point D est dans l'angle IAC; mais si ce point est en D' dans l'intérieur du triangle, on aura une figure indirecte à la première. Faisons mouvoir D vers D', DI deviendra $D'I'$, sans que α, b, c, ni f aient passé par 0 ou ∞ : AI devenant AI', a pu seul être indirect, et l'est en effet, puisque $AI = IB - AB$ et $AI' = AB - I'B$. Notre équ. n'est donc applicable à ce cas qu'après avoir changé d en $-d$, savoir $abc\,(x - d) = fx^2$.

Et si D' se transporte en D'', $D'I'$ passera par zéro pour être $D''I''$; on s'assure ensuite que $D'I'$ est indirecte, et que f doit être changé de signe, tandis que α, b, c, d restent comme ils étaient; d'où $abc\,(d - x) = fx^2$. Ce cas, comparé au 1er, a comporté deux indirectes d et f: $I'F$ l'est pareillement; mais cette ligne n'étant pas exprimée par l'une des lettres du calcul, il n'a pas été nécessaire d'y avoir égard.

Enfin, si la droite DF doit couper l'angle $F'AE'$ (fig. 201 *bis*), il est aisé de voir, en faisant tourner DF pour devenir DE', que AF deviendra AF' en passant par zéro, et qu'il faut changer x en $-x$ dans l'équ. (A), ce qui la change en la précédente.

Il est d'ailleurs facile de traiter directement chaque cas, et d'arriver aux équ. correspondantes : la théorie que nous exposons est précisément destinée à éviter de recommencer ainsi les calculs, et a prouver que l'une des équ. renferme toutes les autres, et qu'on peut en déduire celles-ci par de simples changements de signes. Conformément à l'esprit de l'Algèbre, une même équ. renfermera donc tous les cas; il ne faut que savoir interpréter cette langue pour en conclure toutes les circonstances que peut offrir la question.

336. Comme toute équ. doit donner la valeur de l'une des lettres qui y entrent, il se peut que précisément cette lettre soit celle qui a dû subir le changement de signe pour pouvoir s'appliquer à la figure proposée; alors on en tire une valeur négative, telle que $x = -k$, dont il est aisé de comprendre le sens. En effet, pour obtenir l'équ. $X = 0$, on a dû supposer le problème résolu, et construire une figure d'après l'état hypothétique des données et de l'inconnue. La solution négative qu'on obtient annonce que la figure supposée ne peut s'accorder avec la question, et qu'en formant cette figure, et la prenant pour base des raisonnements, on a introduit des conditions contradictoires. Si l'on change x en $-x$, l'équ. $X' = 0$ n'appartiendra plus qu'à une figure indirecte; c'est à celle-ci, et non à la figure supposée, que convient la solution $x = k$. On devra donc faire mouvoir les points de cette dernière, jusqu'à ce que $X' = 0$ convienne, en faisant, bien entendu, passer par 0 ou ∞ quelques lettres. Alors c'est à la figure ainsi modifiée que convient la solution $x = k$.

Appliquons ces considérations à divers exemples.

1. Étant donné un point D (fig. 201) hors du triangle ABC, mener la droite DF telle, que les deux triangles AEF, ABC soient dans un rapport donné α. D étant supposé dans l'angle IAC, on a trouvé l'équ. (A), page 318, d'où l'on tire deux solutions, l'une positive, qui détermine le point F; l'autre négative, et qui se rapporte à la fig. 201 *bis*, où DF' coupe l'angle $F'AE'$; cela suit de ce qui a été dit pour les cas où x est changé en $-x$ *.

* Voici divers problèmes de même nature. *Séparer d'un triangle donné* ABC, *un triangle* AEF, *qui soit à* ABC *dans le rapport connu de* m : n,

1° *Par une ligne menée du sommet* B, *ou d'un point* F *de la base*, fig. 134 (*voy.* n° 256 et page 271);

2° *Par une parallèle à la base* (*voy.* page 314);

3° *Par une ligne* EF *perpendiculaire à la base* AC, fig. 193, page 304.

Par le point D, *mener* DF *qui sépare, dans l'angle indéfini* CAB, *un triangle* AEF *égal à un carré donné* q^2. Fermons, par une droite quelconque BC, le triangle ABC, dont nous ferons l'aire $= r^2$, carré connu (n° 256) ; on suppose $r >$ ou $= q$. Par condition, q et r sont données. Voilà donc notre rapport connu $a = \frac{q^2}{r^2}$, et nous retombons sur le 1er problème *.

II. Étant donnée une corde AD (fig. 202), du point O, extrémité du diamètre CB qui lui est perpend., mener une droite OE telle, que la partie FE, comprise entre la corde et l'arc, soit de longueur donnée m. Soient $AB = a$, $BO = b$, $FE = m$ et $OF = x$; nous aurons $OF \times FE = AF \times FD$ ou $mx = (a + BF)(a - BF)$: or, $BF^2 = x^2 - b^2$; donc $mx = a^2 + b^2 - x^2$, d'où

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{4}m^2)}.$$

L'une de ces solutions est positive ; elle n'offre aucune difficulté, et se construit aisément : pour interpréter l'autre, changeant x en $-x$, nous aurons $mx = x^2 - a^2 - b^2 = BF^2 - a^2$; ce qui suppose $BF > a$ ou BD. Faisons donc tourner OF jusqu'en OF' ; on voit qu'alors a, b, x sont demeurés directs ; mais lorsque OF passe en D, FE et FD sont rendus nuls ; de plus $FD = BD - BF$ et $F'D = BF' - BD$: donc $F'D$ est indirect à FD. Il en est de même de $FE' = m$; car on a (n° 221) $FE = \frac{AF \times FD}{FO}$, où FD est indirect. Donc la solution qui convient à $F'O$ se trouve en changeant ici m en $-m$, ou, ce qui revient au même, x en $-x$.

La question admet donc deux solutions à droite de OB (et par conséquent deux à gauche) ; l'une est donnée par la racine positive **,

* Si, par le point donné, on mène une droite qui coupe un polygone quelconque, et en sépare une portion égale à un carré t^2, en prolongeant les deux côtés occupés par cette droite jusqu'à leur rencontre, l'aire extérieure au polygone, et comprise dans cet angle, étant désignée par A, celle qui est séparée de ce même angle est $t^2 + A$. Si donc on veut *séparer d'un polygone donné une aire* t^2 *connue*, il suffira de prolonger deux côtés quelconques, et de séparer de l'angle qu'ils forment, l'aire $t^2 + A$. On aura soin de comparer ainsi tous les côtés, deux à deux, pour obtenir toutes les solutions, en négligeant celles où la sécante se trouve ne couper l'un des côtés qu'à son prolongement. On pourrait encore, au lieu de donner t^2, *prescrire que la partie séparée du polygone fût à son aire dans le rapport donné de* m *à* n.

** Cet exemple prouve que le nombre des solutions d'une question n'est pas toujours donné par le degré de l'inconnue ; pour n'en omettre aucune, il faut faire varier la figure, la comparer avec toutes ses indirectes, en laissant toujours les données fixes.

l'autre par la racine négative. Du reste, il pourrait arriver que la question proposée n'admît pas les solutions indirectes ; c'est ce qui a lieu lorsque le problème exige que FE soit pris dans le cercle, et non au dehors : alors les solutions négatives deviennent insignifiantes ; on en a vu des exemples n° 330.

III. Quel est le segment sphérique $GADI$ (fig. 167) dont le volume est égal à celui du cône $CDIG$? On a vu, p. 299, que le secteur $DAG = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, en faisant la flèche $AI = h$; d'ailleurs le cône $CDGI = \frac{1}{3} CI \times$ cercle $DI = \frac{1}{3}(r - h)\pi k^2$, en faisant la demi-corde $DI = k$. La condition imposée revient à dire que le cône est la moitié du secteur, d'où $(r - h)k^2 = r^2 h$; mais DI est moyen proportionnel entre les segments du diamètre, ou $k^2 = h(2r - h)$; ainsi $(2r - h)(r - h) = r^2$, ou $h^2 - 3rh + r^2 = 0$, et $h = \frac{1}{2}r(3 \pm \sqrt{5})$. De ces deux solutions, celle qui répond à $+\sqrt{5}$ est insignifiante, puisqu'il faut visiblement que h soit $< 2r$.

337. Il est un genre de problèmes qui se rapportent à cette théorie, et qui méritent de nous arrêter.

Supposons qu'il faille déterminer, d'après des conditions données, un point B (fig. 203) sur une ligne fixe CB : on prend un point arbitraire A, qu'on nomme *Origine*, et l'on cherche la distance $AB = x$ entre ces deux points. Il peut arriver alors que l'équation $X = 0$, qui renferme les conditions du problème, admette une solution négative $x = -a$; il s'agit d'expliquer ce résultat.

On a vu que $x = a$ répond au problème proposé, en y supposant cependant que x devienne indirecte ; or, si le point B se meut vers C pour se placer en B', AB sera nul lorsque B tombera sur A ; ensuite AB deviendra indirecte ; car $AB = CB - CA$, et $AB' = CA - CB'$. Si donc rien n'indique, dans le problème, que le point cherché soit situé à droite de l'origine A, il est clair que la distance $x = a$, portée de A en B', c'est-à-dire à gauche, y satisfait. On voit même que la solution négative $x = -a$ indique, dans $X = 0$, une absurdité, qui provient de ce que, pour obtenir cette équation, on a supposé le point cherché placé en B, à droite de l'origine ; position contradictoire à celle que la question comporte, puisqu'on a donné à la figure hypothétique, d'après laquelle on a obtenu l'équ. $X = 0$, une forme indirecte de celle qu'elle devait affecter réellement. Cette erreur est rectifiée en plaçant B à gauche de A, en B'.

338. On doit conclure de là que *toutes les fois que le but d'un problème est de trouver, sur une ligne fixe, la distance d'un point inconnu*

à l'origine, il faut supprimer le signe des solutions négatives que donne le calcul, et en porter les valeurs en sens opposé à celui où on les avait placées pour obtenir l'équation.

C'est ce qu'on a pu remarquer dans le problème (n° 329, II), où l'on a porté aussi l'inconnue GI (fig. 196) de G en I'. De même, pour le problème III, on a pris $CD' = CD$ (fig. 197), et D' a été un nouveau point de contact du cercle cherché avec la droite DD', etc.

Résolvons encore ce problème.

Sur une ligne AC (fig. 203), quel est le point B′ dont les distances aux points fixes A et C forment un produit donné $= m^2$? Soit $AC = a$, $CB' = x$; on a $AB' = a - x$, d'où

$$x(a - x) = m^2, \quad \text{et } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - m^2)}.$$

Il sera facile de construire cette solution qui est double (n° 330). Si $m > \frac{1}{2}a$, x devient imaginaire; mais il ne faut pas en conclure qu'il y ait absurdité dans la question; car l'erreur peut provenir de ce qu'on a attribué au point cherché B' une position qui ne lui convenait pas. Plaçons-le donc en B, hors de l'espace AC, alors $CB = x$ donne $AB = x - a$, puis

$$x(x - a) = m^2, \quad \text{et } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + m^2)}.$$

Il en résulte que 1° si la question exige que le point demandé soit situé hors de AC, elle n'est jamais absurde, et ses deux solutions sont l'une en B, l'autre en E; celle-là provient de la racine positive, et celle-ci de la négative, ou $EC = AB$.

2° Si la question exige que le point soit situé entre A et C, elle est absurde, à moins que m ne soit $< \frac{1}{2}AC$, c'est-à-dire que le plus grand rectangle qu'on puisse faire avec les deux parties de AC est le carré de sa moitié (n° 97, III). On remarquera surtout que l'absurdité indiquée par le symbole imaginaire résulte précisément d'une erreur de position du point B, analogue à celle qui conduit ordinairement aux solutions négatives; ce qui jette un grand jour sur la théorie que nous avons développée.

3° Enfin, si la question laisse la liberté de placer le point cherché entre A et C, ou en dehors, elle admet 2 ou 4 solutions, suivant que $\frac{1}{2}a$ est $<$ ou $> m$. Dans ce dernier cas, le nombre des solutions n'est point donné par le secours de l'Algèbre seule, ou plutôt l'Algèbre donne en effet tout ce qu'elle doit donner, puisqu'elle ne rend que ce qu'on lui a confié. Le problème II, p. 320, est dans le même cas.

339. Dans tout problème de Géométrie, il y a, comme on voit, deux choses à remarquer.

1° *Toute équation n'est vraie que pour la figure d'où on l'a tirée, et qui doit y demeurer annexée; si l'on veut l'appliquer à une autre figure indirecte à la* 1re, *on devra y changer les signes de certaines lettres désignant les données.*

2° *Quand l'inconnue* x *est négative, l'équation d'où elle est déduite est défectueuse en tant qu'on l'applique à la figure directe; il faut y changer la distribution des parties, pour l'amener à donner une valeur de* x *positive. Par exemple, si la longueur* x *est comptée sur une ligne fixe, elle devra être portée en sens contraire à celui qu'on a supposé.*

340. Pour déterminer la situation d'un point M sur un plan (fig. 210), on a coutume d'employer le procédé suivant. On trace deux droites quelconques Ax, Ay, et par le point M on mene les parallèles MQ, MP à ces lignes. Soient $MQ = x = AP$, qu'on nomme l'*abscisse*; $MP = y = AQ$, qui est l'*ordonnée* du point M. Si ces longueurs sont données, le lieu du point M sera connu, puisqu'en prenant $AP = x$, $AQ = y$, chacune des lignes PM, QM, parallèles à Ay, Ax, devra contenir ce point; il sera donc à leur intersection. Si $y = 0$, le point est situé sur Ax; il est sur Ay lorsque $x = 0$; enfin, pour le point A, x et y sont nuls; Ax et Ay sont appelés les *axes*, A est l'*origine*, l'x et l'y sont des *coordonnées* de M.

Il est vrai que rien ne disant *à priori*, si le point est placé dans l'angle yAx, plutôt que dans ceux yAx', $y'Ax$, ou $y'Ax'$, la longueur x aurait pu être portée en AP', et de même y en AQ'; de sorte que les quatre points M, N, M', N', satisfaisant aux conditions données, il y aurait indécision entre eux : mais il suit de ce qu'on a dit ci-dessus, que, 1° si le *point est inconnu*, le calcul le déterminera en donnant ses coordonnées x et y, et selon les signes, on assignera sa position. Nous supposerons dorénavant que les x positives sont comptées de A vers la droite; et les y positives de A vers la partie supérieure. Ainsi, pour les points situés dans

L'angle yAx, *tel que* M,	x *et* y *sont positifs.*
L'angle yAx′, *tel que* N,	x *est négatif et* y *positif.*
L'angle y′Ax, *tel que* M′,	x *est positif et* y *négatif.*
L'angle x′Ay′, *tel que* N′,	x *et* y *sont négatifs.*

2° *Si le point est donné*, l'équation tirée de sa situation supposée n'aura besoin d'être modifiée, quant à certains signes, qu'autant

qu'on ferait varier la position de ce point; et pour éviter la nécessité de conserver la figure annexée à l'équation qui en est résultée, on suppose ordinairement au point quelconque donné la situation M dans l'angle yAx, afin que cette figure s'offre d'elle-même : on distingue aisément ensuite, quand on veut appliquer la formule à un exemple proposé, s'il y a lieu de changer les signes des coordonnées x et y de quelque point donné.

L'angle xAy des coordonnées est le plus souvent *droit;* alors les lignes x et y étant perpendiculaires aux axes, sont les distances du point M à ces droites, ce qui simplifie le discours et facilite les constructions.

CHAPITRE II.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Des Sinus, Cosinus, Tangentes, etc.

341. Jusqu'ici nous avons plutôt évalué les inconnues en lignes qu'en nombres; cependant on sent que l'exactitude des solutions graphiques dépendant de la perfection des instruments et de l'adresse avec laquelle on les emploie, pour obtenir des approximations aussi grandes qu'on veut, on doit préférer l'usage des nombres. Comme on décompose toutes les figures rectilignes en triangles, les opérations *géodésiques* les plus compliquées se réduisent, en dernière analyse, à des résolutions de triangles, c'est-à-dire à la recherche de la valeur *numérique* des diverses parties qui les composent. La *Trigonométrie* est la doctrine qui enseigne ces sortes de calculs.

Il est nécessaire de trouver des équ. qui lient les angles d'un triangle à ses côtés, afin que plusieurs de ces parties étant données, on puisse trouver les autres. L'introduction des angles dans le calcul exige quelques précautions, parce qu'ils ne peuvent être rapportés à la même unité que les lignes. On a remarqué que l'angle BCA (fig. 206) serait déterminé, si la position d'un point quelconque du côté BC l'était par rapport au côté AC. Décrivons du sommet C, avec un rayon quelconque CK, l'arc KG; l'abscisse CI et

l'ordonnée IK rectangulaires déterminent le point K, et par conséquent l'angle C; même une de ces longueurs suffit, parce que le rayon est connu.

L'abscisse (fig. 205) CD d'un point quelconque B de la circonférence s'appelle le *Cosinus* de l'arc AB; l'ordonnée BD en est le *Sinus;* on définit ainsi ces lignes : *le sinus d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité; le cosinus est la distance du pied du sinus au centre.*

342. Si l'on eût élevé HG (fig. 206) perpendiculaire sur CA, et par conséquent tangente en G, l'une des longueurs GH et CH aurait aussi déterminé l'angle C et l'arc KG : on nomme HG la *Tangente* et CH la *Sécante* de cet arc; ce ne sont plus, comme en Géométrie, des lignes indéfinies. *La tangente* AT *d'un arc* AB (fig. 205) *est la partie qu'interceptent, sur la tangente menée à l'une des extrémités de cet arc, les deux rayons qui le terminent; la sécante* CT *est le rayon prolongé jusqu'à la tangente.*

Lorsque l'arc EB, complément de AB, est déterminé, AB l'est également; on peut donc fixer la grandeur d'un arc AB, en donnant le sinus GB, la tangente EM, ou la sécante CM du complément BE; c'est ce qu'on nomme le *Cosinus,* la *Cotangente* et la *Cosécante* de l'arc AB, ou le sinus, la tangente et la sécante du complément de cet arc.

343. Le rayon étant donné, la grandeur d'un angle ou d'un arc dépend de celle de son sinus, ou son cosinus, ou sa tangente, ou sa sécante, ou sa cotangente, ou sa cosécante, qu'on désigne par *Sin, Cos, Tang, Séc, Cot, Coséc.* Nous pourrons donc, dans les calculs, introduire les arcs et les angles, en nous servant de la même unité que pour les lignes droites, but que nous nous étions proposé. Mais, avant de faire usage de ces considérations, comparons ces *lignes trigonométriques* entre elles, et cherchons les équ. qui les lient, puisqu'il est évident qu'*une seule étant connue, les autres en dépendent.*

Le triangle rectangle BCD (fig. 205) donne $CD^2 + BD^2 = CB^2$; CD est le cosinus, DB le sinus de l'arc $AB = a$, CB est le rayon R; donc

$$\sin^2 a + \cos^2 a = R^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Le triangle rectangle CAT donne $CT^2 = CA^2 + AT^2$.

$$\text{séc}^2 a = \text{tang}^2 a + R^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$