qu'on ferait varier la position de ce point; et pour éviter la nécessité de conserver la figure annexée à l'équation qui en est résultée, on suppose ordinairement au point quelconque donné la situation $M$ dans l'angle $yAx$, afin que cette figure s'offre d'elle-même : on distingue aisément ensuite, quand on veut appliquer la formule à un exemple proposé, s'il y a lieu de changer les signes des coordonnées $x$ et $y$ de quelque point donné.

L'angle $xAy$ des coordonnées est le plus souvent *droit;* alors les lignes $x$ et $y$ étant perpendiculaires aux axes, sont les distances du point $M$ à ces droites, ce qui simplifie le discours et facilite les constructions.

---

## CHAPITRE II.

### TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

### *Des Sinus, Cosinus, Tangentes, etc.*

341. Jusqu'ici nous avons plutôt évalué les inconnues en lignes qu'en nombres; cependant on sent que l'exactitude des solutions graphiques dépendant de la perfection des instruments et de l'adresse avec laquelle on les emploie, pour obtenir des approximations aussi grandes qu'on veut, on doit préférer l'usage des nombres. Comme on décompose toutes les figures rectilignes en triangles, les opérations *géodésiques* les plus compliquées se réduisent, en dernière analyse, à des résolutions de triangles, c'est-à-dire à la recherche de la valeur *numérique* des diverses parties qui les composent. La *Trigonométrie* est la doctrine qui enseigne ces sortes de calculs.

Il est nécessaire de trouver des équ. qui lient les angles d'un triangle à ses côtés, afin que plusieurs de ces parties étant données, on puisse trouver les autres. L'introduction des angles dans le calcul exige quelques précautions, parce qu'ils ne peuvent être rapportés à la même unité que les lignes. On a remarqué que l'angle $BCA$ (fig. 206) serait déterminé, si la position d'un point quelconque du côté $BC$ l'était par rapport au côté $AC$. Décrivons du sommet $C$, avec un rayon quelconque $CK$, l'arc $KG$; l'abscisse $CI$ et



l'ordonnée $IK$ rectangulaires déterminent le point $K$, et par conséquent l'angle $C$; même une de ces longueurs suffit, parce que le rayon est connu.

L'abscisse (fig. 205) $CD$ d'un point quelconque $B$ de la circonférence s'appelle le *Cosinus* de l'arc $AB$; l'ordonnée $BD$ en est le *Sinus;* on définit ainsi ces lignes : *le sinus d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité; le cosinus est la distance du pied du sinus au centre.*

342. Si l'on eût élevé $HG$ (fig. 206) perpendiculaire sur $CA$, et par conséquent tangente en $G$, l'une des longueurs $GH$ et $CH$ aurait aussi déterminé l'angle $C$ et l'arc $KG$ : on nomme $HG$ la *Tangente* et $CH$ la *Sécante* de cet arc; ce ne sont plus, comme en Géométrie, des lignes indéfinies. *La tangente* AT *d'un arc* AB (fig. 205) *est la partie qu'interceptent, sur la tangente menée à l'une des extrémités de cet arc, les deux rayons qui le terminent; la sécante* CT *est le rayon prolongé jusqu'à la tangente.*

Lorsque l'arc $EB$, complément de $AB$, est déterminé, $AB$ l'est également; on peut donc fixer la grandeur d'un arc $AB$, en donnant le sinus $GB$, la tangente $EM$, ou la sécante $CM$ du complément $BE$; c'est ce qu'on nomme le *Cosinus*, la *Cotangente* et la *Cosécante* de l'arc $AB$, ou le sinus, la tangente et la sécante du complément de cet arc.

343. Le rayon étant donné, la grandeur d'un angle ou d'un arc dépend de celle de son sinus, ou son cosinus, ou sa tangente, ou sa sécante, ou sa cotangente, ou sa cosécante, qu'on désigne par *Sin, Cos, Tang, Séc, Cot, Coséc.* Nous pourrons donc, dans les calculs, introduire les arcs et les angles, en nous servant de la même unité que pour les lignes droites, but que nous nous étions proposé. Mais, avant de faire usage de ces considérations, comparons ces *lignes trigonométriques* entre elles, et cherchons les équ. qui les lient, puisqu'il est évident qu'*une seule étant connue, les autres en dépendent.*

Le triangle rectangle $BCD$ (fig. 205) donne $CD^2 + BD^2 = CB^2$; $CD$ est le cosinus, $DB$ le sinus de l'arc $AB = a$, $CB$ est le rayon $R$; donc

$$\sin^2 a + \cos^2 a = R^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Le triangle rectangle $CAT$ donne $CT^2 = CA^2 + AT^2$.

$$\text{séc}^2\, a = \text{tang}^2\, a + R^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les triangles semblables $CBD$, $CTA$ donnent

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CA}{AT} \text{ et } \frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CT},$$

ou

$$\text{tang } a = \frac{R \sin a}{\cos a}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\text{séc } a = \frac{R^2}{\cos a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette dernière formule prouve que *le rayon est moyen proportionnel entre le cosinus et la sécante :* du reste, les équ. (1), (2) et (3), suffisant pour exprimer que les triangles $CBD$, $CTA$ sont rectangles et semblables, la 4e est une conséquence des trois autres. Ainsi, on ne doit pas regarder ces quatre relations comme distinctes ; elles n'équivalent qu'à trois. On peut même s'en convaincre directement en déduisant l'une quelconque des autres par l'élimination.

344. Ces formules doivent aussi avoir lieu entre le sinus, le cosinus, la tangente et la sécante de l'arc $EB$ complément de $AB$. On peut donc y changer le sinus en cosinus, la tangente en cotangente, etc. ; mais les triangles semblables $CBD$ (ou $CBG$), et $CME$, donnent directement ces nouvelles relations ;

on a

$$\frac{CG}{CE} = \frac{GB}{EM}, \quad \frac{CG}{CB} = \frac{CE}{CM}; \text{ d'où}$$

$$\cot a = \frac{R \cos a}{\sin a} \ldots . \ (5); \quad \text{et} \quad \text{cosec } a = \frac{R^2}{\sin a}. \quad . \quad . \quad (6)$$

En multipliant les formules 3 et 5, ou comparant les deux triangles $CTA$ et $CME$, on trouve que *le rayon est moyen proportionnel entre la tangente et la cotangente,* ou

$$\text{tang } a \times \cot a = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Enfin, le triangle rectangle $CME$ donne

$$CM^2 = CE^2 + EM^2, \text{ ou } \text{cosec}^2 a = R^2 + \cot^2 a. \quad . \quad . \quad (8)$$

345. Ces 8 équ., qui n'en forment que 5 distinctes, servent à trouver les quantités sin $a$, cos $a$, tang $a$, cot $a$, séc $a$, cosec $a$ lorsque l'une est connue. Il suffit d'un calcul simple pour éliminer. Par ex., l'équ. (1) donne le sinus quand le cosinus est connu, et réciproquement ; car

$$\sin a = \sqrt{(R^2 - \cos^2 a)}, \quad \text{et } \cos a = \sqrt{(R^2 - \sin^2 a)}.$$



De même, l'éq. (2) donne la tangente quand on a la sécante, etc....

346. Parmi ces combinaisons, nous distinguerons la suivante à cause de son utilité. Cherchons le cosinus, étant donnée la tangente. De (4), on tire $\cos a = \frac{R^2}{\text{séc } a}$ ; et comme (2) donne $\text{séc } a = \sqrt{(R^2 + \text{tang}^2 a)}$, on en conclut

$$\cos a = \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + \text{tang}^2 a)}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

enfin, (3) donnant $R \sin a = \cos a \times \text{tang } a$, on a

$$\sin a = \frac{R \text{ tang } a}{\sqrt{(R^2 + \text{tang}^2 a)}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

On appelle $AD$ le *sinus verse* de l'arc $AB$ ; d'où

$$\text{sin verse } a = R - \cos a.$$

347. Par sin $a$, cos $a$...., il faut entendre le sinus, cosinus.... d'un arc dont la longueur est $a$, le rayon étant fixé $= R$ ; or, cette longueur dépend du rapport de l'arc $a$, avec le quadrans, et sa détermination semble exiger un calcul ; mais lorsqu'on emploie les arcs pour mesurer des angles, le rayon est tout à fait arbitraire ; les arcs semblables étant proportionnels aux rayons (n° 182, 3°), ce n'est plus la longueur absolue $a$ de l'arc qui entre dans les calculs, mais son rapport avec le rayon. Les sinus croissent aussi proportionnellement aux rayons, l'angle demeurant le même (fig. 206), puisqu'on a $\frac{KI}{CK} = \frac{BA}{CB}$. Le rapport du sinus au rayon s'appelle le *Sinus naturel ;* il a pour valeur le sinus de l'arc semblable pris dans le cercle dont le rayon est *un,* puisque sin $a$ et $\frac{\sin a}{R}$ sont alors équivalents.

Concluons de là que, 1° lorsque le rayon sera ainsi arbitraire, ce qui arrive la plupart du temps, nous ferons $R = 1$, pour simplifier les formules ; d'où

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad \text{tang}^2 a + 1 = \text{séc}^2 a, \quad \text{tang } a \,.\, \cot a = 1,$$

$$\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \text{séc } a = \frac{1}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}, \text{ etc.}$$

2° Mais la supposition $R = 1$ rendant les calculs propres aux cas seulement où le rayon est arbitraire, si l'on veut rétablir les

formules dans l'état plus général où le rayon $R$ est déterminé, on y remplacera $\sin a$, $\cos a \ldots$, par $\frac{\sin a}{R}$, $\frac{\cos a}{R} \ldots$, ou plutôt on distribuera des puissances convenables de $R$, de manière à produire l'homogénéité (n° 322).

3° Lorsqu'on connaîtra la valeur numérique $\sin a$ du sinus d'un arc $a$, pris pour un rayon $R$, on aura celle du sinus de l'arc $a'$ semblable, dans le cercle dont le rayon est $R'$, en multipliant par le rapport du deuxième rayon $R'$ au premier $R$, car

$$\frac{\sin a}{R} = \frac{\sin a'}{R'} \text{ donne } \sin a' = \frac{R'}{R} \times \sin a.$$

4° *Dans la mesure des angles, on n'emploie pas la longueur absolue des arcs, mais leur rapport au quadrans;* ainsi, par $\sin a$, on entend le sinus d'un arc dont $a$ est le nombre de degrés (*voy.* n° 183).

348. L'arc de cercle (de rayon $R$) dont la longueur est $a$, ayant pour graduation $(a^\circ)$, exprimée en degrés et fractions décimales, ou $(a')$ en minutes, ou $(a'')$ en secondes, cherchons des relations entre ces quantités. Le rayon étant 1, la longueur de la demi-circonférence est (page 261)

$$\pi = 3{,}14159\ 26536, \qquad L\pi = 0{,}49714\ 98727\,;$$

$\pi$ est la longueur de 180° ou de 10800, ou de 648000″; on a $180^\circ : \pi :: (a^\circ) : a$, d'où $\pi(a^\circ) = 180 \,.\, a$; de même $\pi(a') = 10800 \,.\, a$, $\pi(a'') = 648000 \,.\, a$; donc, en divisant par $\pi$, et posant

$$\mu = 57^\circ{,}29578,\ \mu' = 3437',746,\ \mu'' = 206264'',8,$$

on a $\qquad R(a^\circ) = \mu a,\ R(a') = \mu' a,\ R(a'') = \mu'' a.$

*Ces équ. donnent la longueur* a *d'un arc de rayon* R, *dont on connaît la graduation, et réciproquement.*

Si l'on fait $a = R$, on a $(a^\circ) = \mu$; $\mu$ est donc *le nombre de degrés de l'arc égal au rayon;* $\mu'$, $\mu''$ sont les nombres de minutes ou de secondes de cet arc. Courbons le rayon sur la circonférence, il y occupera une longueur de $(a^\circ)$ degrés, ou de $(a')$ minutes, ou de $(a'')$ secondes. Prenons ensuite un arc d'un degré, ou $(a^\circ) = 1$, le rayon $R$ étant 1; nous avons

$$\mu = \frac{1}{\text{arc } 1^\circ};\ \text{de même } \mu' = \frac{1}{\text{arc } 1'} = \frac{1}{\sin 1'},\ \mu'' = \frac{1}{\text{arc } 1''} = \frac{1}{\sin 1''},$$

attendu que les arcs de 1′ et de 1″ étant très-petits, on peut, sans



erreur sensible, les remplacer par leurs sinus (n° 362). On conclut de là que *lorsqu'il entre, dans une expression analytique, un arc de cercle déterminé par sa longueur* a, *le rayon étant un, pour y introduire à la place le nombre de secondes* (a″) *de cet arc, il suffit de remplacer* a *par* (a″) *sin* 1″; *et par* (a′) *sin* 1′ *si l'on veut exprimer l'arc en minutes.* On trouve

| | |
|---|---|
| $\text{Log } \mu = 1{,}75812\ 26324,$ | $\text{compl.} = \bar{2}{,}24187\ 73676,$ |
| $\text{Log } \mu' = 3{,}53627\ 38828,$ | $\text{compl.} = \bar{4}{,}46372\ 61172 = L \sin 1',$ |
| $\text{Log } \mu'' = 5{,}31442\ 51332,$ | $\text{compl.} = \bar{6}{,}68557\ 48668 = L \sin 1'',$ |

349. Jusqu'ici notre arc $AB$ est $<$ le quadrans (fig. 205); faisons mouvoir le point $B$ de $A$ vers $EHA'K \ldots$ pour lui faire décrire le cercle entier, et suivons les variations qu'éprouvent le sinus et le cosinus. En $A$ le sinus $= 0$, le cosinus $= R$. A mesure que l'arc $AB$ croît, le sinus augmente, le cosinus diminue, jusqu'en $E$; le quadrans $AE$ a $R$ pour sinus et 0 pour cosinus.

Passé 45 degrés sexagésimaux, un arc, tel que 53°, ayant pour complément 37°, le sinus de l'un est le cosinus de l'autre : ayant donc une table de sinus et de cosinus, étendue jusqu'à 45°, la colonne des cosinus est aussi celle des sinus des arcs complémentaires, qui sont $>$ 45°; on a même soin d'y indiquer ces compléments.

Au delà de $AE = 90^\circ$, le sinus décroît, le cosinus augmente : on voit que, pour $AEH$, les triangles égaux $HIC = BDC$ ont $HI = BD$; ainsi, *le sinus d'un arc est le même que celui de son supplément.* La même chose a lieu pour le cosinus, car $IC = CD$; seulement, lorsque l'arc est $>$ 1q le cosinus est négatif (n° 340). Pour la demi-circonf. $AEA'$, le sinus $= 0$, le cosinus $= -R$.

Nous voyons donc que passé 90°, les sinus et cosinus se reproduisent; pour 137° le sinus est le même que celui de 43°, qui en est le supplément : on peut même préférer le cosinus de 47° qui lui équivaut; $\sin 137^\circ = \sin 43^\circ = \cos 47^\circ$. On voit qu'*il suffit d'ôter* 9 *aux dizaines et de changer le sinus en cosinus, lorsque l'arc passe* 90°. Cette remarque est surtout utile lorsque l'arc est accompagné de minutes et de secondes; de même,

$$\cos 137^\circ\ 17'\ 32'' = -\sin 47^\circ\ 17'\ 32''.$$

Quant aux autres lignes trigonométriques, on pourrait suivre de même sur la figure leurs variations et leurs signes; mais il est préférable de recourir aux formules 3, 4, 5, 6, puisque l'on vient

de reconnaître les signes du sinus et du cosinus. On verra donc que

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = R$, donnent $\text{tang}\, 0 = 0$, $\text{séc}.\, 0 = R$, $\cot 0 = \infty$,
$\sin 1^q = R$, $\cos 1^q = 0$ . . . . . $\text{tang}\, 1^q = \infty = \text{séc}\, 1^q$, $\cot 1^q = 0$.

Dans le premier quadrans $\text{tang}\, a$, $\text{séc}\, a$ croissent avec $a$; $\cot a$ décroît : $\sin a$ est positif dans le second quadrans, $\text{tang}\, a$, $\text{séc}\, a$ décroissent, $\cot a$ croît avec l'arc $a$; $\text{tang}\, a$ et $\cot a$ sont négatifs. On voit, comme ci-dessus, que $\text{tang}\, 137^\circ = -\cot 47^\circ$, . . . . . $\cot 137^\circ = -\text{tang}\, 47^\circ$.

Dans les deux autres quadrans, le sinus et le cosinus reprenant les mêmes valeurs, on voit que *tout arc plus grand que le quadrans, a pour sinus, cosinus, tangente.... la même valeur, en ôtant* 180° *autant de fois qu'il est possible;* seulement il faut avoir égard aux signes; ceux du sinus et du cosinus sont connus et servent à déterminer les autres. Ainsi,

$$\sin 257^\circ = -\sin 77^\circ,\ \text{tang}\, 643^\circ = \text{tang}\, 103^\circ = -\cot 13^\circ.$$

Ces diverses propositions s'expriment ainsi : pour l'arc

1 quad. $+ a$.... le $\sin = \cos a$, le $\cos = -\sin a$, la $\text{tang} = -\cot a$.
2 quad. $+ a$.... le $\sin = -\sin a$, le $\cos = -\cos a$, la $\text{tang} = \text{tang}\, a$.
3 quad. $+ a$.... le $\sin = -\cos a$, le $\cos = \sin a$, la $\text{tang} = -\cot a$.

Si l'arc passe 4 quadrans, ou 360°, il faut d'abord en retrancher toutes les circonférences. On voit maintenant pourquoi les tables de sinus, cos.... ne s'étendent pas au delà du quadrans, ni même du demi-quadrans.

350. Lorsque l'arc est déterminé, son sinus, sa tangente, son cosinus.... le sont; mais l'inverse n'est point vrai; ainsi le sinus $BD$ (fig. 205) appartient non-seulement à l'arc $AB$, mais aussi à son supplément $AH$, et à ces arcs $AB$ et $AH$, augmentés d'un nombre quelconque de circonférences. Tous ces arcs ne donnent que deux angles suppléments l'un de l'autre. On fera le même raisonnement pour les cos.... On doit donc s'attendre à trouver deux angles pour solutions, toutes les fois que le calcul aura déterminé le sin ou le cos....; il reste ensuite à négliger, s'il y a lieu, celle qui ne convient pas au problème.

351. En regardant l'arc $AF$ comme étant de signe contraire à $AB$, on voit que (page 323)

$$\sin(-a) = -\sin a,\ \cos(-a) = \cos a,\ \text{tang}(-a) = -\text{tang}\, a....$$



## *Des Formules générales.*

352. La résolution des triangles est renfermée dans un nombre convenable d'équ. entre les côtés et les angles.

En prolongeant $BD$ (fig. 205), on a $BD = \frac{1}{2} BF$; ainsi le *sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double.*

Si $BF$ est égal au rayon, il sera le côté de l'hexagone régulier inscrit (238); $BAF$ sera le sixième de la circonf., et $BA$ sera le tiers de $AE$. *Le sinus du tiers du quadrans est donc la moitié du rayon.* Les formules (1), (3), (5), donnent

$$\sin \tfrac{1}{3}q = \tfrac{1}{2}R,\ \cos \tfrac{1}{3}q = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3},\ \text{tang}\, \tfrac{1}{3}q = \frac{R}{\sqrt{3}},\ \cot \tfrac{1}{3}q = R\sqrt{3};$$

on connaît aussi $\sin \frac{2}{3}q$, puisque $\cos \frac{2}{3}q = \sin \frac{1}{3}q$ : d'où

$$\sin \tfrac{2}{3}q = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3},\ \cos \tfrac{2}{3}q = \tfrac{1}{2}R,\ \text{tang}\, \tfrac{2}{3}q = R\sqrt{3},\ \cot \tfrac{2}{3}q = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

353. Lorsque l'arc $AB$ (fig. 205) est de 45°, ou la moitié de $AE$, le triangle $CTA$ est isocèle; ainsi on a $AT = AC$, ou *la tangente de 45° est égale au rayon.* Donc

$$\text{tang}\, 45^\circ = R = \cot 45^\circ,\ \cos 45^\circ = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2} = \sin 45^\circ,$$
$$\text{tang}\, 135^\circ = -R = \cot 135^\circ,\ \sin 135^\circ = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2} = -\cos 135^\circ.$$

354. Soit $CAB$ (fig. 206) un triangle rectangle en $A$; si d'un angle aigu $C$, avec le rayon $CK = 1$, on décrit l'arc $KG$, et si l'on mène le sinus $KI$ et la tangente $HG$, $CI$ sera le cosinus de $C$; or, les triangles semblables $CKI$, $CHG$, $CAB$ donnent

$$\frac{CK}{CI} = \frac{CB}{CA},\quad \frac{CK}{KI} = \frac{CB}{AB} \text{ et } \frac{CG}{GH} = \frac{CA}{AB};$$

d'où $\quad CA = CB \times \cos C,\quad AB = CB \times \sin C,$

et $\quad AB = CA \times \text{tang}\, C.$

Celle-ci est le quotient de la 2e divisée par la 1re.

Donc, 1° *Un côté de l'angle droit est le produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle aigu compris.* . . . . . (*A*)

2° *Un côté de l'angle droit est le produit de l'autre côté par la tangente de l'angle aigu adjacent à celui-ci.* . . . . . (*B*)

Nous représenterons les angles par $A$, $B$ et $C$, et les côtés qui leur sont respectivement opposés par $a$, $b$ et $c$. Ainsi, $a$ étant l'hypoténuse, $A = 90°$, on a

$$b = a \cos C, \quad c = a \cos B = a \sin C, \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$
$$c = b \operatorname{tang} C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

355. Si de l'angle $B$ (fig. 193) du triangle quelconque $ABC$, on abaisse la perpendiculaire $BD$, l'angle $B$ sera coupé en deux angles, qui seront les compléments respectifs de $A$ et $C$. Nos théorèmes ci-dessus donnent $BD = AB \,.\, \sin A$, $BD = BC \,.\, \sin C$; d'où $c \sin A = a \sin C$; donc,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

puisqu'on peut abaisser la perpendiculaire de l'angle $C$ ou $A$. Ainsi, *tout triangle a les sinus de ses angles proportionnels aux côtés opposés.*

En désignant par $x$ le segment $DA$ (222), on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$; mais le triangle rectangle $BDA$ donne $DA = BA \times \cos A$, ou $x = c \cos A$; donc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Si la perpendiculaire $BD$ (fig. 190) tombe hors du triangle, il faut $+ 2bx$ au lieu de $- 2bx$. Mais comme alors l'angle $BCA$ est obtus, le cosinus devenant négatif, le signe de $- 2bc \cos A$ redevient positif, et se rétablit de lui-même; donc notre formule s'applique à tous les cas (339).

Les équ. $A$ et $B$ servent à résoudre les triangles rectangles; $C$ et $D$ servent pour les triangles obliquangles (*voy.* n° 363).

356. Soient deux arcs (fig. 207) $AB = \alpha$, $BD = \beta$; cherchons les sinus et cosinus de leur somme $AD$, et de leur différence $AK$, connaissant les sinus et cosinus de $\alpha$ et $\beta$. Menons la corde $DK$ au milieu $I$ de laquelle le rayon $CB$ est perpendiculaire; puis les parallèles $EI$, $KH$ à $AC$, et les perpendiculaires $DP$, $IG$ et $KO$; $DP$ est le sinus de $AD = (\alpha + \beta)$; $KO$ est celui de $AK = \alpha - \beta$; les cosinus sont $CP$ et $CO$: ces quatre quantités sont les inconnues du problème.



On voit que $DE = EH$: $DE$ et $IG$ ont donc pour somme $IG + DE$, ou . . . . . $DP = \sin(\alpha + \beta)$,
et pour différence $IG - DE = HP$, ou $KO = \sin(\alpha - \beta)$;
de même $EI$ étant la moitié de $HK$, on a $PG = GO = EI$; ainsi $CG$ et $EI$ ont
pour somme . . . . . $CO = \cos(\alpha - \beta)$,
et pour différence . . . . . $CP = \cos(\alpha + \beta)$,

$$\text{donc } \sin(\alpha \pm \beta) = IG \pm DE, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = CG \mp EI.$$

Il ne reste plus pour obtenir $IG$, $DE$, $CG$, $EI$ qu'à appliquer l'équ. $A$ aux triangles rectangles $CIG$, $DEI$, où l'angle $EDI = \alpha$. Il vient $IG = CI \times \sin\alpha$, $DE = DI \cos\alpha$; or, $DI = \sin\beta$ et $CI = \cos\beta$; ainsi, on a

$$IG = CI \times \sin\alpha = \sin\alpha \cos\beta,$$
$$DE = DI \times \cos\alpha = \sin\beta \cos\alpha;$$
on a de même $$CG = CI \times \cos\alpha = \cos\alpha \cos\beta,$$
$$EI = DI \times \sin\alpha = \sin\alpha \sin\beta;$$
d'où $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha, \quad . \quad . \quad (E)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta. \quad . \quad . \quad (F)$$

Ces quatre formules sont d'un usage très-fréquent. Si le rayon, au lieu d'être $= 1$, était $R$, on mettrait simplement $R$ pour diviseur des seconds membres (347, 2°).

357. Faisons $\alpha = \beta$ dans ces formules; en prenant le signe supérieur, on trouve

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cos\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

à cause de $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Telles sont les valeurs du sinus et du cosinus du double de l'arc $\alpha$*.

* Pour avoir les sinus et cosinus de $3\alpha$, on fait $\beta = 2\alpha$, ce qui donne. . . . . $\sin 3\alpha = \sin\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos\alpha$, $\cos 3\alpha =$ etc.; mais il faut mettre pour $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$ leurs valeurs, et il vient

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha.$$

Il est aisé de voir qu'en résolvant ces équ. par rapport à $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, on aurait les sinus et cosinus du tiers; on obtiendrait de même ceux de $4\alpha$ et $\frac{1}{4}\alpha$, etc. (*voy.* ci-après, n° 358).

358. Si l'on regarde dans ces équations $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ comme inconnus, et $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ comme donnés, il faudra éliminer entre elles. Mais comme le calcul serait compliqué, on préfère employer, au lieu de la 1re, $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$; alors en ajoutant $H$, ou en soustrayant, on obtient de suite

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

Si donc on change ici $2\alpha$ en $\alpha$, ce qui est permis, on a

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)}, \quad . \quad (I)$$

équ. qui donnent les sin. et cos. de la moitié d'un arc. La formule de la page 327 devient ainsi propre au calcul des log.

$$\text{sin verse } \alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha.$$

359. Divisons l'une par l'autre les formules $E$ et $F$, il vient

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}.$$

Or, si l'on divise les deux termes du 2e membre par $\cos\alpha\cos\beta$, en remarquant que $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on obtient *

$$\text{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha \pm \text{tang}\,\beta}{1 \mp \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K)$$

qui donne la tangente de la somme et de la différence de deux arcs. Si $\alpha = \beta$, on a celle du double,

$$\text{tang}\,2\alpha = \frac{2\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (L)$$

* On a de même $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$. (1)

Si l'on fait $\alpha = 45°$, comme $\text{tang}\,45° = 1$, il vient

$$\text{tang}(45° \pm \beta)\ \frac{1 \pm \text{tang}\,\beta}{1 \mp \text{tang}\,\beta}, \quad (2)$$

De même, les formules $E$ et $F$ donnent

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta}; \quad (3)$$

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \mp \beta)} = \frac{\cot\beta \pm \cot\alpha}{\pm 1 + \cot\alpha\cot\beta} = \frac{\text{tang}\,\alpha \pm \text{tang}\,\beta}{1 \pm \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}; \quad (4)$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta - \text{tang}\,\alpha}{\cot\beta + \text{tang}\,\alpha} = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}. \quad (5)$$



En divisant l'une par l'autre les équ. $(I)$, il vient

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

360. Ajoutons et soustrayons les équ. $E$; il vient *

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\,.\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,.\sin\beta.$$

Divisons ces formules l'une par l'autre, et faisons, pour abréger, $\alpha + \beta = C$, et $\alpha - \beta = B$; d'où l'on tire (p. 134)

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(C+B), \quad \beta = \tfrac{1}{2}(C-B).$$

Donc $\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\beta} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(C+B)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(C-B)}$.

*La somme des sinus de deux arcs est à leur différence comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est à la tangente de leur demi-différence.*

* Le même calcul sur les équ. $E$ et $F$, combinées deux à deux, donne diverses autres formules qui servent à remplacer des sommes et différences de sin et cos par des produits et des quotients, pour pouvoir faciliter le calcul logarithmique (voy. *Introd. d'Euler à l'Anal. des inf.*).

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A \pm B)\,.\cos\tfrac{1}{2}(A \mp B), \quad (6)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\cos\tfrac{1}{2}(A-B), \quad (7)$$

$$\cos B - \cos A = 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,.\sin\tfrac{1}{2}(A-B); \quad (8)$$

faisant $A = 90°$ dans la 1re, et $B = 0$ dans les deux autres,

$$1 + \sin B = 2\sin\left(45° + \tfrac{1}{2}B\right)\cos\left(45° - \tfrac{1}{2}B\right) = 2\sin^2\left(45° + \tfrac{1}{2}B\right);$$

$$1 - \sin B = 2\cos^2\left(45° + \tfrac{1}{2}B\right) = 2\sin^2\left(45° - \tfrac{1}{2}B\right); \quad (9)$$

$$1 + \cos A = 2\cos^2\tfrac{1}{2}A; \qquad 1 - \cos A = 2\sin^2\tfrac{1}{2}A. \quad (10)$$

Faisant, dans $(M)$, $\alpha = 90° + \alpha$, on a $\text{tang}\left(45° + \tfrac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$. (11)

Multipliant entre elles les équ. (6) ou (7) et (8), et réduisant,

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A = \sin(A+B) \times \sin(A-B),$$
$$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B) \times \cos(A-B). \quad (12)$$

On a vu (n° 355, fig. 182), $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$, d'où l'on tire (n° 73, 2°)

$$\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{c+b}{c-b};$$

d'une autre part, $A + B + C = 180°$ donne $\frac{1}{2}(C+B) = 90° - \frac{1}{2}A$, puis, $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C+B) = \cot \frac{1}{2} A$ : donc enfin

$$\frac{c+b}{c-b} = \frac{\cot \frac{1}{2} A}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C-B)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (N)$$

### *Formation des Tables de Sinus, Cosinus....*

361. Jusqu'ici ces formules sont stériles pour nous; et afin de les faire servir à résoudre des triangles, il faut d'abord connaître les sinus des angles donnés, pour en introduire les valeurs dans nos équations; ou bien, si elles sont destinées à faire connaître des angles, il faut assigner l'arc, le sinus étant donné. Il est donc nécessaire de former une table de sinus, cosinus...., qui donne ces lignes, lorsqu'on connaît ces arcs, et réciproquement.

Concevons donc qu'ayant divisé le quadrans en degrés, minutes...,

Effectuant diverses divisions, on obtient

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B); \quad \frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{1}{2}(A+B); \qquad (14)$$

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{1}{2}(A-B); \quad \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B); \qquad (15)$$

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A+B) \times \cot \frac{1}{2}(A-B). \qquad (16)$$

$$\frac{1+\sin B}{1-\sin B} = \operatorname{tang}^2\left(45° + \frac{1}{2}B\right); \quad \frac{1+\cos A}{1-\cos A} = \cot^2 \frac{1}{2} A; \qquad (17)$$

$$\frac{1+\sin B}{1+\cos A} = \frac{\sin^2\left(45° + \frac{1}{2}B\right)}{\cos^2 \frac{1}{2} A}; \quad \frac{1-\sin B}{1-\cos B} = \frac{\sin^2\left(45° - \frac{1}{2}B\right)}{\sin^2 \frac{1}{2} B},$$

$$\operatorname{tang} A \pm \operatorname{tang} B = \frac{\sin A}{\cos A} \pm \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A . \cos B \pm \sin B . \cos A}{\cos A . \cos B},$$

$$\operatorname{tang} A \pm \operatorname{tang} B = \frac{\sin (A \pm B)}{\cos A . \cos B}; \quad \cot A \pm \cot B = \frac{\sin (B \pm A)}{\sin A . \sin B};$$

$$\operatorname{tang} A \pm \cot B = \frac{\pm \cos (A \mp B)}{\cos A \sin B}; \quad \cot A \pm \operatorname{tang} B = \frac{\cos (A \mp B)}{\sin A . \cos B}.$$



et le rayon en un nombre arbitraire de parties égales, on soit parvenu à trouver combien chaque sin, cos.... contient de ces parties ou unités, et qu'on ait inscrit ces nombres près de chaque arc ; on aura formé une table contenant, dans une 1re colonne, les graduations des arcs ; dans une 2e les sinus, dans une 3e les cos.... Il suit des équ. 1, 3, 5 que, quand on a les sinus, un calcul très-simple donne les cos., tang....; ainsi, la recherche des sinus doit d'abord nous occuper, et l'on a vu (349) qu'il n'est nécessaire d'en pousser le calcul que jusqu'à 45°, parce qu'au delà de cet arc les valeurs se reproduisent. Ainsi, il s'agit de calculer les sinus et cosinus de tous les arcs $< 45°$, le quadrans étant partagé en degrés, minutes....

La 1re équ. du n° 360, et celle qu'on obtient de même en ajoutant les équ. *F*, deviennent, en posant $\alpha = mx$, $\beta = x$,

$$\sin (m+1)x = 2 \cos x . \sin mx - \sin (m-1)x,$$
$$\cos (m+1)x = 2 \cos x . \cos mx - \cos (m-1)x.$$

Si les arcs procèdent dans l'ordre $x$, $2x$, $3x$.... $(m-1)x$, $mx$, $(m+1)x$...., $x$ est *le plus petit arc de la table*, et il suit de nos équ. que si $z$ et $y$ sont les sin. ou cos. de deux arcs successifs $(m-1)x$ et $mx$, et $p = \cos x$, le sin ou cos de l'arc suivant $(m+1)x$ est $= 2py - z$. Donc, *chacun des termes de la série des sinus et de celle des cosinus dépend des deux termes qui le précèdent, et s'obtient en multipliant ceux-ci par* 2p *et* — 1, *et ajoutant.*

362. Prenons l'arc $AC = CB = AL$ (fig. 122), et menons la corde $AB$ et les tangentes $LE$, $CE$ ; nous avons (170)

$$\text{corde } AB < \text{arc } AB, \quad LEC > \text{arc } LAC;$$

d'où, $AI$ ou $\sin AC <$ arc $AC$, $EC$ ou $\operatorname{tang} AC >$ arc $AC$.

*L'arc* $< 90°$ *a sa longueur comprise entre celles de son sin et de sa tang ;* et comme l'éq. 3, page 326, donne $\frac{\sin x}{\operatorname{tang} x} = \frac{\cos x}{R}$, dont le 2e membre approche sans cesse de 1, à mesure que $x$ décroît ; *le* 1er *a aussi* 1 *pour limite*, c'est-à-dire que *le sinus, l'arc et la tangente tendent sans cesse vers l'égalité,* l'arc restant intermédiaire.

Ce principe sert à *calculer le sinus du plus petit arc de la table ;* car de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x$ ou $\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} > \frac{1}{2} x$, on tire $\sin \frac{1}{2} x > \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x$ ; multipliant par $2 \cos \frac{1}{2} x$, on a $2 \sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} > x \cos^2 \frac{1}{2} x$, ou