$AB = a = AE + EF + FB$, on obtient

$$a = b \cos(ab) + c \cos(ac) + d \cos(ad);$$

de même, $b = a \cos(ab) + c \cos(bc) + d \cos(bd)$,

$$c = a \cos(ac) + b \cos(bc) + d \cos(cd),$$

$$d = a \cos(ad) + b \cos(bd) + c \cos(cd),$$

en remarquant que les projections, qui sont soustractives, ont pour facteurs des cosinus négatifs (*voy.* p. 321 et 329).

Multiplions ces équ. respectives par a, b, c, d, puis du 1er produit, retranchons la somme des trois autres ; il viendra

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2\,[bc \cos(bc) + bd \cos(bd) + cd \cos(cd)];$$

on aurait aussi

$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2\,[ab \cos(ab) + ad \cos(ad) + bd \cos(bd)],$$

et ainsi des autres côtés.

Le même calcul s'applique au pentagone, etc. En général, *dans tout polygone plan, le carré d'un côté quelconque est égal à la somme des carrés des autres côtés, moins deux fois les produits deux à deux de ceux-ci, par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

365. Les lignes trigonométriques servent souvent à faire des transformations qui rendent les formules propres aux log. ou à résoudre des équ. En voici quelques exemples :

I. Trouver par log. la somme de plusieurs quantités ? Soit $y = A(a + b)$. On suppose que a et b sont des expressions algébriques assez compliquées pour que l'emploi des log. puisse avoir de l'avantage. Posons $\tang z = \frac{b}{a}$; . . . . . (1)

et éliminons a ; il vient

$$y = Ab\left(\frac{1}{\tang z} + 1\right) = Ab\left(\frac{\cos z + \sin z}{\sin z}\right);$$

mais $\sin 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, donne $\sin 45^\circ . \sqrt{2} = \cos 45^\circ . \sqrt{2} = 1$; en multipliant le numérateur par ces 1ers membres, on a

$$y = \frac{Ab\sqrt{2}}{\sin z}(\sin z . \cos 45^\circ + \cos z . \sin 45^\circ),$$

$$y = Ab\sqrt{2} . \frac{\sin(z + 45^\circ)}{\sin z}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

l'équ. (1) fait connaître l'arc z, et (2) donne y.

Pour $x = A(a + b + c)$, on fait ci-dessus $A = 1$, et on a $y = a + b$, d'où $x = A(y + c)$, expression qu'on traite par la même méthode.

II. Résoudre par log. une équ. du 2e degré ?

1er cas. Soit $x^2 + px = q$, q étant positif. On a

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q} = -\tfrac{1}{2}p\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Soit posé $\tang \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$; . . . . . (1)

cette équ. fera connaître l'arc φ : éliminant p,

$$x = -\frac{\sqrt{q}}{\tang \varphi}(1 \pm \text{séc}\,\varphi) = -\sqrt{q}\left(\frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi}\right).$$

Si l'on prend le signe —, l'équ. (M), p. 335, donne

$$x = \sqrt{q} . \tang \tfrac{1}{2}\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Pour le signe +, comme $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}$, on a *

$$x = -\sqrt{q} \cot \tfrac{1}{2}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2e cas. Soit $x^2 + px + q = 0$, q étant toujours positif ; posons

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ce qui suppose que $p > 2\sqrt{q}$, ou $\frac{1}{4}p^2 > q$, condition nécessaire pour que les racines soient réelles (n° 139). En changeant q en $-q$ dans la 1re valeur de x ci-dessus et éliminant p, il vient

$$x = -\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1 \pm \cos\varphi) = -\sqrt{q} . \tang \tfrac{1}{2}\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

lorsqu'on prend le signe — ; le + donne *

$$x = -\sqrt{q} \cot \tfrac{1}{2}\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dans ces deux cas, lorsque p est négatif, on en porte la valeur avec son signe dans les expressions (1) ou (4), ce qui les rend né-

* Chacune des équ. (1) et (4) donne pour φ deux valeurs qui, introduites dans l'une des deux formules 2 et 3, ou 5 et 6, suffit pour donner les deux racines.

gatives, puis on obéit à la règle du n° 349 ; ou bien on prend p positif et on change de signe les deux racines.

III. Résoudre l'équ. $n \sin x + c \cos x = b$?

Posons $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{c}{n}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

éliminant c, il vient

$$b = n\,(\operatorname{tang} \varphi \cos x + \sin x) = n \left(\frac{\sin \varphi \cos x + \sin x \cos \varphi}{\cos \varphi}\right).$$

d'où, $$\sin (\varphi + x) = \frac{b \cos \varphi}{n}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

l'équ. (1) fait connaître l'arc φ, (2) donne l'arc $\varphi + x$, et par suite l'inconnue x *.

IV. Résoudre ** l'équ. $\sin (x + k) = m \sin (x + l)$?

Posons $$x + \tfrac{1}{2}(k + l) = y :$$

d'où, $$\frac{\sin [y + \frac{1}{2}(k - l]}{\sin [y - \frac{1}{2}(k - l]} = m = \frac{\operatorname{tang} y + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(k - l)}{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(k - l)},$$

d'après l'équ. E. On en tire

$$\operatorname{tang} y = \frac{1 + m}{1 - m} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(l - k).$$

Cette équ. donne y, et l'on trouve ensuite x. Si l'on pose

$$m = \operatorname{tang} \varphi, \quad \text{d'où,} \quad \frac{1 + m}{1 - m} = \frac{1 + \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \varphi} = \operatorname{tang} (45^\circ - \varphi),$$

on a $$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} (45^\circ - \varphi) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(l - k).$$

* Soit proposée cette question : construire un triangle ABC (fig. 193) avec les côtés donnés $AC = b$, $AB = c$, faisant un angle inconnu $A = x$, qui soit tel, que le segment CD soit égal à la perpend. FE menée du point donné F, $AF = n$. On a $FE = n \sin x = CD$, $AD = c \cos x$, et l'équ. $AD + DC = b$ devient celle que nous venons de résoudre.

** Dans le triangle ABC (fig. 20), on connaît la base $AB = c$, et le rapport $a : b = m$ des deux autres côtés AC, BC; on demande de construire ce triangle sachant que si des angles inconnus A, B, on retranche les angles donnés $CAD = k$, $CBD = l$, il en résultera un triangle isocèle ABD. L'inconnue est l'angle $x = DAB = DBA$; la proportionnalité des sinus des angles $CAB = x + k$, et $CBA = x + l$, aux côtés opposés b et a, dont le rapport est connu $= m$, donne l'équ. ci-dessus, d'où il s'agit de tirer x.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DE LA LIGNE DROITE ET DU CERCLE.

Équation de la ligne droite.

366. *On nomme équ. d'une ligne* BMZ (fig. 211) *la relation qui a lieu entre les coordonnées* x *et* y *de chacun de ses points;* en sorte que si l'on conçoit que l'ordonnée PM se meut parallèlement en glissant le long de Ax, et que sa longueur varie en même temps que celle de l'abscisse, de manière que cette équ. entre x et y soit toujours satisfaite, l'extrémité M de l'ordonnée décrira la courbe.

On peut envisager l'équ. de la courbe comme renfermant deux inconnues x et y; dont l'une est arbitraire. Qu'on prenne pour x une valeur quelconque a; s'il en résulte pour y le nombre réel b, le point dont les coordonnées sont a et b, que nous désignerons par le point (a, b), sera un de ceux de la courbe. De même si $x = a'$ donne $y = b'$, etc. Notre équ. indéterminée fera ainsi connaître une infinité de points dont le système est la courbe même; et l'on peut employer ce procédé pour en trouver divers points, s'assurer de la figure qu'elle affecte et des particularités que présente son cours. C'est ce qu'on verra souvent, par la suite.

Par ex., $y = b$ est visiblement l'équ. d'une droite MN (fig. 210), parallèle à l'axe Ax, AQ étant $= b$; $y = 0$ est l'équ. de l'axe des x. De même, $x = a$ est celle de PM, parallèle à l'axe Ay, AP étant $= a$; et $x = 0$ est l'équ. de cet axe même.

367. Cherchons l'équ. d'une droite quelconque.

1° Si elle passe par l'origine, telle que AN (fig. 212) ; de quelque point D, N...., qu'on abaisse les ordonnées DC, PN...., on aura toujours $\frac{DC}{AC} = \frac{PN}{AP} = \ldots$. Soit donc, a *le rapport constant de chaque abscisse à son ordonnée,* l'équ. de la droite AN est

$$y = ax.$$

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, dans l'un quelconque de ces triangles, on a (n° 354), $PN = AP \operatorname{tang} A$. On voit que a *désigne la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe des* x. Plus l'angle NAP croît, plus a augmente; si la droite, telle que