Plus généralement, si sur deux côtés AB, BC d'un triangle, on prend des parties quelconques AD, CF proportionnelles à ces côtés, les droites CD et AF se coupent en un point G, situé sur la ligne menée de l'angle B au milieu E, du côté opposé.

Consultez le *Recueil des propositions* de M. Puissant.

Du Cercle.

377. La distance R d'un point M (x, y) à l'origine C (fig. 221) est $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, les axes étant à angle droit ; ainsi l'équat. du cercle est

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

puisque, pour tous ces points, la distance R est constante.

Le même raisonnement (équ. 7, p. 357) prouve que

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

est l'éq. d'un cercle dont le centre a pour coordonnées α et β. Quand l'origine est à l'extrémité O du diamètre $\alpha = R$, $\beta = 0$, et l'on a $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, ou plutôt

$$y^2 = 2Rx - x^2.$$

Si les x et y font un angle γ, le triangle CPM a l'angle $P = 180° - \gamma$, et la distance constante $CM = R$ de tous les points du cercle au centre C, pris pour origine, est donnée par l'équ. D (n° 355) : l'équ. est donc

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Il est bon de s'exercer à reconnaître la figure d'une courbe et ses propriétés d'après son équ. : bien que ces choses soient connues pour le cercle, nous allons, profitant d'un exemple aussi simple, montrer le parti qu'on peut tirer des équations des courbes pour atteindre à ce but.

378. Comme $y = \pm \sqrt{(R^2 - x^2)}$, à chaque abscisse (fig. 221) répondent deux ordonnées égales et de signes contraires ; de sorte que la courbe est coupée par Ox en deux parties qui coïncident lorsqu'on plie la figure suivant Ox. La même chose a lieu pour Dy. En faisant $x = 0$, on a $y = \pm R$, et les points y et D de la courbe ; plus x croît, plus $\sqrt{(R^2 - x^2)}$, ou y, décroît jusqu'à $x = R$, d'où

$y = 0$: ainsi, la courbe $y\,MA$ s'abaisse sur l'axe des x qu'elle rencontre en A. Elle ne s'étend pas au delà de A, car y devient imaginaire. De ces notions résulte la figure de la courbe.

Toute droite OM menée par le point O $(-R, 0)$ a pour équation $y = a(x + R)$; de même pour A $(+R, 0)$, $y = a'(x - R)$ est l'équ. de MA. Le point M de rencontre de ces lignes a pour coordonnées

$$x = \frac{a' + a}{a' - a} R, \quad y = \frac{2aa'R}{a' - a}.$$

Pour que ce point soit situé sur la circonférence, il faut que l'équ. $x^2 + y^2 = R^2$ soit satisfaite par ces valeurs. Ainsi $aa'(1 + aa') = 0$ est l'équ. de condition qui exprime que les deux cordes se coupent sur la circonf. On en tire $a = 0$, ou $a' = 0$, ou enfin $1 + aa' = 0$: les deux 1ers expriment que, lorsqu'une des cordes est couchée sur le diamètre, la condition est satisfaite, ce qui n'apprend rien : l'autre $1 + aa' = 0$ indique que l'une des cordes ayant une direction quelconque, si l'autre lui est perpend., le point d'intersection sera sur la circonférence.

Comme $y^2 = R^2 - x^2 = (R + x) \times (R - x)$
et que $R + x = OP$, $R - x = AP$,
PM est moyen proportionnel entre OP et AP.

La longueur de la corde AM est $\sqrt{[y^2 + (R - x)^2]}$; ainsi $AM^2 = 2R^2 - 2Rx = 2R(R - x)$; AM est donc moyen proportionnel entre AP et le diamètre AO.

379. Pour obtenir les intersections d'une droite MN et d'un cercle NKI (fig. 222), on élimine x et y entre les équ. $y = ax + b$ et $x^2 + y^2 = R^2$, de ces lignes ; il vient

$$x = -\frac{ab \pm \sqrt{[R^2(1 + a^2) - b^2]}}{1 + a^2} = -\frac{a\delta \pm \sqrt{R^2 - \delta^2}}{\sqrt{(1 + a^2)}},$$

en faisant $\delta = \dfrac{b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$ = la distance de la droite au centre du cercle dont il s'agit (n° 374). Il se présente trois cas :

1° Si le radical est imaginaire, ou $\delta > R$, la droite ne rencontre pas la circonférence.

2° Si le radical est réel, ou $\delta < R$, le cercle est coupé en deux points ; et comme on peut prendre l'axe des x parallèle à la sécante MN, ou $a = 0$, on trouve $x = \pm \sqrt{(R^2 - b^2)}$; le signe $\pm$

prouve que le rayon perpend. à une corde la coupe en deux parties égales.

3° Enfin, si le radical est nul, on a $\delta = R$; la droite coupe la circonf. en un seul point, ou plutôt elle est tangente. Soient x', y' les coordonnées du point T de contact, on trouve

$$x' = \frac{-ab}{1+a^2}, \quad y' = ax' + b;$$

d'où
$$a = -\frac{x'}{y'}, \quad b = \frac{x'^2 + y'^2}{y'} = \frac{R^2}{y'}.$$

Or le rayon CT (fig. 222) mené au point de contact T (x', y') ayant pour équ. $y = a'x$, on trouve $a' = \frac{y'}{x'}$; d'où $aa' = -1$: ce qui signifie (n° 370) que ce rayon est perpendic. à la tangente; $y = ax + b$ devient

$$yy' + xx' = R^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

c'est l'équation de la tangente au cercle en un point quelconque (x', y') de cette courbe.

Si par un point extérieur M (α, β), on veut mener une tang. MT, il faut trouver les coordonnées x', y' du point T de contact : elles doivent satisfaire aux équ. du cercle, et α, β, à celle de la tangente; donc

$$x'^2 + y'^2 = R^2, \quad \beta y' + \alpha x' = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

L'élimination conduit à des équ. du 2e degré en x' et y', en sorte qu'il y a deux points de contact T et T', et par conséquent deux tang. MT, MT' menées par le point donné M. Mais, au lieu d'effectuer ce calcul, observons que nos deux équ. n'ont lieu ensemble, il est vrai, que pour les coordonnées constantes x', y' du point de contact; mais que, si l'on ne prend que la seconde, x' et y' deviennent des variables; d'ailleurs, $\beta y + \alpha x = R^2$ est l'équ. de la droite TT' qui passe par les deux points de contact, puisque leurs coordonnées x' et y' y satisfont. Il est aisé de tracer cette droite (n° 368), et d'en tirer les points de contact et les tangentes.

$y = 0$ donne l'abscisse du point B, où la corde TT' coupe l'axe des x, $CB = \frac{R^2}{\alpha}$: comme cette valeur est indépendante de β ou PM, il s'ensuit que si le point M se meut le long de PM, les

tang. changent de situation; la corde TT' tourne autour du point fixe B (*voy.* 413 et 464, IV).

On peut aussi présenter le calcul de manière à retrouver le procédé géométrique (n° 212, II). Pour cela, retranchons nos équ. (2), et ne considérons que cette seule différence : x' et y' sont des variables, et les coordonnées du point T ou T' de contact doivent satisfaire à l'équ. $y^2 - \beta y + x^2 - \alpha x = 0$, qu'on peut écrire

$$(y - \tfrac{1}{2}\beta)^2 + (x - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2).$$

La courbe à laquelle appartient cette équ. passe donc par les deux points de contact. Or, cette courbe est un cercle dont le centre est en m $(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$, et le rayon $= \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2)}$. Si donc on prend $Cp = \frac{1}{2}CP$, $pm = \frac{1}{2}PM$, m sera le centre, et Cm sera le rayon d'un cercle qui passera par les points de contact cherchés T et T'.

380. Soient deux cercles C et C' (fig. 57), l'origine en C, $CC' = a$ sur l'axe des x; leurs équations sont $x^2 + y^2 = R^2$ pour C, et $(x - a)^2 + y^2 = R'^2$ pour C'. En éliminant x et y, on a pour les points d'intersection

$$x = \frac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{[4a^2R^2 - (a^2 + R^2 - R'^2)^2]}}{2a}.$$

L'abscisse étant simple et l'ordonnée double, la ligne CC', qui joint les centres, est perpend. sur le milieu de la corde MN.

Il est aisé de tirer de ces équ. les conditions relatives aux cas où les cercles se coupent ou se touchent (n° 202) : en effet, le radical traité comme p. 303, devient

$$= (a + R + R')(a + R - R')(R + R' - a)(R' + a - R).$$

Admettons que R soit $=$ ou $> R'$; les deux 1ers facteurs seront positifs, et il reste à analyser les cas que peuvent offrir $R + R' - a$ et $R' + a - R$.

1° Si les signes sont les mêmes, ils ne peuvent être $-$, car on ne peut avoir ensemble $a > R + R'$ et $< R - R'$; ainsi, dès que le radical est réel, les circonf. se coupent en deux points, et l'on a $a < R + R'$, et $> R - R'$.

2° Si l'un de nos deux facteurs est nul, $a = R + R'$, ou $a = R - R'$; d'où $y = 0$, $x = R$, les cercles n'ont donc qu'un point commun sur la ligne qui joint les centres : c'est le cas du contact.

3° Enfin, si les signes sont contraires, savoir :

$$a > R + R' \text{ et } R - R', \quad \text{ou} \quad a < R - R' \text{ et } R + R';$$

comme la 1re de ces deux conditions comprend la 2e, il s'ensuit que les cercles n'ont aucun point commun, quand

$$a > R + R', \text{ ou } < R - R'.$$

381. Voici quelques autres problèmes à résoudre :

I. Étant donnés une droite et un cercle, mener une tangente parallèle à cette droite.

II. Mener une tangente à deux cercles donnés.

III. Tracer une circonf. tangente à un cercle et à deux droites données (le centre est sur la ligne qui divise l'angle donné en deux parties égales).

Transformation de coordonnées.

382. L'équ. d'une courbe est quelquefois si composée, qu'il est difficile d'en déduire les propriétés ; mais il se peut que cette complication tienne aux axes coordonnés auxquels la courbe est rapportée. On a vu, par ex., que le cercle a pour équations

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2, \quad y^2 = 2Rx - x^2, \quad x^2 + y^2 = R^2;$$

celle-ci n'est plus simple que parce que l'origine est au centre. Il convient donc de savoir transformer l'équ. d'une courbe, de manière à la rapporter à d'autres axes, afin de simplifier les calculs.

Les axes coordonnés étant Ax, Ay (fig. 223), sous un angle A quelconque, supposons qu'on veuille prendre d'autres *axes* A′x′, A′y′ *parallèles aux* 1ers. Soient $AB = a$, $BA' = b$ les coordonnées de la nouvelle origine ; $AP = x$, $PM = y$, celles d'un point M; $A'C = x'$, $CM = y'$ les nouvelles coordonnées. On a $AP = BP + AB$, $PM = MC + CP$, ou

$$x = x' + a, \quad y = y' + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Ces valeurs, substituées dans l'équ. en x et y d'une courbe, la traduiront en x' et y', et l'origine sera transportée en A' (a, b). a et b doivent d'ailleurs avoir des signes dépendants de la position de la nouvelle origine A' relativement à A; en sorte que, si elle

était située en D, a serait positif et b négatif, et il faudrait faire $x = x' + a$, et $y = y' - b$, etc.

383. Supposons que *les axes primitifs* Ax, Ay, *étant rectangulaires* (fig. 224), on veuille, sans changer l'origine A, en prendre d'autres, tels que Ax', Ay'. Désignons par (xx') l'angle xAx', que forment les axes des x et des x'; de même par (xy') l'angle xAy'. Pour un point quelconque M, $AP = x$, $PM = y$, $AL = x'$, $ML = y'$; il s'agit d'exprimer x et y, en x', y' et les angles donnés (xx'), (xy'), qui déterminent la position des nouveaux axes. On a $x = AK + LI$, ainsi *l'abscisse* X *est la projection sur l'axe des* x *de la portion de polygone* ALM ; de même $y = LK + IM$. Or, les triangles AKL, LIM donnent (n° 354, A)

$$AK = x' \cos(xx'), \; KL = x' \sin(xx'),$$
$$LI = y' \cos(xy'), \; MI = y' \sin(xy').$$

Donc,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(xx') + y' \cos(xy') \\ y &= x' \sin(xx') + y' \sin(xy') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Si les nouveaux axes sont aussi à angle droit (fig. 225), $(xy') = 90° + (xx')$; d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(xx') - y' \sin(xx') \\ y &= x' \sin(xx') + y' \cos(xx') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

C'est ce que donnent directement des triangles AKL, LIM; car

$$AK = x' \cos(xx'), \quad KL = x' \sin(xx'),$$
$$LI = y' \sin(xx'), \quad IM = y' \cos(xx'),$$

et de plus $x = AK - IL$, $y = LK + IM$.

384. Supposons enfin (fig. 224) *que les axes* Ax, Ay *aient une inclinaison quelconque, ainsi que* Ax′, Ay′. Pour passer des 1ers aux 2es, résolvons les triangles obliquangles ALK, LMI; il vient (n° 355),

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin ALK}{\sin AKL}, \quad \text{d'où} \quad AK = \frac{x' \sin(x'y)}{\sin(xy)},$$

$$KL = \frac{x' \sin(xx')}{\sin(xy)}, \quad LI = \frac{y' \sin(yy')}{\sin(xy)}, \quad IM = \frac{y' \sin(xy')}{\sin(xy)};$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(x'y + y' \sin(yy')}{\sin(xy)} \\ y &= \frac{x' \sin(xx' + y' \sin(xy')}{\sin(xy)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Quand les axes primitifs Ax, Ay *sont obliques, et que les transformés* Ax′, Ay′ *sont rectangles* (fig. 225), il suffit de poser ici $(x'y') = 90°$, ou $(x'y)$ complément de (yy'); d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(x'y) - y' \cos(x'y)}{\sin(xy)} \\ y &= \frac{x' \sin(xx') + y' \cos(xx')}{\sin(xy)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Nous avons supposé partout que l'axe des x′ *est situé en dessus de celui des* x, etc., ce qui pourrait ne pas exister dans un cas auquel on voudrait appliquer ces formules; il faudrait alors modifier les signes des sin. et cos. d'après la règle des indirectes (n° 339), en comparant la disposition des axes, dans l'application qu'on veut faire, avec celle des fig. 224 et 225. Par ex., si l'axe des x' est au-dessous de Ax, on fera sin (xx') négatif, cos (xx') positif *.

385. Jusqu'ici nous n'avons déterminé la position d'un point sur un plan que par ses distances à deux axes; mais il y a bien des manières différentes de la fixer, ce qui fournit autant de systèmes coordonnées (voy. *Géométrie de position*, par Carnot, p. 423).

Arrêtons-nous aux *coordonnées polaires*. La position d'un point M (fig. 227) est donnée par sa distance $AM = r$ à un point fixe A, qu'on nomme *pôle*, et par l'angle $MAP = \theta$ que fait cette ligne AM avec une ligne fixe donnée Ax; AM est le *Rayon vecteur* du point M.

L'équ. polaire d'une courbe MN est la relation entre r et θ, pour chacun de ses points. Si le rayon AM tourne autour de A, et que sa longueur varie à mesure qu'il tourne, c'est-à-dire avec θ, de manière que l'équ. entre r et θ soit toujours satisfaite, l'extrémité M du rayon vecteur décrira la courbe MN.

Le triangle rectangle AMP, où $AP = x$, $PM = y$, donne

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Ainsi, pour passer d'un système de coordonnées x et y aux polaires r et θ, il faudra d'abord transformer l'équ. en coordonnées

* Au reste, il est toujours plus court et moins sujet à erreur de tirer directement les formules de transformation de la figure même qu'on considère, en reproduisant sur cette figure les opérations ci-dessus, c.-à-d. en projetant les longueurs x' et y' sur chacun des axes x et y qu'on veut transformer, ces projections étant faites dans les directions de ces derniers axes.

rectangles, si elles sont obliques; prendre pour origine le point A, qui doit être le pôle: enfin la droite Ax, à partir de laquelle on compte les arcs θ, devra être l'axe des x. Ensuite on mettra $r \cos\theta$ et $r \sin\theta$ pour x et y.

Réciproquement, si l'on a l'équ. en r et en θ d'une courbe, en éliminant ces variables à l'aide des relations précédentes, on la traduira en coordonnées rectangulaires x et y.

Prenons pour ex. l'équ. (2) (n° 377), du cercle dont le centre C (fig. 226) a pour coordonnées α et β; elle devient par nos valeurs de x et y:

$$r^2 - 2r(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0. \quad . \quad . \quad (1)$$

1° Pour chaque rayon vecteur r, la distance de l'origine A à la courbe est double, AM et AN. Les valeurs de r sont imaginaires pour les inclinaisons θ de la ligne AM qui ne rencontrent pas le cercle.

2° Le produit des deux racines r'', r' de r est (n° 137, 3°)

$$r'' \cdot r' = AM \times AN = \alpha^2 + \beta^2 - R^2,$$

quantité indépendante de θ; donc, si d'un point fixe A, on mène des droites quelconques, le produit $AM \times AN$ des deux rayons vecteurs est constant pour toutes les sécantes.

Selon que le point A est intérieur ou extérieur au cercle, on retrouve les théorèmes n°s 225 et 228.

3° Le coefficient du 2e terme est la somme des deux racines r'' et r' en signes contraires; faisons $AC = m$, l'angle $CAM = \varphi$; il vient $\theta = \varphi + i$, $\alpha = m \cos i$, $\beta = m \sin i$, et

$$r'' + r' = 2m(\cos i \cos\theta + \sin\theta \sin i) = 2m \cos(\theta - i) = 2m \cos\varphi:$$

donc $AM + AN = 2m \cos\varphi$, équ. facile à construire lorsque, connaissant deux des quantités $r'' + r'$, m et φ, on demande la 3e.

4° Pour que AM soit tangente, il faut que les racines r'' et r' soient égales, et l'équ. (1) un carré exact, ou (n° 138)

$$4(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta)^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0,$$

d'où, $R^2 = \alpha^2 \sin^2\theta - 2\alpha\beta \sin\theta \cos\theta + \beta^2 \cos^2\theta = (\alpha \sin\theta - \beta \cos\theta)^2$

$$\pm R = m(\cos i \sin\theta - \sin i \cos\theta) = m \sin(\theta - i) = m \sin\varphi.$$

Dans le triangle rectangle ATC qui a $AC = m$ pour hypoténuse

et l'angle φ, R est donc le côté TC opposé à cet angle A (n° 363) ; ce qui prouve que la *tangente au cercle est perpendic. au rayon mené au point de contact.* D'ailleurs les racines r'' et r' étant égales, on a

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = m^2 - R^2 = (m + R)(m - R)$$

ou $r^2 = AB \times AI = AM \times AN$: *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure.*

5° La différence des racines de l'équ. (1) est la corde $MN = k$, $k = \pm 2\sqrt{[R^2 - (\alpha \sin\theta - \beta\cos\theta)^2} = 2\sqrt{(R^2 - m^2 \sin^2(\theta - i)]}$ donc $m \sin\varphi = \pm\sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}k^2)}$. Lorsqu'on veut *mener par un point* A *une corde* MN *qui ait une longueur donnée,* on portera cette corde sur un arc mn (fig. 228) pris où l'on voudra sur le cercle, et la perpendiculaire Co sera la valeur de $m \sin\varphi = Co$; φ est l'angle opposé à Co dans le triangle rectangle dont l'hypoténuse est AC. Donc tracez la circonf. qui a Co pour rayon, et du point A, menez des tangentes à ce cercle, qui détermineront le triangle CFA pour lequel l'angle $A = \varphi$: ainsi les tangentes AM à ce cercle seront les deux solutions du problème, qui ne seront possibles qu'autant que le point A sera extérieur à ce cercle.

6° Sans rien ôter à la généralité, on peut prendre pour axe des x la droite AB (fig. 226) qui joint le pôle au centre, ou $\beta = 0$: or si le pôle est un point I sur la circonf., $R = \alpha$ et l'équ. (1) se réduit à $r^2 - 2rR\cos\theta = 0$, d'où $r = 2R\cos\theta$; c'est la longueur k d'une corde inclinée de θ sur le diamètre. Imaginons (fig. 56) un 2e cercle tangent au même point A, le rayon étant R' ; sa corde sera $k' = 2R'\cos\theta$, d'où $k : k' :: R : R'$: *les cordes menées par le point de contact* A *de deux circonférences tangentes, intérieures ou extérieures, sont donc entre elles comme les rayons.*

CHAPITRE IV.

SECTIONS CONIQUES.

De l'Ellipse.

386. On donne ce nom à une courbe ABO (fig. 229), telle que, pour chaque point M, les *rayons vecteurs* ou distances $MF = z$, $MF' = z'$ à

deux points fixes donnés F et F', qu'on nomme *Foyers,* ont une somme constante, $z + z' = AO = 2a$. Pour trouver l'équ. de l'ellipse, prenons le milieu C de FF' pour origine des coordonnées, AO pour axe des x, la perpend. BC pour axe des y ; on est assuré d'avance, par sa génération, que la courbe doit être symétrique, par rapport à ces axes, et que l'équ. sera fort simple. On doit, en général, préférer le système de coordonnées, qui est propre à faciliter les calculs et à donner des équ. moins composées.

Soient $FC = c$, x et y les coordonnées de M ; on a dans les triangles FMP, $F'MP$, $z^2 = y^2 + FP^2$, $z'^2 = y^2 + F'P^2$, ou

$$z^2 = y^2 + (x - c)^2,\ z'^2 = y^2 + (x + c)^2,\ z + z' = 2a.$$

En soustrayant les deux 1res, il vient

$$z'^2 - z^2 = (z' + z)(z' - z) = 2a(z' - z) = 4cx.$$

Ainsi, $FM = z = a - \frac{cx}{a}$, $F'M = z' = a + \frac{cx}{a}$. . . . (1)

Substituant dans la valeur de z^2 ou z'^2 ci-dessus, on trouve

$$a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Faisant $x = 0$, il vient, pour l'ordonnée BC à l'origine, $y^2 = a^2 - c^2$; si l'on représente cette ordonnée par b, on a donc $b^2 = a^2 - c^2$; éliminant c^2, on trouve enfin, pour *l'équ. de l'ellipse,*

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

387. En résolvant, on a $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Puisque chaque abscisse x donne deux ordonnées y égales et de signes contraires, l'ellipse est telle que $ABOD$ (fig. 230) symétrique par rapport à l'axe AO ; elle l'est aussi relativement à BD, puisque $+x$ et $-x$ donnent la même valeur de y. Ainsi, lorsqu'on plie la figure selon AO ou BD, les parties de la courbe se superposent et coïncident.

y est imaginaire quand $x > \pm a$, x l'est pour $y > \pm b$; donc la courbe est fermée. $BC = b$ est la plus grande ordonnée, $CO = a$ la plus grande abscisse ; AO est ce qu'on nomme *le grand axe ;* BD est *le petit axe ;* A et O sont *les sommets,* C *le centre.* Ainsi,