et l'angle φ, R est donc le côté TC opposé à cet angle A (n° 363) ; ce qui prouve que la *tangente au cercle est perpendic. au rayon mené au point de contact.* D'ailleurs les racines r'' et r' étant égales, on a

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = m^2 - R^2 = (m + R)(m - R)$$

ou $r^2 = AB \times AI = AM \times AN$: *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure.*

5° La différence des racines de l'équ. (1) est la corde $MN = k$, $k = \pm 2\sqrt{[R^2 - (\alpha \sin\theta - \beta\cos\theta)^2} = 2\sqrt{(R^2 - m^2 \sin^2(\theta - i)]}$ donc $m \sin\varphi = \pm\sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}k^2)}$. Lorsqu'on veut *mener par un point* A *une corde* MN *qui ait une longueur donnée,* on portera cette corde sur un arc mn (fig. 228) pris où l'on voudra sur le cercle, et la perpendiculaire Co sera la valeur de $m \sin\varphi = Co$; φ est l'angle opposé à Co dans le triangle rectangle dont l'hypoténuse est AC. Donc tracez la circonf. qui a Co pour rayon, et du point A, menez des tangentes à ce cercle, qui détermineront le triangle CFA pour lequel l'angle $A = \varphi$: ainsi les tangentes AM à ce cercle seront les deux solutions du problème, qui ne seront possibles qu'autant que le point A sera extérieur à ce cercle.

6° Sans rien ôter à la généralité, on peut prendre pour axe des x la droite AB (fig. 226) qui joint le pôle au centre, ou $\beta = 0$: or si le pôle est un point I sur la circonf., $R = \alpha$ et l'équ. (1) se réduit à $r^2 - 2rR\cos\theta = 0$, d'où $r = 2R\cos\theta$; c'est la longueur k d'une corde inclinée de θ sur le diamètre. Imaginons (fig. 56) un 2e cercle tangent au même point A, le rayon étant R' ; sa corde sera $k' = 2R'\cos\theta$, d'où $k : k' :: R : R'$: *les cordes menées par le point de contact* A *de deux circonférences tangentes, intérieures ou extérieures, sont donc entre elles comme les rayons.*

CHAPITRE IV.

SECTIONS CONIQUES.

De l'Ellipse.

386. On donne ce nom à une courbe ABO (fig. 229), telle que, pour chaque point M, les *rayons vecteurs* ou distances $MF = z$, $MF' = z'$ à

deux points fixes donnés F et F', qu'on nomme *Foyers,* ont une somme constante, $z + z' = AO = 2a$. Pour trouver l'équ. de l'ellipse, prenons le milieu C de FF' pour origine des coordonnées, AO pour axe des x, la perpend. BC pour axe des y ; on est assuré d'avance, par sa génération, que la courbe doit être symétrique, par rapport à ces axes, et que l'équ. sera fort simple. On doit, en général, préférer le système de coordonnées, qui est propre à faciliter les calculs et à donner des équ. moins composées.

Soient $FC = c$, x et y les coordonnées de M ; on a dans les triangles FMP, $F'MP$, $z^2 = y^2 + FP^2$, $z'^2 = y^2 + F'P^2$, ou

$$z^2 = y^2 + (x - c)^2,\ z'^2 = y^2 + (x + c)^2,\ z + z' = 2a.$$

En soustrayant les deux 1res, il vient

$$z'^2 - z^2 = (z' + z)(z' - z) = 2a(z' - z) = 4cx.$$

Ainsi, $FM = z = a - \frac{cx}{a}$, $F'M = z' = a + \frac{cx}{a}$. . . . (1)

Substituant dans la valeur de z^2 ou z'^2 ci-dessus, on trouve

$$a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Faisant $x = 0$, il vient, pour l'ordonnée BC à l'origine, $y^2 = a^2 - c^2$; si l'on représente cette ordonnée par b, on a donc $b^2 = a^2 - c^2$; éliminant c^2, on trouve enfin, pour *l'équ. de l'ellipse,*

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

387. En résolvant, on a $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Puisque chaque abscisse x donne deux ordonnées y égales et de signes contraires, l'ellipse est telle que $ABOD$ (fig. 230) symétrique par rapport à l'axe AO ; elle l'est aussi relativement à BD, puisque $+x$ et $-x$ donnent la même valeur de y. Ainsi, lorsqu'on plie la figure selon AO ou BD, les parties de la courbe se superposent et coïncident.

y est imaginaire quand $x > \pm a$, x l'est pour $y > \pm b$; donc la courbe est fermée. $BC = b$ est la plus grande ordonnée, $CO = a$ la plus grande abscisse ; AO est ce qu'on nomme *le grand axe ;* BD est *le petit axe ;* A et O sont *les sommets,* C *le centre.* Ainsi,

l'ellipse est une corde fermée, telle, que la somme des rayons vecteurs menés des deux foyers à un même point quelconque est constamment égale au grand axe ; cet axe est la longueur de la droite qui, passant par les foyers, traverse la courbe de part en part ; les extrémités de cette ligne sont les sommets, le milieu est le centre.

388. Comparons deux ordonnées y, y' d'une même ellipse, qui ont x, x' pour abscisses (fig. 230) ; les équ. $a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2)$, $a^2 y'^2 = b^2 (a^2 - x'^2)$ donnent le quotient

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - x'^2} = \frac{(a + x)(a - x)}{(a + x')(a - x')};$$

or, $CP = x$, $AP = a + x$, $PO = a - x$: ainsi *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances du pied de ces ordonnées aux deux sommets.*

En changeant x en y et y en x, l'équation (3) se change en $b^2 y^2 + a^2 x^2 = a^2 b^2$; ainsi elle conserve la même forme, qu'on prenne AO ou BD pour axe des x.

389. Le cercle ANO décrit du centre C avec le rayon a (fig. 230), a pour équ. $Y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, où $Y = PN$: comparant cette ordonnée à PM (n° 387), on a $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$. Ainsi le rapport des ordonnées du cercle et de l'ellipse, qui répondent à une même abscisse, est constant et égal à celui des axes ; y est donc toujours $< Y$: le cercle renferme l'ellipse. Celui qu'on décrit avec le rayon BC y est au contraire renfermé.

Cette propriété fournit une construction fort simple de l'ellipse. Après avoir tracé les axes donnés AO, BD, et les circonf. inscrite et circonscrite (dont les rayons sont b et a), on mène un rayon quelconque CN, et par les points Q et N, où cette droite coupe les circonf., on trace les parallèles aux axes, QM, NP ; leur section M est un point de l'ellipse, car on a

$$\frac{PM}{PN} = \frac{CQ}{CN}, \quad \text{ou } \frac{PM}{Y} = \frac{b}{a}; \text{ d'où } PM = y.$$

390. La définition de l'ellipse donne un autre procédé pour décrire cette courbe (fig. 229). Après avoir tracé les deux axes AO, BC, du point B comme centre, et avec le rayon CO, décrivez un arc de cercle qui coupera AO en F et F' : ce seront les foyers, à cause de l'équ. $b^2 = a^2 - c^2$ (n° 386). Du centre F et avec un

rayon égal à une portion quelconque de AO, telle que KO, tracez un arc vers M ; puis du centre F', avec le reste AK du grand axe, tracez un 2e arc, qui coupera le 1er en M ; ce sera un point de la courbe, car $FM + F'M = AO$: on aura de la sorte quatre points de l'ellipse avec les deux mêmes rayons, en décrivant des arcs des deux côtés des axes. Le même procédé fera connaître autant de points qu'on voudra de la courbe.

Lorsque l'ellipse a de grandes dimensions, on fixe aux foyers F et F' les deux bouts d'un fil long de AO, puis on fait glisser sur ce fil, toujours tendu, un stylet M qui trace la courbe.

391. A mesure que les deux foyers s'éloignent l'un de l'autre, ou que b diminue par rapport à a, l'ellipse s'allonge et s'aplatit davantage ; au contraire, si les foyers se rapprochent, elle s'arrondit ; enfin, si ces points se confondent, ou $a = b$, on a $y^2 + x^2 = a^2$, et la courbe devient circulaire. *On peut donc regarder le cercle comme une ellipse dont les axes sont égaux.*

Les équ. (1) montrent que *les rayons vecteurs de l'ellipse sont rationnels par rapport aux abscisses* x. La distance $FC = c$ est ce qu'on nomme l'*Excentricité* ; z et z' deviennent *maximum* ou *minimum* pour $x = \pm a$, savoir, $z = a \pm c$: ainsi, de tous les points de l'ellipse, O est le plus voisin ; et A le plus éloigné du foyer F. L'extrémité B du petit axe est à la *moyenne distance de* F ; car $x = 0$ donne $z = z' = a = BF$.

On nomme *Paramètre* la double ordonnée qui passe par le foyer ; on l'obtient en faisant $x = c$, ou $x^2 = a^2 - b^2$, dans l'équ. (3) ; et on trouve $y = \pm \frac{b^2}{a}$; $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$ est donc le paramètre : c'est une *troisième proportionnelle au grand et au petit axe.*

Pour transporter l'origine au sommet A, il faut changer x en $x - a$ dans l'équ. (3), et l'on trouve $a^2 y^2 = b^2 (2ax - x^2)$.

392. Rapportons l'ellipse à des coordonnées polaires (n° 385), le pôle étant à l'un des foyers F ; changeons x en $x' + c$ dans la valeur (1) de FM, et ensuite x' en $z \cos \theta$, θ étant l'angle MFO ; il vient

$$z = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

On désigne par e *le rapport de l'excentricité au demi-grand axe*, $c = ae$; le pôle est en F, et les arcs θ sont comptés, à partir du

sommet voisin O, dans le sens OMB. Si l'origine est à l'autre foyer F', et les arcs θ comptés dans le même sens, il faut changer ici e en $-e$.

De l'Hyperbole.

393. Cette courbe jouit de la propriété que la différence des rayons vecteurs $F'M - FM$ (fig. 231) est une quantité constante $AO = 2a = z' - z$. En plaçant l'origine au milieu C de FF', etc..., et reproduisant le calcul du n° 386, on a de même $z'^2 - z^2 = 2a(z' + z) = 4cx$; ainsi

$$FM = z = \frac{cx}{a} - a, \quad F'M = z' = \frac{cx}{a} + a. \quad . \; . \; . \; (4)$$

Substituant, etc...., puis faisant $c^2 = a^2 + b^2$, il vient

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

On trouvera, comme au n° 387, que l'hyperbole est symétrique, par rapport aux axes FF' et Cy; car on a

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Plus x croît tant positivement que négativement, et plus y augmente; mais on ne peut prendre $x < \pm a$; y est nul pour $x = \pm a$: donc la courbe ne s'étend pas entre les deux sommets A et O; partant de ces points, elle forme deux branches opposées par leurs convexités et indéfiniment étendues, ouvertes l'une à droite, l'autre à gauche. Le point C est le *centre*, $AO = 2a$ le *premier axe*; l'ordonnée à l'origine est imaginaire, $x = 0$ donne $y = \pm b\sqrt{-1}$. Si l'on rend cette quantité réelle en changeant de signe sous le radical, la longueur b qu'on obtient, ou *l'ordonnée centrale rendue réelle*, est ce qu'on nomme le *demi second axe*, qui n'est plus, comme pour l'ellipse, une des dimensions de la courbe.

394. Les ordonnées y et y' (fig. 232), qui répondent aux abscisses x et x', donnent, comme n° 388,

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a'^2} = \frac{(x + a)(x - a)}{(x' + a)(x' - a)} = \frac{OP \,.\, AP}{OP' \,.\, AP'}.$$

On a encore *les carrés des ordonnées proportionnels aux produits des distances de leurs pieds aux deux sommets.*

Quand $a = b$, on a $y^2 = x^2 - a^2$: l'hyperbole est dite *équilatère*.

En changeant x en y, et y en x, l'équ. devient $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$. La forme est la même, au signe près du 2e membre; les x sont comptées sur BD et les y sur CP; l'hyperbole est dite rapportée au centre et au 2e axe (comme fig. 257).

Changeant x en $x + a$, l'origine vient au sommet A, et l'équ. de l'hyperbole est

$$a^2y^2 = b^2(2ax + x^2).$$

395. Si l'on décrit une ellipse $ABOD$ (fig. 232) sur les mêmes axes, elle sera comprise entre les deux sommets et allongée dans le sens des x ou des y, suivant que a sera $>$ ou $< b$; ce sera un cercle si l'hyperbole est équilatère. Ces deux courbes ont des propriétés analogues, dont on peut voir les détails dans la *Géométrie de position* de Carnot, p. 143.

396. La définition de l'hyperbole donne un procédé pour décrire cette courbe. Après avoir tracé les axes $F'F$, Cy (fig. 231), et marqué les foyers F, F', on décrira vers M un arc de cercle du centre F, avec un rayon quelconque AG, puis du centre F', avec le rayon OG on décrira un 2e arc; le point M de section sera sur la courbe, puisqu'on a $F'M - FM = AO$. On aura, avec les mêmes rayons, quatre points de l'hyperbole, puis autant de points qu'on voudra en changeant de rayons.

Les équ. (4) montrent que *les rayons vecteurs de l'hyperbole sont rationnels par rapport aux abscisses.*

Le paramètre, ou la double ordonnée passant par les foyers, conserve la même valeur que pour l'ellipse $p = \frac{2b^2}{a}$.

En raisonnant comme n° 392, on obtient pour l'équat. polaire de l'hyperbole, le pôle étant en F (fig. 231), et faisant l'angle $AFM = \theta$ et $c = ae$,

$$z = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\theta} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos\theta}.$$

397. En comparant les équat. de l'ellipse et de l'hyperbole, on observe que l'une se change en l'autre, lorsqu'on y remplace b par $b\sqrt{-1}$. Cet artifice de calcul servira à traduire les formules obtenues pour l'une de ces courbes en celles qui conviennent à l'autre.

De la Parabole.

398. Étant donnés un point fixe ou foyer F (fig. 234) et une droite quelconque QQ', la parabole est une courbe dont chaque point M est à la même distance de F que de QQ', qu'on nomme *directrice*. Prenons pour axe des x, DF perpend. sur QQ', pour origine le milieu A de $FD = p$, et pour axe des y la parallèle AB à QQ'; A est visiblement un point de la courbe. On a $AP = x$, $PM = y$, $QM = DP$, ou $z = \frac{1}{2}p + x$; dans le triangle FMP, $FM^2 = z^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2$; donc en égalant les valeurs de z, etc., on a $y^2 = 2px$, pour l'*équ. de la parabole*, courbe qui est symétrique par rapport à l'axe des x seulement.

Il résulte de la génération de cette courbe, que *l'ellipse dont le grand axe devient infini se change en une parabole.*

Deux points (x, x'), (y, y') d'une parabole donnent

$$y^2 = 2px, \quad y'^2 = px', \quad \frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x'}.$$

Les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes.

Si la constante $2p$, qu'on nomme *paramètre*, est inconnue, et qu'on ait un point de la courbe, on voit que $2p$ est 3e proportionnelle à l'abscisse et à l'ordonnée de ce point.

Pour tracer la parabole dont on a le paramètre $AB = 2p$ (fig. 233), comme y est moyenne proportionnelle entre AB et x, on décrira un cercle BCP qui passe en B, et dont le centre soit en un point quelconque de AO; AC sera l'y qui répond à l'abscisse AP: ainsi les parallèles CM, PM aux axes coordonnés, détermineront un point M de la parabole. On en obtiendra de même autant d'autres qu'on voudra.

Si l'on fait $x = \frac{1}{2}p = AF$ (fig. 234), on a $y = \pm p$; ainsi le paramètre $2p$ est encore, dans la parabole, la double ordonnée passant par le foyer.

399. La génération de la courbe donne un moyen simple pour la tracer. On a vu que $z = \frac{1}{2}p + x$; ainsi le *rayon vecteur est encore rationnel.* Prenez sur l'axe Ax (fig. 234), à partir du sommet A, des distances $AD = AF = \frac{1}{2}p$, F sera le foyer, la perpend. QQ' à Ax sera la directrice; et il s'agit de trouver tous les points M qui sont à égale distance de l'un et de l'autre. Menez une ordonnée indéfinie quelconque MM', puis du foyer F pour centre, avec PD pour rayon, tracez un arc qui coupera cette droite MM' en deux points M et M': ces points sont sur la courbe.

Pour avoir l'équat. polaire de la parabole, prenons le foyer F pour pôle, et portons-y l'origine, en faisant $x = x' + \frac{1}{2}p$ dans $z = \frac{1}{2}p + x$; enfin, posons FP, ou $x' = -z\cos\theta$, l'angle θ étant AFM compté du sommet; il vient $z = \dfrac{p}{1 + \cos\theta}$.

Des Sections d'un cône droit par un plan.

400. On demande l'équ. de la courbe AMO (fig. 235), intersection d'un cône droit IDB par un plan quelconque OA.

Si par l'axe BK on fait passer un plan BDI perpendiculaire au plan coupant (il le sera à la base, n° 272), l'intersection de ces plans sera la droite AO, *projection de l'axe du cône sur le plan coupant;* c'est ce qu'on nomme l'*Axe* de la section conique. Par un point quelconque P de cet axe, menons un plan parallèle à la base DI; ses intersections, avec le cône et le plan coupant, seront le cercle FMG et la droite PM, laquelle étant perpend. (n° 273) sur FG et AO, est une ordonnée commune aux deux courbes.

Cela posé, soient $AP = x$, $PM = y$; cherchons une relation entre x, y, et les données du problème, qui sont l'angle $BAO = \alpha$, l'angle $DBI = \beta$ et $AB = c$. La propriété du cercle donne $y^2 = FP \times PG$; trouvons FP et PG.

Dans les triangles AFP, POG et ABO, on a (C, n° 355)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin F} = \frac{FP}{x}, \quad \frac{\sin O}{\sin G} \text{ ou } \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin F} = \frac{PG}{PO} = \frac{PG}{AO - x},$$

$$\frac{\sin O}{AB} \text{ ou } \frac{\sin(\alpha+\beta)}{c} = \frac{\sin\beta}{AO}; \text{ d'où, } AO = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Or, dans le triangle BHF, l'angle F est complément de $\frac{1}{2}\beta$; donc

$$FP = \frac{x\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}, \quad PG = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta}\left(\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - x\right),$$

et l'on a, pour l'équation demandée,

$$y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\left[cx\sin\beta - x^2\sin(\alpha+\beta)\right] \ldots\ldots (A)$$

Pour obtenir toutes les sections du cône, il suffit de faire prendre au plan coupant toutes les positions possibles, c'est-à-dire de faire tourner la droite AO autour du point A dans le plan BID, et de changer aussi $AB = c$. Il se présente trois cas.

1° Lorsque $\alpha + \beta = 180°$, le plan coupant est parallèle à la génératrice BI (fig. 236); et la courbe s'étend à l'infini; en faisant $\sin(\alpha + \beta) = 0$, notre équ. devient (à cause de G, n° 357)

$$y^2 = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} \cdot cx = 4cx \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

c'est celle d'une *parabole* *.

2° Tant que $\alpha + \beta < 180°$, le plan coupant rencontre toutes les génératrices d'un même côté du sommet; la courbe est fermée : (A) en est l'équation.

3° Enfin, lorsque $\alpha + \beta > 180°$, le plan coupant rencontre les deux nappes de la surface de part et d'autre du sommet; la courbe a donc deux branches étendues à l'infini $M'AN'$, $LO'Q$ (fig. 235), dont la courbure est opposée. Or, $\alpha + \beta > 180°$ change le sinus du signe, et l'on a

$$y^2 = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta}[cx \sin \beta + x^2 \sin(\alpha + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Dans ces deux derniers cas, si l'on représente par $2a$ *la distance* AO *entre les sommets*, et par K un coefficient constant, on a

$$2a = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad K = \frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Les équ. A et C deviennent $y^2 = K(2ax \mp x^2)$, qui sont celles de l'*ellipse* et de l'*hyperbole* rapportées au sommet (n°s 391 et 394).

L'équ. générale des sections coniques, l'origine étant au sommet, est donc $y^2 = mx + nx^2$. Elle appartient

1° A la parabole, lorsque $n = 0$, $(m = 2p)$;

* On aurait pu refaire les raisonnements précédents; FP (fig. 236) conserve la valeur ci-dessus, en y faisant $\sin \alpha = \sin \beta$; donc $FP = \frac{x \sin \beta}{\cos \frac{1}{2}\beta}$: de plus, AL parallèle à FG donne le triangle ABL, dans lequel on a

$$\frac{\sin \beta}{\sin BAL}, \text{ ou } \frac{\sin \beta}{\cos \frac{1}{2}\beta} = \frac{AL}{BL} = \frac{PG}{c}, \text{ etc.}$$

2° A l'ellipse, quand $n = -\frac{b^2}{a^2}$ et $m = \frac{2b^2}{a}$;

3° Enfin à l'hyperbole, lorsque $n = \frac{b^2}{a^2}$, $m = \frac{2b^2}{a}$.

401. Il n'y a rien à changer à tout ce qui vient d'être dit, lorsqu'on fait varier β et c, c'est-à-dire les dimensions du cône et la distance AB. On ne peut faire $\beta = 0$, ou $\beta = 180°$; car il n'y aurait plus de cône : $c = 0$ suppose que le plan coupant passe par le sommet. L'intersection est alors *un point* lorsque $\alpha + \beta < 180°$; *une droite* quand $\alpha + \beta = 180°$ (le plan est tangent au cône); enfin *deux droites* quand $\alpha + \beta > 180°$. Le calcul comprend aussi ces trois cas; car en faisant $c = 0$ dans (A), puis $\sin(\alpha + \beta)$ positif, nul et négatif, on trouve

$$y^2 + Kx^2 = 0, \quad y = 0, \quad y^2 = Kx^2.$$

La 1re équ. ne peut être satisfaite qu'autant (n° 112) que $x = 0$, et $y = 0$, ainsi elle représente *un point;* la seconde est celle d'*une droite;* la troisième, enfin, donne $y = \pm x\sqrt{K}$ qui représente *deux droites*.

Donc, quels que soient le cône et la position du plan coupant, l'équ. (A) est celle des *six sections coniques;* c étant $= 0$, on a les trois sections qui passent par le sommet; et lorsque c n'est point nul, cette équ. *représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le coefficient de* x^2 *est négatif, positif ou nul.*

402. Étant donnée l'équat. d'une ellipse, d'une hyperbole, ou d'une parabole rapportée à son sommet, ainsi qu'un cône droit quelconque, il est facile de placer cette courbe sur le cône, c'est-à-dire de trouver la situation du plan coupant qui la reproduirait; car, dans les deux derniers cas, on connaît a, K et β, et il s'agit de trouver c et l'angle α, en recourant aux équ. D. Or, la 1re fait connaître c, quand on a tiré α de la 2me : celle-ci devient par les équations I et G, p. 334 et 333.

$$\begin{aligned} 2K \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta &= 2 \sin^2 \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \\ &= (1 - \cos 2\alpha) \cos \beta + \sin 2\alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Cette équ. de la forme $b = n \sin 2\alpha + l \cos 2\alpha$, a été résolue p. 352.

Et si l'équ. donnée est celle d'une parabole $y^2 = 2px$, l'équ. B donne $p = 2c \sin^2 \frac{1}{2}\beta$, d'où l'on tire c, et par suite la position du plan coupant (fig. 236).

Méthode des Tangentes.

403. Si par deux points M et Q (fig. 237) d'une courbe quelconque BMQ, on mène une sécante SMQ, et qu'on fasse varier la position de Q sur la courbe, M restant fixe, la sécante prendra diverses inclinaisons. Si l'on rapproche Q de M jusqu'à faire coïncider ces deux points, la sécante SQ deviendra TM : cette droite se nomme *Tangente ; c'est une sécante dont on a fait coïncider les points d'intersection.*

L'équation de toute droite qui passe en un point $M(x', y')$ est

$$y - y' = A(x - x'). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour déterminer la tangente TM, il suffit d'assigner à $A = \text{tang } T$ la valeur qui convient à l'inclinaison de cette droite ; il faut pour cela exprimer en analyse les conditions qui lui servent de définition.

Désignons par $x' + h$ et $y' + k$ les coordonnées du 2e point Q d'intersection de la sécante SM, ou $MR = h$, $QR = k$; la tang. de l'angle QMR est $\frac{k}{h} = \text{tang } S$. En changeant x' et y' en $x' + h$, et $y' + k$ dans l'équ. de la courbe, et réduisant, il sera facile d'en tirer $\frac{k}{h}$, qui est la valeur de tang S. Or, tang T est visiblement *la limite de tang* S, lorsqu'on fait varier le point Q pour l'approcher de M ; en sorte que si l'on pose tang T ou $A = \text{tang } S + \alpha$, α pourra décroître indéfiniment. Si donc la valeur $\frac{k}{h}$ de tang S a la forme $p + \beta$, p étant une quantité invariable, et β une expression en h et k susceptible de devenir, avec ces variables, aussi petite qu'on veut, l'équ. $A = p + \beta + \alpha$ se partagera (n° 113) en deux autres, dont l'une, $A = p$, déterminera A. A est donc ce que devient $p + \beta$, lorsque β est nul, c'est-à-dire que A *est ce que devient le rapport* k : h, *quand on y pose* k *et* h *nuls.*

Concluons de là qu'*il faudra substituer* y′ + k *et* x′ + h *pour* x′ *et* y′ *dans l'équ. de la courbe, et en tirer le rapport* k : h, *puis y faire* k *et* h *nuls ;* on obtiendra ainsi la limite de ce rapport, ou A, et par suite l'équ. (1) de la tangente (*voy.* p. 395).

La droite indéfinie MN, perpend. à la tang. au point M de contact, est la *Normale ;* l'équ. est facile à déduire de celle de la tang., puisque ces droites passent par le point $M(x', y')$, et de plus sont perpend. L'éq. de la normale est (n° 371)

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x - x'). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les longueurs TP, PN, comprises entre les pieds T, P, et N de la tangente, de l'ordonnée et de la normale, sont la *sous-tangente* et la *sous-normale.* En faisant $y = 0$ dans nos équ., on obtient pour x les abscisses AT et AN des points T et N.

$$\textit{sous-tang.} \quad TP \text{ ou } x' - x = \frac{y'}{A}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\textit{sous-norm.} \quad PN \text{ ou } x - x' = Ay'. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Il pourrait arriver que la tangente et la normale n'eussent pas la même disposition que dans notre figure, et que la sous-tang fût $x - x'$, et la sous-normale $x' - x$; mais alors le signe négatif qui affecterait les valeurs (3) et (4) indiquerait cette circonstance (n° 339).

Les longueurs MT et MN sont appelées aussi, l'une *Tangente*, l'autre *Normale.*

404. Appliquons ces théorèmes à la *parabole* (fig. 234), dont l'équation est $y^2 = 2px$; on a $y'^2 = 2px'$, $(y' + k)^2 = 2p(x' + h)$, qu'on réduit à

$$2ky' + k^2 = 2ph; \quad \text{d'où, } \frac{k}{h} = \text{tang } S = \frac{2p}{2y' + k}.$$

Faisant k nul, on a $A = \text{tang } T = \frac{p}{y'}$.

1° Équ. de la *tangente.* . . . . $yy' = p(x + x')$.
2° Équ. de la *normale.* . . . . $(y - y')p + (x - x')y' = 0$.
3° Longueur de la *sous-tang.* $TP = 2x'$.
4° Longueur de la *sous-norm.* $PN = p$.

Donc *la sous-tangente est double de l'abscisse*, le sommet A est au milieu de TP, le pied T de la tang. *est à gauche du sommet, et la sous-normale est constante et égale au demi-paramètre, double de la distance focale* AF.

La norm. $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \sqrt{(y'^2 + p^2)} = \sqrt{p(2x' + p)}$.

405. Cherchons l'angle $TMF = V$ (fig. 233) que fait le rayon

vecteur avec la tangente : ce rayon passe par les points $M(x', y')$ et $F(\frac{1}{2}p, 0)$; on a donc

$$y - y' = A'(x - x');$$

d'ou,
$$A' = \frac{-y'}{\frac{1}{2}p - x'}.$$

D'après la valeur de A pour la tangente TM, on a

$$\text{tang } V = \frac{A' - A}{1 + AA'} = \frac{y'^2 + \frac{1}{2}p^2 - px'}{\frac{1}{2}py' + x'y'} = \frac{p}{y'},$$

à cause de $y'^2 = 2px'$, et en supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}p + x'$. Ainsi tang $V = A =$ tang T, *le triangle* TMF *est isocèle.* Tous les rayons lumineux et sonores SM, qui sont parallèles à l'axe, se réfléchissent à leur rencontre M avec la courbe, et vont au foyer F. De plus, *la tangente* TM *coupe l'angle* QMF *par moitié,* et est perpend. sur le milieu de QF : enfin, $FM = FT$; ce qui offre un nouveau moyen de mener la tang TM.

406. Faisons varier le point de contact $M(x', y')$, et plaçons-le successivement en tous les lieux de la courbe, puis observons les diverses positions qu'affecte la tang., lesquelles dépendent de son équ., c'est-à-dire de l'inclinaison tang $T = \frac{p}{y'}$, et de l'ordonnée à l'origine, $Ai = \frac{px'}{y'} = \frac{1}{2}y'$. Il est aisé de voir que, 1° au sommet A, x' et y' étant nuls, l'axe des y est tangent ; 2° à mesure que le point de contact M s'éloigne, x' et y' croissent, ainsi que Ai, qui est constamment la demi-ordonnée y', tandis que l'angle T diminue.

La tangente prend toutes les inclinaisons ; ainsi *il y a toujours une tangente parallèle à une droite donnée :* mais, plus l'angle T est petit, plus le contact M et le pied T s'éloignent du sommet. La parallèle à l'axe répond à une distance infinie. Étant donc donnée une direction, ou A, on tire aisément $y' = \frac{p}{A}$, et le point de contact. Par exemple, si A est 1, on a $y' = p$; d'où $x' = \frac{1}{2}p$; le foyer F répond au point G pour lequel la tang. est inclinée de 45° sur l'axe, dans toute parabole.

407. L'équ. $yy' = p(x + x')$ peut servir à mener une tang., sans connaître le point M de contact (x', y'), pourvu qu'on donne certaines conditions. Si l'on veut, par ex., qu'elle passe par un point donné $I(\alpha, \beta)$, notre équ. devient $\beta y' = p(\alpha + x')$; éliminant

avec $y'^2 = 2px'$, on aura deux valeurs de x' et y', deux points M de contact, et deux tangentes.

Mais l'équ. $\beta y = p(\alpha + x)$ étant satisfaite par les coordonnées des deux points de contact, est l'équ. de la corde qui les joint. $y = 0$ donne l'abscisse $x = -\alpha$ du point de section avec l'axe, point commun à toutes les cordes semblables, quel que soit I, pourvu que son abscisse α demeure la même. Ainsi le point I décrivant une parallèle aux y, les deux tangentes, les points de contact, les cordes qui les unissent, varient, le point seul de section de ces cordes avec l'axe reste le même, et la corde tourne autour de ce point, qui est tantôt à droite, tantôt à gauche du sommet, selon que l'abscisse de I est à gauche ou à droite du sommet A.

IM étant la tangente cherchée, qui doit être perpend. sur le milieu de QF, I est à la même distance de F et de Q ; le cercle décrit du centre I avec le rayon IF passe par le point Q de la directrice, lequel devient ainsi connu. QM parallèle aux x donne ensuite M, ou bien on mène IM perpend. sur QF, et la tang. est tracée. Il ne faut pas craindre que le cercle ne coupe pas la directrice dès que I est extérieur à la courbe ; car le problème est alors possible, et le point Q doit exister : on a un 2e point Q et une 2e tang.

408. Appliquons les mêmes principes à l'*Ellipse*. Changeons x et y en $x' + h$, et $y' + k$ dans l'équ. de cette courbe ; il vient

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2,\ a^2(y' + k)^2 + b^2(x' + h)^2 = a^2b^2 ;$$

d'où, $k(2y' + k)a^2 + h(2x' + h)b^2 = 0$, $\frac{k}{h} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x' + h}{2y' + k}$.

C'est la valeur de tang S, lorsqu'on veut l'équ. de la sécante en deux points donnés. Pour la tang., on fera h et k nuls, et on trouve $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$. Il ne reste qu'à substituer dans les équations du n° 403 ; on a (fig. 238)

1° Équ. de la *tangente*, $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$;

2° Équ. de la *normale*, $y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$;

3° Pour la *sous-tangente*, $TP = \frac{a^2 - x'^2}{x'}$;

4° Pour la *sous-normale*, $PN = \frac{b^2x'}{a^2}$.