1° La valeur de A ne change pas, lorsque x' et y' prennent des signes contraires ; ainsi les tangentes en M et M' sont parallèles (fig. 239).

2° En faisant $y = 0$ dans l'équation de la tangente, on a $CT = x = \frac{a^2}{x'}$; $a > x'$ donne $CT > a$: CT est indépendant de b; ainsi toutes les ellipses décrites avec le même axe AO, ont un même pied T pour la tang TM, TQ...., l'abscisse $x' = CP$ demeurant la même. Ainsi, décrivons un cercle AQO sur le diamètre AO, prolongeons l'ordonnée PM en Q, menons la tang TQ, et nous aurons le point T. C'est un moyen facile de tracer la tangente à l'ellipse.

3° $y = 0$ dans l'équ. de la norm. donne $x = CN = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'$ (fig. 238); ainsi N et M sont situés du même côté de Cy.

409. Par les points O et A ($\pm a$, 0) menez les droites quelconques ON, AN (fig. 239) ; leurs équ. sont

$$y = \alpha(x - a), \quad y = \alpha'(x + a).$$

Le point N de rencontre a pour coordonnées,

$$x = a \cdot \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha - \alpha'}, \quad y = \frac{2a\alpha\alpha'}{\alpha - \alpha'}.$$

Ce point N n'est déterminé qu'autant qu'on fixe les tang α, α' des directions de AN et ON; mais si elles sont arbitraires, on peut en disposer de manière que l'intersection N soit sur l'ellipse : on dit alors que ces lignes sont des *cordes supplémentaires*. Dans ce cas, nos valeurs de x et y doivent satisfaire à l'équ. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, ce qui donne

$$a^2\alpha^2\alpha'^2 + b^2\alpha\alpha' = 0, \text{ ou } \alpha\alpha'(a^2\alpha\alpha' + b^2) = 0.$$

On exprime donc que les cordes se coupent sur l'ellipse, en faisant α ou α' nul (ce qui n'apprend rien), ou $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$. Ce signe — provient de ce que α et α' sont de signes contraires; car, si NAO est aigu, NOx doit être obtus. Traçons un cercle sur le grand axe ; l'angle $AN'O$ étant droit, ANO est obtus. Les cordes supplémentaires du petit axe forment entre elles un angle aigu; ce qu'on démontre de même.

On prouve ces propriétés par l'analyse, ainsi qu'il suit. L'angle $\theta = N$ des deux cordes supplémentaires est donné par

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{a^2\alpha^2 + b^2}{\alpha(a^2 - b^2)},$$

en éliminant α'. Si $a = b$, tang θ est ∞, ou $\theta = 90°$; *le cercle a seul des cordes supplémentaires rectangles, et toutes le sont.* Quand $a > b$, α et tang θ ont même signe : donc les angles ANO, NOx sont obtus ensemble. Si a et b croissent proportionnellement, l'angle θ ne varie pas : ainsi, les directions ON, AN sont constantes, ou *les ellipses dont les axes sont dans le même rapport ont les cordes supplémentaires parallèles.*

Si θ est donné, α résulte de l'équ. du 2e degré,

$$a^2\alpha^2 - (a^2 - b^2)\,\alpha\,\text{tang}\,\theta + b^2 = 0.$$

Il y a donc deux systèmes de cordes supplémentaires qui forment entre elles un angle donné θ; et ces cordes sont aisées à construire : les deux valeurs de α ont même signe, à cause du dernier terme $+b^2$. Les grandeurs de θ sont égales, quand on a $(a^2 - b^2)^2\,\text{tang}^2\,\theta = 4a^2b^2$; d'où $\text{tang}\,\theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$; puis $\alpha = \frac{b}{a}$. Cette solution sépare les racines réelles des imaginaires (n° 139, 2°) ; ainsi *les cordes supplémentaires qui concourent à l'extrémité* B *du petit axe se coupent sous le plus grand angle obtus.* Si AN est couché sur AO, l'autre corde est à angle droit ; AN tournant autour de A, l'angle N devient obtus, et s'accroît jusqu'à ce que les cordes passent en B. Passé ce terme, AN continuant de tourner, l'angle N diminue et reprend les mêmes grandeurs.

Pour obtenir graphiquement les cordes supplémentaires qui font un angle donné, il faut tracer sur AO un segment de cercle capable de cet angle ; l'ellipse est coupée en deux points qui donnent les solutions cherchées.

410. Toute ligne CM menée par le centre C (fig. 239), a pour équ. $y = A'x$; si de plus on veut qu'elle passe par le point $M(x', y')$, il faut que $y' = A'x'$; pour la tangente en M, $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$; d'où $AA' = -\frac{b^2}{a^2} = \alpha\alpha'$. Si donc on mène une corde AN, parallèle à la ligne CM, qui va du centre au point de tangence, on a $A' = \alpha'$,

d'où $A = \alpha$; et la tangente TM est parallèle à la corde supplémentaire NO, ce qui fournit encore un moyen très-simple de mener une tangente à l'ellipse.

411. Faisons décrire la courbe au point de contact M (x', y'), et suivons la tang. dans toutes les positions qu'elle affecte. En O, $x' = a$, $y' = 0$; l'équ. de TM devient $x = a$: ainsi la tang. est parall. aux y. A mesure que le point de contact s'élève sur la courbe, x' décroît et y' croît; donc $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$ décroît, et $CT = \frac{a^2}{x'}$ croît; ainsi le point T s'éloigne sans cesse, et l'angle MTC diminue, jusqu'à ce qu'en B la tangente devienne parallèle au grand axe. La symétrie de la courbe dispense de poursuivre plus loin cet examen : donc, *il n'y a point d'inclinaison donnée qui ne puisse convenir à l'une des tangentes de l'ellipse.*

On obtient le point de l'ellipse où une droite doit la toucher, son inclinaison étant donnée, en cherchant x' et y', lorsque A est connu; on a pour cela les équ.

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \quad Aa^2y' + b^2x' = 0.$$

On peut également résoudre un grand nombre de problèmes relatifs à la tangente, et qu'on traiterait par une analyse semblable.

Cherchons les segments OH, AK (fig. 238), formés par une tangente quelconque KH sur les tangentes menées aux sommets. On a $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$; faisant $x = \pm a$, les y sont nos deux segments, savoir,

$$OH = b^2 \cdot \frac{a - x'}{ay'}, \quad AK = b^2 \cdot \frac{a + x'}{ay'}.$$

Le produit de ces deux quantités se réduit à b^2; donc le produit des segments OH, AK, formés par une tangente quelconque KH, est constamment égal au carré du demi-petit-axe, quelle que soit la direction de cette tangente KH. Nous verrons (p. 390) que les lignes AK et OH peuvent être deux tangentes parallèles quelconques, pourvu qu'au lieu de b^2 on prenne le carré de la longueur Cy, qui leur est parallèle.

412. Cherchons l'inclinaison des rayons vecteurs sur la tang. (fig. 238). Soient $CF = \alpha$, les angles $FMT = V$, $F'MT = V'$. Toute droite qui passe en F $(\alpha, 0)$, a pour équ. $y = A'(x - \alpha)$;

d'où, $A' = \frac{y'}{x' - \alpha}$, pour le rayon vecteur FM, qui passe par le point donné M (x', y'); mais pour l'inclinaison de la tangente, $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$; $\alpha^2 = a^2 - b^2$ donne tang $V = \frac{A - A'}{1 + AA'} = \frac{b^2}{\alpha y'}$. En changeant α en $-\alpha$, on a pour tang V' une valeur égale avec un signe contraire; on en conclut que les angles V et V' sont suppléments l'un de l'autre (n° 349). L'angle FMT est aigu et supplément de l'angle obtus $F'MT$, ou plutôt les angles aigus $F'MI$ et FMT sont égaux.

Ainsi, *les rayons vecteurs de l'ellipse, menés au point de contact, sont également inclinés sur la tangente et sur la normale.* Donc, tous les rayons lumineux ou sonores $F'M$, qui partent du foyer F', doivent, à leur rencontre en M avec l'ellipse, se réfléchir à l'autre foyer F. En prolongeant $F'M$, la tang TM divise en deux parties égales l'angle FMG, et la normale l'angle $F'MF$.

413. On peut se servir de cette propriété pour mener une tang. ou une normale en un point donné M de l'ellipse (fig. 238); car, prenant sur le prolongement de $F'M$, $MG = FM$, TM sera perpend. sur le milieu de FG.

Pour mener la tangente TM par un point extérieur donné I, cherchons le point M de contact. Supposons le problème résolu; alors I étant à égale distance de F et de G, le cercle FG, qui passe en F, et dont I est le centre, passe aussi en G; mais

$$F'G = F'M + MF = AO;$$

donc le point G est aussi sur le cercle décrit du centre F' avec le rayon AO.

Une fois ces deux cercles tracés, le point G est connu; on mène $F'G$, et l'on a le point M de contact. Il est d'ailleurs certain que les deux cercles doivent se couper, puisque, sans cela, le point G n'existerait pas, et le problème serait absurde; ce qui ne peut être, tant que le point I est extérieur à l'ellipse : on a même deux points G, et partant deux tangentes.

On peut encore traiter le problème comme n°s 379, 3°, et 407; les coordonnées α, β du point donné extérieur K (fig. 280) devant satisfaire aux équ. de la tang MK et de l'ellipse, on a

$$a^2\beta y' + b^2\alpha x' = a^2b^2, \quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2;$$

l'élimination donnerait pour x' et y' des valeurs du 2e degré. Ainsi, par le point K, on peut mener deux tangentes MK, NK. $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$ est l'équ. de la droite MN qui joint les points de contact, puisqu'elle est satisfaite par $x = x'$ et $y = y'$. Il est donc facile de tracer cette droite et d'en conclure ces points, et enfin les tang.; la figure 280 ne suppose pas les coordonnées rectangulaires.

Comme $y' = 0$ donne $\alpha x' = a^2$, équ. indépendante de b et β, CE est constant, quelque part qu'on prenne le point K, pourvu que $CA = \alpha$ et le grand axe $2a$ restent les mêmes. Donc, si K se meut sur BB' parallèle aux y, les tangentes et les cordes varient; mais le point E reste fixe, même quand le 2e axe $2b$ change; en sorte que E a la même position que pour le cercle décrit du centre C avec le rayon a. Le point E, dont l'abscisse est $x = a^2 : \alpha$ est situé au dedans ou au dehors de l'ellipse, suivant que α est $>$ ou $< a$, c'est-à-dire suivant que la droite BB' est en dehors de la courbe, ou la coupe.

414. Venons-en maintenant à l'*hyperbole :* on pourrait ici refaire tous les calculs qu'on vient d'appliquer à l'ellipse; mais il suffit de changer dans ceux-ci b en $b\sqrt{-1}$ (n° 397). On trouve alors les résultats suivants.

1° Pour l'inclinaison et l'équ. de la tangente,

$$A = \frac{b^2x'}{a^2y'}, \quad a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

La tangente TM (fig. 231) fait avec l'axe des x un angle aigu : elle est parallèle à celle qu'on mènerait au point M'.

On aura de même l'équ. de la normale.

2° $CT = \frac{a^2}{x'}$, les points M et T tombent du même côté de l'axe Cy; comme x' est $> a$, T est compris entre C et le sommet A.

$$\text{Sous-tang} = \frac{x'^2 - a^2}{x'},$$

$$\text{Sous-normale} = \frac{b^2x'}{a^2}.$$

3° Pour les deux cordes supplémentaires ON et AN (fig. 240), on a $\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$; les deux angles formés avec l'axe des x sont ensemble aigus ou obtus. L'équ. de AN est $y = \alpha(x - a)$; passant par le point $N(x', y')$; on a pour la corde AN, $\alpha = \frac{y'}{x' - a}$; donc α et y' sont de même signe, puisque $x' > a$. Ainsi les angles des cordes supplémentaires avec l'axe des x sont aigus quand N est placé comme dans la figure. Ils sont obtus pour la branche supérieure à gauche, etc.... Pour la ligne CM et la tang TM en M, on a $AA' = \frac{b^2}{a^2}$; on conclut donc que le procédé (n° 410) pour mener une tangente à l'ellipse, est applicable ici. On mène au point M de contact la ligne CM, puis la corde ON parallèle à CM, et sa corde supplémentaire NA; celle-ci est parallèle à la tangente TM.

On trouve, comme (n° 409) pour l'angle $\theta = ONA$ des cordes suppl., $\tang\theta = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2 + b^2)}$; or, (n° 415) $\alpha > \frac{b}{a}$, ou $a^2\alpha^2 > b^2$; ainsi tang θ est positif et l'angle θ est aigu. Si les axes varient dans le même rapport, θ demeure constant.

Quand θ est connu et qu'on cherche α, il faut résoudre l'équ. du 2e degré $a^2\alpha^2 - \alpha(a^2 + b^2)\tang\theta = b^2$, dont les racines ne sont jamais imaginaires et ont des signes différents. L'angle θ n'a pas ici de limites comme dans le cas de l'ellipse. On peut construire les deux solutions en décrivant sur AO un segment capable de l'angle donné θ, que doivent faire les cordes supplémentaires, et menant des droites de chaque point de section aux deux sommets. Plus α décroît, c'est-à-dire plus AN s'abaisse sur Ax, plus θ diminue, en passant par toutes les grandeurs de 90° jusqu'à zéro.

4° Les angles formés par les rayons vecteurs et la tangente conservent la même valeur $\frac{b^2}{\alpha y}$; *leurs inclinaisons sur la tangente sont donc les mêmes, ainsi que sur la normale;* TM divise $F'MF$ (fig. 231) en deux parties égales; on construit donc la tangente par le même procédé que pour l'ellipse (n° 412).

Si le point donné est sur la courbe en M, on prend $MG = MF$, et l'on abaisse MT perpend. sur le milieu de FG.

Si le point donné est en I hors de la courbe, du centre I on décrit le cercle FG; puis du centre F', avec un rayon $F'G = F'M - FM = AO$, on trace un 2e cercle, *qui coupe* le 1er en deux points; G étant connu, $F'G$ prolongé en M donne le point de contact M. Du reste, les conséquences du n° 413 ont également lieu ici.

415. Faisons parcourir au point de contact M (fig. 241) les divers points de la courbe. En A ($x' = a$, $y' = 0$), l'équ. de la tang. devient $x = a$; ainsi DD' tangente au sommet est parallèle aux y. A mesure que le point M s'élève sur la courbe, pour connaître les positions successives de la tangente, il faut en déterminer le pied T et les diverses inclinaisons; mais on ne peut déduire ces angles de la valeur $A = \frac{b^2x'}{a^2y'}$, parce que x' et y' croissent ensemble. Pour lever cette difficulté, mettons pour ay' sa valeur $\pm b\sqrt{(x'^2 - a^2)}$, et divisons haut et bas par bx'; il vient

$$A = \frac{\pm b}{a\sqrt{\left(1 - \frac{a}{x'^2}\right)}}, \quad CT = \frac{a^2}{x'}.$$

Or, plus x' croît et plus A et CT décroissent; en sorte que, d'une part, le pied T de la tangente approche sans cesse du centre C sans y atteindre, et de l'autre, l'angle T diminue en même temps. Mais cette diminution de T n'a pas lieu indéfiniment; car le radical approche de plus en plus de *un* et ne peut dépasser ce terme, qu'il n'atteint même qu'à $x' = \infty$; alors $A = \pm \frac{b}{a}$ et $CT = 0$. Du reste, il est inutile de continuer le mouvement du point M sur les autres parties de la courbe, à cause de la symétrie.

Pour construire ces expressions, portons au sommet A les ordonnées $AD = AD' = b$, traçons CD et CD'; ces droites ont pour équ. $y = \pm \frac{b}{a} x$; elles sont *les limites de toutes les tangentes, et ne rencontrent la courbe qu'à l'infini :* cette courbe est entièrement renfermée dans l'angle QCQ' et son opposé.

La tangente fait avec le 1er axe un angle compris entre DCA et un droit; on ne peut donc mener une tangente parallèle à une droite donnée CI, passant en C, qu'autant que CI est dans l'angle QCH.

416. Quand deux courbes s'étendent à l'infini, on dit que l'une est ASYMPTOTE de l'autre, si *elle s'en approche de plus en plus, et si l'on peut s'éloigner assez pour que leur distance soit moindre que toute quantité donnée.* L'équ. de l'hyperbole est

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a} x \left(1 - \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{8x^4} \cdots\right),$$

en développant $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ (p. 178) : le 1er terme excepté, x n'entre qu'au dénominateur; ainsi tous ces termes décroissent indéfiniment quand x augmente. L'équ. $Y = \pm \frac{b}{a} x$ appartient donc à deux droites CQ, CQ' (fig. 241), dont l'ordonnée $PQ > PM$ donne la différence MQ aussi petite qu'on veut. Ces droites, que nous savons être *les limites des tangentes,* sont donc aussi les asymptotes de l'hyperbole.

Si l'hyperbole est équilatère, $a = b$; les asymptotes sont à angle droit.

On trouvera que la propriété démontrée à la fin du nº 411 subsiste aussi pour l'hyperbole.

417. Éliminons y entre l'éq. de l'hyperbole et celle $y = kx + l$ d'une droite quelconque, pour avoir les points de section : nous trouvons

$$(a^2k^2 - b^2)\, x^2 + 2a^2klx + a^2 (l^2 + b^2) = 0.$$

Cette équation du 2e degré se réduit au 1er quand $a^2k^2 = b^2$, ou $k = \pm \frac{b}{a}$, d'où $x = -\frac{l^2 + b^2}{2kl}$. Une parallèle aux asymptotes ne coupe donc la courbe qu'en un point. (Le 2e point de section est à l'infini.) Pour l'asymptote même, $l = 0$, et les deux sections sont à l'infini. En général, on a

$$x = -\frac{a^2kl \pm ab\sqrt{(l^2 + b^2 - a^2k^2)}}{a^2k^2 - b^2};$$

et comme $y = kx + l$, le radical est le même pour x et y. Pour que la droite coupe l'hyperbole, x et y doivent être réels; distinguons trois cas, selon que

$$a^2k^2 = < \text{ ou } > l^2 + b^2.$$

Dans le 1er cas, la droite n'a qu'un point commun avec l'hyperbole; l'équ. du 2e degré devenant un carré, la droite touche la courbe (*voy.* nº 424). On peut tirer de là un moyen de mener une tang. par un point extér. I (x', y') (fig. 231); car $y - y' = k(x - x')$ devant aussi être l'équ. de la droite, on voit que $l = y' - kx'$, qui, avec l'équ. $a^2k^2 = l^2 + b^2$, détermine k et l.

Dans le 2e cas, il y a deux points de section. Posons

$$a^2k^2 = l^2 + b^2 - \alpha^2; \text{ d'où } x = -a \cdot \frac{akl \pm b\alpha}{l^2 - \alpha^2};$$

et si la droite passe au centre, $l = 0$,

$$x = \pm \frac{ab}{\alpha}, \quad y = \pm \frac{kab}{\alpha}, \quad k = \frac{\sqrt{(b^2 - \alpha^2)}}{a} < \frac{b}{a}.$$

Toute droite MM' qui passe par le centre C, et est dans l'angle asymptotique, coupe la courbe en deux points opposés M et M', dont les abscisses sont égales en signes contraires; il en est de même des ordonnées, et de CM et CM'.

Dans le 3e cas, la droite ne coupe pas la courbe. Si $l = 0$, on a $ak > b$, la droite passe par le centre et est dans l'angle QCH (fig. 241); elle est parallèle à deux tangentes; tandis qu'au contraire toute ligne qui est dans l'angle QCQ' coupe la courbe et n'a aucune tangente parallèle.

418. Rapportons l'hyperbole aux asymptotes Cb', Cb (fig. 242) pour axes des x' et y'; menons MP parallèle à Cb; $CP = x'$, $PM = y'$. L'angle $xCB = \alpha$ a pour tangente $\frac{b}{a}$ (n° 415); d'où (n° 346), en faisant, pour abréger,

$$2m = \sqrt{(a^2 + b^2)},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{a}{2m}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{b}{2m}:$$

les formules générales (B, n° 383) deviennent

$$2mx = a(y' + x'), \quad 2my = b(y' - x').$$

Au sommet A, où $y = 0$, on a $x' = y'$, $CD = DA$; $CBAD$ est donc un losange, ce qui suit aussi de ce que l'angle $DAC = DCA$. Substituons ces valeurs d'x et y dans $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$; il vient $x'y' = m^2$ pour l'équation demandée. En faisant $x' = y'$, on a $CD = m = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Si l'on compte les x et y positifs, selon Cb et CH', l'équ. est $xy = -m^2$.

On nomme m^2 *la puissance de l'hyperbole;* si la courbe est équilatère, $CBAD$ est un carré $= m^2 = \frac{1}{2}a^2$.

De $xy = m^2$ on tire que y décroît quand x augmente, et réciproquement; ce qui prouve que les axes sont en effet des asymptotes.

Nous avons trouvé que $a = 2m \cos\alpha$, $b = 2m \sin\alpha$; ce sont les axes de l'hyperbole qui sont ainsi connus, lorsqu'elle est rapportée à ses asymptotes. Les diagonales CA, DB, du losange $CDAB$, résolvent d'ailleurs le problème; car $2m \sin\alpha = b$, $DL = CD \sin\alpha = m \sin\alpha$, donnent $BD = b$.

419. Multiplions l'équ. $xy = m^2$ par $\sin 2\alpha$; il vient

$$xy \sin bCb' = 2m^2 \sin\alpha \cos\alpha;$$

le 1er membre (p. 347, V) exprime *l'aire du parallélogramme* CPMQ, *qui est par conséquent constante, quelque part qu'on prenne le point* M *sur la courbe;* d'ailleurs le 2e membre $= \frac{1}{2}ab$; ainsi, *l'aire* CPMQ *est la moitié du rectangle des demi-axes;* ce qui suit aussi de ce que $CA = a$, $BD = b$ et $CBAD = CQMP$.

420. Une semblable transformation pourrait donner l'équ. de la tang. TM au point M (x', y'), rapportée aux asymptotes; mais on la trouve directement par ce calcul. Cette équ. est (n° 367),

$$y - y' = A(x - x'),$$

A étant $\frac{\sin STH'}{\sin TSC}$: changeons, comme n° 403, x' et y' en $x' + h$ et $y' + k$, dans l'équ. $x'y' = m^2$,

$$(x' + h)(y' + k) = m^2; \text{ d'où } \frac{k}{h} = -\frac{y' + k}{x'}.$$

Telle est la valeur de A pour la sécante MN; la limite se rapporte à la tangente; d'où $A = -\frac{y'}{x'}$; donc enfin, l'équ. cherchée est

$$x'y + y'x = 2m^2.$$

Faisant $y = 0$, on trouve $x = \frac{2m^2}{y'} = 2x'$, abscisse CT du pied T de la tangente, et qui est double de CP; prenant donc $TP = CP$, menant TM, on a la tangente. Comme triangle $SMQ = MTP$, le point M de contact est au milieu de ST.

Puisque $CT = 2x'$ et $CS = 2y'$, l'aire $CST = 2x'y' \sin 2\alpha$ (p. 347), ou $= ab$; *l'aire* CST *est donc constante quel que soit le point* M; *elle égale le rectangle des demi-axes;* les quatre triangles TMP, CMP, CMQ, SMQ, sont équivalents.

421. L'équ. d'une sécante bb' est $y = Kx + L$; $y = 0$ donne

le point b' de section par l'asymptote, $Cb' = -L : K$. Éliminant x et y avec $xy = m^2$, on a les points N, N' de section avec la courbe; d'où $Kx^2 + Lx = m^2$. Or (n° 137, 3°), $-L : K$ est la somme des racines $= Ca' + aN = Cb'$, ou $= Ca' + a'b'$; donc $aN = a'b'$, et les triangles Nab, $N'a'b'$ sont égaux; d'où $bN = b'N'$. *Toute sécante a des portions égales comprises entre l'hyperbole et l'asymptote.*

On tire de là un procédé facile pour décrire la courbe, lorsqu'on a un de ses points N et ses asymptotes. *Par ce point menez une droite quelconque* bb', *prenez* b'N' = bN, N' *sera un* 2e *point de la courbe*. En répétant cette construction, on obtient autant de points qu'on veut.

Les abscisses aN, Ca', de N et N', étant x', x'', en résolvant les triangles abN, $bN'O$, on trouve

$$Nb = x' : \times \frac{\sin a}{\sin b}, \quad N'b = Nb' = x'' \times \frac{\sin a}{\sin b};$$

multipliant ces équ., il vient

$$bN \times Nb' = x'x'' \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = -\frac{m^2}{K} \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b},$$

à cause du dernier terme de l'équ. $Kx^2 + Lx = m^2$. Or, ce produit est indépendant de L, et toute parallèle à notre sécante l'eût pareillement donné. Donc, *deux sécantes ont même valeur pour le produit* bN × b'N, *que le carré de la demi-tangente* SM, *lorsque ces trois droites sont parallèles*.

422. Le procédé du n° 403, pour trouver A dans l'équation (1), s'applique à toute équ., quel que soit l'angle des coordonnées; en suivant attentivement ce qu'on y prescrit : on voit qu'il faut changer x en $x' + h$, et y en $y' + k$, dans la proposée, ce qui donne deux sortes de termes; 1° ceux qui n'ont ni h, ni k, et qui, restant quand ces accroissements sont nuls, recomposent l'équation de la courbe, et s'entre-détruisent; 2° des termes dont h ou k sont facteurs, qui sont destinés à donner leur rapport $k : h$, auquel on substitue A, en y faisant h et k nuls.

Mais il est clair que les termes qui disparaissent de ce rapport sont ceux où h et k entraient à une dimension supérieure à la 1re. Donc, si, supprimant les raisonnements, on s'en tient au matériel du calcul, on voit qu'il faut 1° *changer* x *en* x + h; y *en* y + k, *et développer, en ne conservant que les termes de* 1re *dimension en* h

et en k; 2° *faire* k = Ah *et diviser tout par le facteur commun* h; 3° *enfin tirer la valeur de* A. Quand nous serons plus avancés (*voy.* n° 504), nous reconnaîtrons que A *est égal à moins la dérivée de l'équ. proposée par rapport à* x, *divisée par la dérivée par rapport à* y. Substituant dans les équ. du n° 403, on a celles de la tangente et de la normale.

Ainsi, pour $y^2 + 2xy = 2y + x$, on trouve d'abord

$$2yk + 2xk + 2yh = 2k + h,$$

puis

$$2yA + 2xA + 2y = 2A + 1;$$

d'où

$$A = \frac{-y + \frac{1}{2}}{y + x - 1}.$$

Par ex., le point (1, 1) est sur la courbe, puisque ces coordonnées, mises pour x et y, satisfont à la proposée; on trouve $A = -\frac{1}{2}$, et l'équ. de la tang, en ce point de la courbe, est

$$y - 1 = -\tfrac{1}{2}(x - 1), \text{ ou } 2y + x = 3.$$

Prenons encore l'équ. $y^2 = mx + nx^2$, qui appartient à nos trois courbes, suivant les valeurs qu'ont m et n (n° 400); on trouve

$$2yk = mh + 2nhx, \quad 2Ay = m + 2nx,$$

d'où

$$A = \frac{\frac{1}{2}m + nx}{y}.$$

423. Quand la tangente est parallèle aux x, il est clair que dès que la branche de courbe est entièrement au-dessous ou au-dessus de la tangente, l'y du point de contact est $>$ ou $<$ que les y voisines. Ainsi, l'équ. $A = 0$ doit donner l'y qui est *un maximum* ou *un minimum*; et on la trouve en éliminant x et y entre $A = 0$ et la proposée. $A = \infty$ donne les tangentes parallèles aux y, c'est-à-dire les limites de la courbe dans le sens des x.

Soit, par ex., l'équ. $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$, pour laquelle on trouve $A = \dfrac{y - x + 1}{2y - x}$; posant $y - x + 1 = 0$, et éliminant avec la proposée, on obtient $x = 3$ et 1, et $y = 2$ et 0, coordonnées des points où la tangente est parallèle aux x; 2 est la plus grande ordonnée, 0 la plus petite; la courbe ne passe pas au-dessous de l'axe des x, qu'elle touche au point (1, 0). $2y - x = 0$ donne $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, coordonnées des limites latérales (n° 454, fig. 261).

424. Étant données l'équ. d'une courbe du 2e degré, et celle $y = \alpha x + \beta$ d'une droite, pour trouver les points de section, il faut éliminer y, ce qui conduira à une équ. du 2e degré en x, de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Les abscisses des deux points d'intersection sont $x = -\frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$, et suivant que ces rac. sont réelles ou imaginaires, la droite coupe ou ne coupe pas la courbe. Si $b^2 - 4ac = 0$, les racines sont égales, et *la droite est tangente;* car si α et β étaient arbitraires, en les faisant varier, la droite changerait de position, et les deux points d'intersection seraient d'autant plus rapprochés que $b^2 - 4ac$ serait plus petit; ces points coïncident quand $b^2 - 4ac = 0$, équ. qui exprime une relation entre α et β quand la droite est tangente. L'une de ces constantes reste arbitraire, et on peut la déterminer par diverses conditions, ce qui donne lieu à un grand nombre de problèmes. L'abscisse du point de contact est $x = -\frac{b}{2a}$. Quand cela arrive, α et β étant donnés, on trouve que l'équ. en x est un carré exact; on reconnaît donc que la droite est tangente, et on a le point de contact. Ex. :

$$3y = 4x + 2, \quad y^2 - 2xy + 2x^2 + 4x - 5y + 4 = 0;$$

l'élimination de y donne $x^2 - 2x + 1 = 0 = (x - 1)^2$; ainsi la droite touche la courbe au point pour lequel $x = 1, y = 2$.

Lorsque faisant $y = 0$, dans une équ., on trouve $(x - x')^2 = 0$, on doit en conclure que la courbe touche l'axe des x au point $(x', 0)$ (*voy.* fig. 261 et 251, nos 443 et 454).

Du Centre et des Diamètres.

425. Le *Centre* d'une courbe est un point C (fig. 243 et 245), qui jouit de la propriété *de couper en deux parties égales toutes les cordes, telles que* MM', *menées par ce point.* Mettons l'origine en C; menons PM, $P'M'$ parallèles à l'axe Cy; les triangles CPM, $CP'M'$ sont égaux à cause de $CM = CM'$; d'où $CP = CP'$, $PM = P'M'$. Donc, lorsque l'origine est au centre de la courbe, les ordonnées et les abscisses sont deux à deux égales et de signes contraires. La réciproque a visiblement lieu.

L'angle yCx des coordonnées est ici quelconque.

Donc, pour qu'une courbe ait le centre à l'origine, il est nécessaire et il suffit que son équ. ne soit point altérée lorsqu'on y change x *en* — x, *et* y *en* — y.

Appliquons ce précepte à l'équ. générale du 2e degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Il est manifeste qu'*afin que la courbe ait l'origine pour centre, il faut que son équ. ne contienne pas les termes* Dy *et* Ex; elle sera de la forme $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0$. C'est pour cela que, par anticipation, nous avons donné le nom de centre au milieu de l'axe de l'ellipse et de l'hyperbole; et il devient prouvé que toute corde qui passe par ce point y est coupée en deux parties égales.

Mais une courbe pourrait avoir un centre qui ne fût pas situé à l'origine; alors il faudrait qu'on pût l'y transporter; on changerait x en $x' + a$, y en $y' + b$, et l'on déterminerait les coordonnées arbitraires a et b de la nouvelle origine, de manière à chasser les termes de 1er degré en x' et y'. Faisons ce calcul pour l'équ. (1) : nous égalerons ces termes à zéro, et il viendra

$$Bb + 2Ca + E = 0, \quad Ba + 2AB + D = 0; \quad . \quad . \quad (2)$$

d'où $$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC};$$

et la transformée est $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Q = 0$, Q désignant le terme tout constant. La courbe du 2e degré a donc un centre toutes les fois que ce calcul est possible, et *elle n'en a qu'un seul;* mais elle n'en a point dans le cas contraire, qui a lieu lorsque $B^2 - 4AC = 0$; les équ. (2) sont alors contradictoires (no 114, 2o). Cependant, si l'un des numérateurs de a ou b était en même temps $= 0$, l'autre le serait aussi : il y aurait une infinité de centres, et les équ. (2) rentreraient l'une dans l'autre (no 114, 3o).

En général, si a et b représentent des coordonnées variables, les équ. (2) appartiennent à deux droites, dont l'intersection donne le centre; elles sont parallèles lorsqu'il n'y a point de centre, et elles coïncident lorsqu'il y en a une infinité; les centres sont tous les points de cette droite. Ces cas particuliers s'éclairciront bientôt (no 458).

Donc *la parabole n'a point de centre,* puisque $B^2 - 4AC$ devient $0 - 4 \times 0 = 0$, pour l'équ. $y^2 = 2px$.