426. On dit qu'une ligne est *Diamètre* d'une courbe *lorsqu'elle coupe en deux parties égales toutes les cordes parallèles* menées dans une direction déterminée.

Lorsque deux droites sont réciproquement des diamètres l'une par rapport à l'autre, on les nomme *Diamètres conjugués*. Les axes de l'ellipse et de l'hyperbole sont, par ex., des diamètres conjugués.

Cherchons l'équation d'un diamètre quelconque d'une courbe du second degré. Soit $y = ax + b$ l'équ. d'une droite ; en éliminant y de l'équ. (1), on aura une équ. du 2e degré, que nous représenterons par $x^2 + kx + l = 0$, dont les racines, de la forme

$$x = -\tfrac{1}{2}k \pm \sqrt{n},$$

sont les abscisses des points de section de la droite et de la courbe. Le terme $-\frac{1}{2}k$ est visiblement l'abscisse x' du milieu de la corde : en faisant le calcul indiqué, on arrive à l'équ. propre à donner k ; cette équ. est

$$2x'(Aa^2 + Ba + C) + 2Aab + Bb + Da + E = 0.$$

a étant constant, si b varie, on obtient les abscisses x' du milieu d'une suite de cordes parallèles : mais si l'on élimine b, en faisant $b = y' - ax'$, on aura une équation en x' et y' propre à toutes ces cordes ; ce sera donc l'équ. de la ligne qui les coupe toutes par moitié ; ainsi *l'équ. générale d'un diamètre*, ordonnée par rapport à a, est

$$a(Bx' + 2Ay' + D) + 2Cx' + By' + E = 0. \quad . \quad . \quad (3)$$

il s'ensuit que 1° *les diamètres des courbes du 2e degré*, ou les lignes qui coupent par moitié tout système de cordes parallèles, *sont des droites*, puisque l'équ. est du 1er degré ; pour une direction donnée a des cordes, cette équ. est facile à construire.

2° Chaque direction des cordes a son diamètre particulier.

3° *Tout diamètre passe par le centre*, puisque les coordonnées x', y' de ce centre (équ. 2) satisfont à notre équ. (3).

Cependant si le centre n'existe pas (la parabole), alors $B^2 - 4AC = 0$; éliminant C, l'équ. devient

$$y' = -\frac{B}{2A}x' - \frac{aD + E}{2Aa + B}.$$

Le coefficient de x' étant indépendant de a, tous les diamètres de

la parabole sont parallèles entre eux ; la direction en est connue. Comme l'axe est l'un de ces diamètres, et qu'il est perpendiculaire aux cordes, la condition (4) page 355, se trouve ici exprimée par $-\frac{Ba}{2A} + 1 = 0$, d'où $a = \frac{2A}{B}$. Cette valeur de a, substituée dans le dernier terme de l'équ., fait connaître la position absolue de l'axe, les coordonnées étant rectangles.

Le même calcul pour l'équation générale (3) donne la condition $Ba^2 + 2a(C - A) = B$ qui détermine a dans cette équ., lorsqu'elle appartient aux axes de l'ellipse et de l'hyperbole.

427. Pour que l'axe des x soit diamètre, les cordes étant parallèles à l'axe des y, il faut que chaque abscisse donne deux valeurs égales et de signes contraires pour y ; ainsi, en résolvant par rapport à y les équ. du 2e degré, qui jouissent de cette propriété, il faut qu'on ait $y = \pm\sqrt{K}$, K contenant x. En faisant le calcul sur l'équ. (1), il est visible que cette condition n'a lieu qu'autant que cette équ. est privée des termes Bxy et Dy.

De même, pour que l'axe des y soit diamètre par rapport à celui des x, il faut que l'équ. de la courbe ne contienne ni Bxy, ni Ex. Donc, pour que les deux axes des x et y soient diamètres conjugués, il faut que l'équ. soit privée à la fois des termes Bxy, Dy et Ex, c'est-à-dire qu'elle ait forme

$$Ay^2 + Bx^2 = Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ainsi, l'origine est au centre ; *l'ellipse et l'hyperbole peuvent avoir des diamètres conjugués, mais la parabole n'en a point.* Tout cela est indépendant de l'angle des coordonnées. Donc

1° Soit BB' (fig. 243 et 245) un diamètre de l'ellipse ou de l'hyperbole ; on a vu (nos 408 et 414) que les tangentes IG et HK en B et B' sont parallèles ; de plus, elles le sont aussi au diamètre conjugué Cy, puisque les cordes qui lui sont parallèles sont coupées au milieu par BB', et qu'à mesure que ces cordes s'approchent de B ou B', les deux extrémités se rapprochent ; enfin, les deux points de section se réunissent en B, et la double ordonnée devient nulle. Ainsi, pour que la courbe soit rapportée à ses diamètres conjugués, *l'axe* Cy *des ordonnées doit être parallèle à la tangente menée au point* B *ou* B', *où l'axe* Cx *des abscisses rencontre la courbe.*

2° Toute ligne CB, menée par le centre C, est un diamètre dont le conjugué est parallèle à la tangente en B ; cela résulte de ce que

l'équ. de la courbe rapportée à ce système d'axes, a alors nécessairement la forme (4). Ainsi, *dans l'ellipse et l'hyperbole, il y a une infinité de diamètres conjugués.*

3° Quand AO (fig. 239, 240) est le 1er axe de l'ellipse ou de l'hyperbole, il y a toujours deux cordes supplémentaires, ON, AN, parallèles aux diamètres conjugués; et la relation $a^2aa' \pm b^2 = 0$, donnée (nos 409, 414) pour l'inclinaison de ces cordes sur l'axe AO, convient aussi à celle de ces diamètres. Ils conservent des directions parallèles dans toutes les ellipses ou hyperboles dont les axes a et b ont même rapport.

4° Le problème qui consiste à *trouver des diamètres conjugués qui font un angle donné* θ a été résolu pour les cordes supplémentaires (n° 409); θ a une limite. Cet angle ne peut être droit que pour les axes; dans le cercle, tous les diamètres conjugués sont rectangulaires. Le problème proposé revient à former le triangle ONA, connaissant la base AO et l'angle opposé $N = \theta$; on décrira donc sur AO un segment de cercle capable de l'angle θ, et les deux points de section avec la courbe donneront les positions du sommet N (*voy.* n° 431, 4°, et 433).

5° Si le diamètre conjugué Cy rencontre aussi la courbe, ce qui a lieu pour l'ellipse (fig. 243), on verra de même que IK et GH, tang. en D et D', sont parallèles au 1er diamètre BB'. Le parallélogramme $GIKH$ est appelé *Circonscrit* à la courbe. Mais Cy (fig. 245) ne rencontre pas l'hyperbole, puisque cette droite est tracée hors de l'angle des asymptotes (n° 417, 3e cas). Le 1er diamètre coupe donc la courbe, mais le 2e ne la rencontre pas.

428. Soient Cx et Cy (fig. 243) les diamètres conjugués d'une ellipse; on nomme BB' et DD' leurs *Longueurs*. Faisons $CB = a'$ et $CD = b'$. Or $y = 0$ donne $x = a'$; $x = 0$ donne $y = b'$; ces conditions étant introduites dans l'équ. (4), on a

$$Ba'^2 = Q, \quad Ab'^2 = Q; \quad \text{d'où } B = \frac{Q}{a'^2}, \quad A = \frac{Q}{b'^2},$$

ce qui change cette équ. en

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

qui est celle de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués.

429. Soient pareillement Cx et Cy (fig. 245) les diamètres conjugués de l'hyperbole; $CB = a'$ donne $Ba'^2 = Q$, car $y = 0$ répond

à $x = a'$. De plus, Cy ne coupant pas la courbe, si l'on connaissait l'équ. rapportée aux diamètres Cx, Cy, et qu'on voulût trouver le point où Cy rencontre la courbe, $x = 0$ donnerait une valeur imaginaire pour y; mais (par les mêmes motifs qu'au n° 393), changeons le signe sous le radical, cette valeur deviendra réelle; représentons-la par b'; alors $x = 0$ devra donner $y^2 = -b'^2$, d'où $-Ab'^2 = Q$, b' ou *la demi-longueur du second diamètre étant l'ordonnée oblique qui répond au centre, mais rendue réelle.* Les équations

$$Ba'^2 = Q, \quad -Ab'^2 = Q, \quad \text{donnent } B = \frac{Q}{a'^2}, \quad A = -\frac{Q}{b'^2},$$

et en substituant dans (4), on obtient pour l'équ. de l'hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Si l'on prend $CD = CD' = b'$, les parallèles GH, IK à Cx forment le parallélogramme $GIKH$ *inscrit* dans l'hyperbole.

Les équ. (5) et (6) pouvant se déduire l'une de l'autre en mettant $b'\sqrt{-1}$ pour b', il en sera de même des résultats de calculs, qu'on est ainsi dispensé de faire pour l'hyperbole.

430. En changeant x en y, et y en x, l'équ. de l'ellipse conserve sa forme; toutes les constructions qu'on fera sur l'un des diamètres seront donc applicables à l'autre. Si l'on compte les x sur le 2e diamètre de l'hyperbole, l'équ. devient

$$b'^2y^2 - a'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

431. Puisque les équ. de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées aux axes et aux diamètres sont de même forme, il est inutile de reproduire ici les calculs déjà effectués pour les axes, et l'on peut en déduire que

1° Les carrés des ordonnées PM (fig. 243 et 245) sont proportionnels aux produits des distances PB, PB', de leur pied P aux extrémités B et B' du diamètre (nos 388 et 394).

2° Deux ellipses qui ont l'une pour axes, et l'autre pour diamètres conjugués, $2a'$ et $2b'$, ont même équ.; ainsi, pour chaque abscisse, l'ordonnée est d'égale longueur, mais sous des directions différentes. Donc, pour tracer une ellipse, lorsqu'on connaît les directions et les longueurs des conjugués CB, CD (fig. 244), on

prendra sur la perpendiculaire à BB', $CK = CK' = CD$; puis, à l'aide de la propriété des foyers ou autrement, on décrira l'ellipse $BKB'K'$ sur les axes BB' et KK'; enfin on inclinera chaque ordonnée PN, suivant PM, parallèle à CD. Si $a' = b'$, $BKB'K'$ est un cercle.

Cette construction s'applique visiblement à l'hyperbole; on verra qu'il en est de même de la parabole.

3° L'inclinaison d'une tangente en un point quelconque (x', y'), et l'équ. de cette ligne, sont pour

$$\text{l'ellipse, } A = -\frac{b'^2x'}{a'^2y'},\quad a'^2yy' + b^2xx' = a'^2b'^2,$$

$$\text{l'hyperbole, } A = \frac{b'^2x'}{a'^2y'},\quad a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2.$$

A n'est plus la tangente de l'angle que cette droite fait avec l'axe des x, mais bien le rapport des sinus des angles qu'elle fait avec les deux diamètres conjugués (n° 367).

4° En ayant égard à la même distinction, on pourra voir que le calcul fait (n° 409) pour les cordes supplémentaires s'applique ici, et que le procédé qu'on en déduit pour mener une tangente a encore lieu. Soit donc menée du centre C (fig. 246) au point de contact M la ligne CM, et la corde parallèle $B'N$, la tangente TM sera parallèle à la corde BN.

Quand l'ellipse et le point M de contact sont donnés, il est aisé de tracer la tangente; car on trouve d'abord le centre C en menant 2 cordes parallèles quelconques, et prenant le milieu de la corde BB' qui les coupe par moitié; notre construction s'applique ensuite.

5° D'un point K (fig. 280), hors de l'ellipse, pris sur une droite donnée BB', menons les tangentes KM, KN, puis le diamètre DD' parallèle à BB', et son conjugué CA. L'analyse du n° 413 peut être reproduite ici; ainsi, l'équ. de la corde MN, qui joint les points de contact M et N, est $a'^2\beta y + b'^2\alpha x = a'^2b'^2$; ce qui permet de construire cette corde, donne les points M et N, et enfin les deux tangentes. De plus, si le point K se meut sur BB', la corde MN et les tangentes varient, mais le point E reste fixe : on a, pour son abscisse, $\alpha x = a'^2$; elle est indépendante de b' et de β.

6° La propriété démontrée à la fin du n° 411 subsiste visiblement, lorsque l'ellipse est rapportée à ses diamètres conjugués, ce qui justifie ce qu'on dit que OH, AK (fig. 238) peuvent être deux tangentes parallèles quelconques (*voy.* p. 386.)

Toutes ces constructions ont également lieu pour l'hyperbole.

432. Cherchons maintenant les relations qui existent entre les demi-axes a, b, et les demi-diamètres conjugués a', b'. Reprenons les équ. de la courbe rapportée aux axes et aux diamètres conjugués, et ramenons l'une d'elles à l'autre, à l'aide d'une transformation de coordonnées. Commençons par l'ellipse.

La courbe est rapportée aux axes rectangles CA, CM (fig. 243), et il s'agit de changer les x et y en coordonnées obliques x', y', comptées sur les diamètres conjugués CB, CD; on sait qu'il faut substituer pour x et y, les valeurs (B, n° 383) dans l'équ.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

savoir, $x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta$, $y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta$,

α, β étant les angles que font avec les x les nouveaux axes CB, CD des x' et y'. On obtient

$$(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)\, x'^2 + (a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta)\, y'^2$$
$$+ (a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta)\, 2x'y' = a^2b^2.$$

Mais on veut que les nouveaux axes soient des diamètres conjugués, c'est-à-dire que la transformée soit $a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2$; le coefficient du terme en $x'y'$ doit donc être nul,

$a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta = 0$, $a^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta + b^2 = 0$ (1); en divisant par $\cos\alpha \cos\beta$.

Cette équ., qui a lieu pour les cordes supplémentaires (n° 409), s'accorde avec ce qu'on a dit n° 427 des directions de ces cordes, des tangentes, et des diamètres conjugués.

De plus faisons successivement y' et x' nuls, pour trouver les longueurs a', b' des diamètres, il viendra

$$(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)\, a'^2 = a^2b^2, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$(a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta)\, b'^2 = a^2b^2. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Pour éliminer α et β entre ces trois équ., on tire les valeurs de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ de l'éq. (2), à l'aide de l'équ. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; on a

$$a'^2 (a^2 - b^2) \sin^2\alpha = b^2 (a^2 - a'^2),$$

$$a'^2 (a^2 - b^2) \cos^2\alpha = a^2 (a'^2 - b^2).$$

L'équ. (3) donne de même (en changeant a' en b' et α en β)

$$b'^2 (a^2 - b^2) \sin^2 \beta = b^2 (a^2 - b'^2),$$
$$b'^2 (a^2 - b^2) \cos^2 \beta = a^2 (b'^2 - b^2).$$

Or, en transposant le 2e terme de l'équ. (1), et élevant au carré, il vient

$$a^4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = b^4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

Substituant pour $\sin^2$ et $\cos^2$ leurs valeurs ci-dessus, on trouve, après avoir supprimé les facteurs communs,

$$(a^2 - a'^2)(a^2 - b'^2) = (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2);$$

d'où $$a^4 - b^4 = a^2 (a'^2 + b'^2) - b^2 (a'^2 + b'^2).$$

Toute l'équ. est divisible par $a^2 - b^2$; donc enfin

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ainsi *la somme des carrés de deux diamètres conjugués de l'ellipse est constante, et égale à la somme des carrés des axes.*

Multipliant l'équ. (2) par (3), on trouve

$$a^4 b^4 = a'^2 b'^2 [(a^4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + b^4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)$$
$$+ a^2 b^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha)].$$

Retranchant de la parenthèse le carré de l'équ. (1), puis divisant par $a^2 b^2$, il vient

$$a^2 b^2 = a'^2 b'^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta).$$

Ce dernier facteur est le carré de $\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta$, ou $\sin (\beta - \alpha)$; donc

$$a'b' \sin (\beta - \alpha) = ab. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Puisque $a'b' \sin \theta$ est (n° 364, V, 2°) la surface du parallélogramme $CDBK$ (fig. 243), on voit que *le parallélogramme* CK *circonscrit à l'ellipse a une aire constante et égale à l'aire du rectangle des axes,* quelles que soient les directions des diamètres conjugués.

Ainsi les trois équ. données par la question, qui étaient 1, 2 et 3, reviennent à 1, 4 et 5, savoir,

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$ab = a'b' \sin (\beta - \alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
$$a^2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta + b^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Observez que $\beta - \alpha$ est l'angle $DCB = \theta$ que font les diamètres conjugués; ces lignes étant parallèles à deux cordes supplémentaires, l'équ. (6) résulte aussi de ce qu'on a vu n° 409. Au reste, en éliminant a et b, à l'aide des équ. (4) et (5), on trouve que (6) revient à

$$0 = a'^2 \sin \alpha \cos \alpha + b'^2 \sin \beta \cos \beta, \; 0 = a'^2 \sin 2\alpha + b'^2 \sin 2\beta. \; . \; (7)$$

Posons $a' = b'$, pour obtenir *les diamètres conjugués égaux*. L'éq. (7) donne $\sin 2\alpha = - \sin 2\beta$; ces diamètres sont donc également inclinés sur le grand axe, de part et d'autre du petit. L'équ. (6) devient $- a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + b^2 = 0$;

d'où $$\operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{b}{a} = \frac{BC}{AC} \text{ (fig. 239).}$$

L'ellipse a donc deux diamètres conjugués égaux, parallèles aux cordes supplémentaires qui joignent les extrémités des axes. Ce sont les diamètres qui font le plus grand angle obtus. Soit CM l'un d'eux (fig. 243); le triangle CPM donne

$$x^2 + y^2 = a'^2 = \tfrac{1}{2} (a^2 + b^2) \text{ (équ. 4)}:$$

éliminant y^2 de l'équ. $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, on a $x^2 = \frac{1}{2} a^2$, résultat indépendant de b. Ainsi, *les extrémités des diamètres conjugués égaux de toutes les ellipses décrites sur le même grand axe* 2a, *ont même abscisse* $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$.

433. Quant à l'équ. qui fixe la position des diamètres conjugués, inclinés sous l'angle θ, elle a été donnée n° 409,

$$a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha - (a^2 - b^2) \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \theta + b^2 = 0. \; . \; . \; . \; (8)$$

Les cinq équ. 4, 5, 6, 7, 8, qui n'en forment que quatre distinctes, entre les 7 quantités a, b, a', b', α, α' et θ, servent à en trouver 4, lorsqu'on connaît les 3 autres.

Ainsi, dans ce problème (consultez le n° 427, 4°), *trouver les axes, étant donnés deux diamètres conjugués en grandeur et en direction,* on connaît a', b', et θ. Multiplions (5) par ± 2, et ajoutons à (4), nous avons

$$(a \pm b)^2 = a'^2 \pm 2 a' b' \sin \theta + b'^2.$$

Cette équation, comparée à D, n° 355, montre que $a + b$ et $a - b$ sont un côté dans deux triangles, dont l'angle opposé est $90° + \theta$

pour l'un, $90^\circ - \theta$ pour l'autre, et a', b' les deux autres côtés.

434. Pour l'hyperbole, sans refaire ces calculs, il suffit de changer b et b', en $b\sqrt{-1}$ et $b'\sqrt{-1}$, et l'on a

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,\ a'b' \sin\theta = ab,$$
$$a'^2 \sin 2\alpha = b'^2 \sin 2\beta, \quad \text{ou } a^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = b^2,$$
$$a^2 \operatorname{tang}^2\alpha - (a^2 + b^2) \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\theta = b^2,$$

qui servent aux mêmes usages que pour l'ellipse. On voit donc que, *dans l'hyperbole, la différence des carrés des diamètres conjugués est égale à la différence des carrés des axes,* et que *le parallélogramme inscrit à l'hyperbole est constant et égal au rectangle des axes.*

Si $a' = b'$, on a $a = b$, et réciproquement : l'hyperbole équilatère a donc seule des diamètres conjugués égaux, et tous le sont deux à deux. On a encore $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = 1$: que CA (fig. 242) soit le 1er axe, CM et Cy' deux diamètres conjugués égaux ; on a $\operatorname{tang} MCA = \cot y'CA = \operatorname{tang} y'Cy$, ou $y'Cy = x'Cx$; et comme l'asymptote SC fait l'angle SCA de 45°, on a $SCM = SCy'$: ainsi, *l'asymptote coupe par moitié les angles de tous les diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère.*

435. Les triangles QSM, CMP (fig. 242) sont équivalents (n° 420), et l'aire $CPMQ = CMS = \frac{1}{2}ab$: or (page 347), $CMS = \frac{1}{2} SM \,.\, CM \sin\theta$, θ étant l'angle CMS des diamètres conjugués ; ou $ab = a' \times SM \sin\theta = a'b' \,.\, \sin\theta$ (n° 434) ; donc $SM = b'$. *Quel que soit le diamètre* CM, *la longueur et la direction de son conjugué est* ST. Les diagonales HI et GK (fig. 245) du parallélogramme inscrit sont les asymptotes.

Le calcul du n° 416 fait sur l'équ. $a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$ donne $y = \pm \frac{b'}{a'} x$ pour équ. des asymptotes, quand les diamètres conjugués sont pris pour axes. Nous pouvons en déduire de nouveau divers théorèmes.

Faisons $x = a' = CM$ (fig. 242) ; il vient $y = b' = MS = MT$; ainsi M est le milieu de ST (n° 420), et les asymptotes sont déterminées par les extrémités S, T des diamètres conjugués (n° 435).

Pour toute abscisse, il y a deux ordonnées égales et opposées, quand Cy' est parallèle à la tang ST, Cx' coupe donc bb' et NN' par moitiés ; d'où $bN = b'N'$: et puisque la direction ST est quelconque, toute corde jouit de la même propriété (n° 421).

436. Transformons l'équ. de l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, et

prenons d'autres axes aussi rectangulaires quelconques, en posant (C, n° 383)

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

d'où
$$a^2x'^2 \sin^2\alpha + 2a^2x'y' \sin\alpha \cos\alpha + a^2y'^2 \cos^2\alpha$$
$$+ b^2x'^2 \cos^2\alpha - 2b^2x'y' \sin\alpha \cos\alpha + b^2y'^2 \sin^2\alpha = a^2b^2.$$

α désigne l'angle des x' avec les x. Pour trouver les points de rencontre des nouveaux axes avec la courbe, on fera successivement $x' = 0$ et $y' = 0$; il viendra

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}, \qquad B^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}.$$

A et B sont les distances du centre aux deux points de section de la courbe par les axes x' et y' rectangulaires ; donc

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Cette expression étant indépendante de α, prouve que *si l'on mène par le centre de l'ellipse deux lignes quelconques à angle droit, les distances* A *et* B *du centre à la courbe comptées sur ces lignes, sont telles que* $A^{-2} + B^{-2}$ *est constant.*

Le même calcul pour l'hyperbole donne

$$A^{-2} + B^{-2} = a^{-2} - b^{-2} = \text{constante :}$$

mais, pour concevoir ce qu'exprime B, il faut imaginer qu'une autre hyperbole conjuguée ayant b pour 1er axe, et a pour 2e, est tracée entre les asymptotes de la courbe proposée, comme on le voit fig. 253.

437. La parabole n'ayant pas de diamètres conjugués, rapportons-la à ses diamètres simples. Pour transporter l'origine A en un point quelconque (a, b), et changer en outre la direction des coordonnées, il faut (n° 383), dans $y^2 - 2px = 0$, faire

$$x = a + cx' + c'y', \quad y = b + sx' + s'y',$$

s et s' désignant les sinus de α et β, c et c' leurs cos. : ce qui donne

$$b^2 - 2pa + 2x'(bs - pc) + 2y'(bs' - pc') + 2ss'x'y' + s^2x'^2 + s'^2y'^2 = 0.$$

Mais, pour que l'axe des x' soit diamètre par rapport à celui des y', il faut (n° 426) que les termes $2ss'x'y'$ et $2y'(bs' - pc')$ disparaissent :

donc $ss' = 0$ et $bs' - pc' = 0$. La 1re équ. donne $s = 0$, $c = 1$; la 2e revient à b tang $\theta = p$, θ étant l'angle des x et y'; elle détermine cet angle, ou la direction de l'axe y' : a et b sont arbitraires. Donc *les parallèles* QS *à l'axe* Ax *sont les seuls diamètres, et le sont tous* (fig. 234). L'équ. transformée est

$$s'^2y'^2 - 2px' + b^2 - 2pa = 0.$$

Mais il suit de la définition (n° 426) que, si une ligne est diamètre relativement à une autre, toute parallèle à cette dernière peut être prise pour axe des y : plaçons l'origine au point M, où l'axe des x' coupe la courbe, nous aurons $b^2 - 2pa = 0$, d'où

$$y'^2 = \frac{2px'}{s'^2} = 2p'x',$$

en faisant $\frac{p}{s'^2} = p'$. Comme tang $\theta = \frac{p}{b}$, la tangente MT à l'origine M est l'axe des y' (n° 404); $2p'$ est ce qu'on nomme le *Paramètre* du diamètre MT; mais

$$\sin\theta = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + b^2)}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(p + 2a)}};$$

donc (n° 398) $$2p' = \frac{2p}{\sin^2\theta} = 2(p + 2a) = 4\,MF.$$

Ainsi, *le paramètre est le quadruple de la distance de l'origine au foyer*. Réunissons les équ.

$$b \text{ tang } \theta = p, \quad p' = p + 2a, \quad b^2 = 2pa.$$

On voit que, lorsqu'on connaît deux des quantités p, p', a, b, et θ, on peut trouver les trois autres (sauf les exceptions analytiques) et construire la courbe; elle a pour équ. $y'^2 = 2p'x'$.

438. De ce que les équ. aux axes et aux diamètres sont de même forme, on peut tirer les conclusions suivantes.

1° La construction donnée pour l'ellipse (n° 431, 2°) s'applique à la parabole, lorsqu'on connaît un diamètre et son paramètre $2p'$.

2° L'équ. de la tangente en un point quelconque (x', y') est $yy' = p'(x + x')$; l'inclinaison sur le diamètre est donnée par $\frac{p'}{y'}$ qui est le rapport des sinus des angles que la tang. fait avec les axes.

Si la tangente doit être menée par un point extérieur, la construction et les propriétés données n° 407 ont encore lieu.

3° La sous-tangente est encore double de l'abscisse; ainsi l'on mènera aisément la tangente en un point donné, connaissant un diamètre.

Si l'on a une parabole tracée MAM' (fig. 234), on pourra déterminer un diamètre, l'axe, le sommet, les tangentes, etc.; car, en menant deux cordes parallèles quelconques, et joignant leurs milieux, on aura un diamètre MS : traçant ensuite la corde MM' perpend. à MS, et AN parallèlement par le milieu P, on aura le sommet A....

On remarquera que $2p' = \frac{y'^2}{x'}$; ainsi le paramètre est une troisième proportionnelle à une abscisse et son ordonnée. On décrira donc facilement une parabole, connaissant la direction d'un diamètre MS sur Mt, et un point de la courbe : car les coordonnées x', y' de ce point font connaître le paramètre $2p'$, en sorte qu'on a l'équ. $y^2 = 2p'x$, et qu'on retombe sur ce qu'on a vu.

Discussion des Équations du second degré.

439. Soit demandé de construire les courbes dont l'équation est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0; \quad . \quad . \quad (a)$$

les coefficients A, B.... sont donnés en grandeur et en signes. Les coordonnées seront supposées rectangulaires, attendu que, sans changer le degré de l'équation, on peut toujours les ramener à cet état par une transformation (E, n° 384). Comme les courbes ont des formes et des propriétés très-différentes, suivant qu'elles ont ou n'ont pas de centre, nous distinguerons les trois cas de $B^2 - 4AC$ nul, négatif ou positif. Pour abréger, nous ferons, par la suite, $B^2 - 4AC = m$.

1er CAS. $B^2 - 4AC = m = 0$.

440. La courbe dont il s'agit étant MDM' (fig. 248), *n'a pas de centre*; Ax et Ay sont les axes. Rapportons cette courbe à d'autres axes Ax', Ay', aussi à angle droit, et cherchons si l'on peut

prendre ces axes tels, que l'équ. devienne de la forme

$$ay'^2 + dy' + ex' + F = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

La même courbe MDM' a pour équ. (a) et (b), les axes étant différents, si l'on peut, par une transformation de coordonnées, réduire l'une à devenir identique avec l'autre. L'angle xAx' des deux axes étant θ, passons de cette dernière à l'autre, c'est-à-dire du système $y'Ax'$ à yAx, à l'aide des équ. (C, n° 383), où nous ferons négatif cet angle θ des deux axes x et x', parce que celui x de la transformée (a) est en dessous de celui x' de l'équ. (b) que nous regardons comme donnée, pour un instant. Faisons donc dans l'équ. (b)

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta, \quad x' = y\sin\theta + x\cos\theta. \quad . \quad . \quad (c)$$

Puisque le résultat de cette substitution doit être identique avec (a), et que le nombre constant F est le même des deux parts, il faut que les coefficients soient respectivement égaux. Comparons donc, terme à terme, le résultat avec (a); nous aurons

$$a\cos^2\theta = A, \qquad a\sin^2\theta = C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$-2a\sin\theta\cos\theta = B, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$d\cos\theta + e\sin\theta = D, \; e\cos\theta - d\sin\theta = E. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nous trouvons ainsi 5 équations pour déterminer les 4 inconnues a, e, d, θ: mais en vertu de la condition $B^2 = 4AC$, (2) rentre dans les relations (1); en sorte que ces 3 équ. n'équivalent qu'à 2, propres à déterminer a et θ, et que le calcul ci-dessus n'est possible que dans le cas de $m = 0$. Ajoutant les deux 1res, il vient $a = A + C$; d'où

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{C}{a}}, \; \cos\theta = \sqrt{\frac{A}{a}}, \; \text{tang}\,\theta = \sqrt{\frac{C}{A}}, \; \sin 2\theta = -\frac{B}{a}.$$

Éliminant ensuite d et e entre les équ. (3), on a

$$d = D\cos\theta - E\sin\theta, \quad e = D\sin\theta + E\cos\theta, \quad . \quad . \quad (4)$$

ou

$$d = \frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{\sqrt{a}}, \quad e = \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{\sqrt{a}}. \quad . \quad (5)$$

La condition $B^2 = 4AC$ rend (n° 138) les trois 1ers termes de l'équ. (a) réductibles au carré d'un binome, ou $(ky + lx)^2$; alors A et C sont des carrés positifs, dont les racines k et l sont réelles. L'infini, ou l'imaginaire, ne peut donc jamais s'introduire dans ces résultats : ce qui prouve que, dans le cas de $m = 0$, on pourra

toujours, par une transformation d'axes, réduire la proposée (a) à la forme (b).

Si A ou C était nul, comme $B^2 = 4AC$, B le serait aussi; la proposée serait donc sous la forme (b), et il n'y aurait pas lieu à changer d'axes : et si l'on avait à la fois A et C nuls, l'équ. (a) serait privée de ses trois premiers termes, c'est-à-dire serait au 1er degré.

Dans toute équ. proposée où $m = 0$, on fera donc le calcul ci-dessus, ou plutôt on posera de suite la transformée (b), après en avoir trouvé les coefficients à l'aide de nos équ., et construit le nouvel axe Ax' (fig. 248), d'après la valeur de θ, savoir :

$$\text{tang}\,\theta = \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad \sin 2\theta = -\frac{B}{A + C}. \quad . \quad . \quad (6)$$

Le signe de $\sin 2\theta$ est contraire à celui de B, ce qui apprend si l'angle 2θ est $> 180°$, c'est-à-dire si θ, ou $x'Ax$ étant $>$ qu'un quadrans, l'axe Ax' est au-dessous de Ax. De là résulte le signe du radical qui entre dans les équ. (5), $\sqrt{a}$ conservant toujours le signe $+$. Du reste, ces coefficients sont compliqués de l'irrationnalité $\sqrt{a}$.

Soit, par ex., $\quad 2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 - y - 2x + 5 = 0$;

multipliant par 2, pour mettre en évidence le carré parfait, nous avons $A = 4$, $B = -4$, $C = 1$. . . . . ; d'où $a = 5$, $\text{tang}\,\theta = \frac{1}{2}$, $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$. On prend les radicaux positifs, et l'on trouve $d = 0$, $e = -2\sqrt{5}$; d'où $5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = 0$. Telle est l'équ. qu'il s'agit de construire, l'axe des x' étant tel, que l'angle $x'Ax$ ait $\frac{1}{2}$ pour tangente (on prendra AE quelconque et sa perpend. iE, moitié de AE, fig. 248).

441. Le calcul précédent réduit donc, en général, la proposée à la forme (b), qu'il s'agit maintenant de construire sur les axes rectangulaires Ax', Ay' (fig. 248). Transportons l'origine en un point (h, k); ces deux lettres désignent des arbitraires. En changeant y' et x', en $y' + k$ et $x' + h$, dans l'équ. (b), elle devient

$$ay'^2 + (2ak + d)\,y' + ex' + (ak^2 + dk + eh + F) = 0.$$

Pour déterminer h et k, chassons le terme en y' et le terme constant (la nouvelle origine sera un point de la courbe); posons donc

$$2ak + d = 0, \quad ak^2 + dk + eh + F = 0;$$