d'où $k = -\frac{d}{2a}$, $h = \frac{d^2 - 4aF}{4ae} = \frac{ak^2 - F}{e}$. . . . . (6)

Telles sont les coordonnées de la nouvelle origine, qui est un des points de la courbe * : la transformée est $ay'^2 + ex' = 0$, qui, comparée à $y'^2 = 2px'$, est l'équ. D'UNE PARABOLE rapportée à son axe **, et tournée dans un sens, ou dans le sens contraire, selon que e est positif ou négatif.

Soit l'équ. $2y^2 + 5y - 4x = \frac{7}{8}$; on trouve $k = -\frac{5}{4}$, $h = -1$; on prendra $AB = -1$, $BC = -\frac{5}{4}$ (fig. 249); l'origine est portée de A en C, et l'équ. devient $y'^2 = 2x'$. La parabole a son sommet en C, et le paramètre est 2.

L'équ. $y^2 - 2y + x = 0$, donne $y'^2 = -x$, $AB = BC = 1$ (fig. 250), l'origine passe de A en C, et la parabole est ouverte dans le sens des x négatifs.

Reprenons enfin l'exemple de la page 411, déjà réduit à $5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = 0$, les axes étant Ax', Ay' (fig. 248); nous trouvons $k = 0$, $h = \sqrt{5}$; le sommet, ou la nouvelle origine est en M', prenant $AM' = \sqrt{5}$: l'équ. devient $y'^2 = 2x'\sqrt{\frac{1}{5}}$; le paramètre est $\sqrt{\frac{4}{5}}$.

442. Il est un cas où notre calcul ne peut se faire, celui où $e = 0$; car h n'entre plus dans le calcul, et demeure arbitraire; en sorte qu'on a deux équ. pour déterminer la seule quantité k. Posant alors seulement $2ak + d = 0$, nous avons, dans cette circonstance,

$$ay'^2 + ak^2 + dk + F = 0, \quad \text{ou } 4a^2y'^2 = d^2 - 4aF.$$

La nouvelle origine est l'un quelconque des points de la parallèle aux x, qui a pour équ. $y' = k$.

1° Si $d^2 - 4aF > 0$, on a $2ay' = \pm\sqrt{(d^2 - 4aF)}$, équation qui donne *deux droites parallèles* aux x', et placées à égales distances de cet axe. Telle est, par ex., l'équ. $y'^2 + 4y' + 3 = 0$.

2° Si $d^2 - 4aF = 0$, on a $y' = 0$, équ. de l'axe des x'; l'équation (b) est donc celle *d'une droite* parallèle aux x'. L'équation $y'^2 + 4y' + 4 = 0$ est dans ce cas.

* Dans les fig. suivantes, A désigne la 1re origine des coordonnées, C la nouvelle.

** Observez que si l'équ. (b) était la proposée, et que les axes n'y fussent pas rectangulaires, il ne serait pas nécessaire de les amener à cet état par une 1re transformation, et que les équ. (b) pourraient être appliquées pour transporter l'origine; la parabole serait seulement rapportée à l'un de ses diamètres, comme n° 437; on pourrait alors aussi aisément la construire que si elle l'était à son axe.

3° Si $d^2 - 4aF < 0$, la proposée ne représente *rien*, puisqu'on la ramène à $y'^2 + n^2 = 0$, qui est visiblement absurde. C'est ce qui arrive pour l'équ. $y'^2 + 4y' + 5 = 0$.

L'équ. (b) devient $ay'^2 + dy' + F = 0$, dans le cas de $e = 0$; on peut lui donner la forme

$$(2ay' + d)^2 - d^2 + 4aF = 0.$$

Ainsi, le 1er membre est plus grand ou plus petit qu'un carré, ou même est un carré exact, selon que $4aF$ est $>$, $<$ ou $= d^2$. On peut aisément voir que l'équ. (a) offre la même particularité, et a, dans ce cas, la forme $(ky + lx + c)^2 + Q = 0$, qui est absurde si Q est positif, du 1er degré si $Q = 0$, et enfin qui donne deux droites parallèles si Q est négatif (*voy.* p. 431).

443. Il est donc prouvé que *si* $m = 0$, *l'équ. du* 2e *degré est celle d'une parabole;* mais que des cas particuliers donnent *une droite, deux parallèles*, ou même *rien*.

Quant à l'équ. $cx^2 + dy + ex + F = 0$,

comme elle revient à (b), où x est changé en y, et y en x, la courbe est la même, rapportée à l'axe des y : on peut au reste transporter l'origine comme ci-dessus. Par exemple, l'équ. $x^2 + 3y = 2x - 1$, en prenant $AC = 1 = h$ (fig. 251), et portant l'origine de A en C, devient $x'^2 + 3y' = 0$. La parabole est ouverte du côté des y négatifs, et l'axe des y' est celui de la courbe.

On trouve que, 1° l'équ. $x^2 - 6x + 10 = 0$ ne représente rien; 2° $x^2 - 6x + 9 = 0$ est l'équ. d'une parallèle aux y; elle revient à $x' = \pm 3$; 3° pour $x^2 - 6x + 7 = 0$ on a deux parallèles aux y.

2e CAS. $B^2 - 4AC = m$ *négatif.*

444. La courbe a un centre, auquel nous commencerons par transporter l'origine; car on ne peut plus ici réduire la proposée à la forme (b). Faisons donc le calcul du n° 425, et l'équ. (a) sera ramenée à la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Cherchons à la dégager du terme xy, c'est-à-dire à la transformer en

$$qy'^2 + px'^2 + Q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Substituons donc, dans cette dernière, les valeurs (c) de y' et x', et

comparons, terme à terme, le résultat à l'équ. (f), pour exprimer l'identité ; il viendra

$$q\cos^2\theta + p\sin^2\theta = A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$q\sin^2\theta + p\cos^2\theta = C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$2\sin\theta\,.\cos\theta\,.\,(p-q) = B. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ces trois équ. servent à déterminer les trois inconnues θ, p et q. La somme des deux 1res devient $p + q = A + C$; formant ensuite $B^2 - 4AC$, ou m, en carrant la 3e et retranchant quatre fois le produit des deux autres, il vient

$$m = -4pq\,(\sin^4\theta + 2\sin^2\theta\,.\cos^2\theta + \cos^4\theta) = -4pq\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2,$$

ou $m = -4pq$. Les inconnues p et q, ayant $A + C$ pour somme et $-\frac{1}{4}m$ pour produit, sont les racines de l'équ. du 2e degré,

$$z^2 - (A + C)\,z = \tfrac{1}{4}m; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

d'où

$$p \text{ et } q = \tfrac{1}{2}(A + C) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 + (A - C)^2}.$$

Ces racines p et q sont visiblement réelles dans le cas actuel.

La différence entre les équ. (1) et (2) est

$$(q - p)\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (q - p)\cos 2\theta = A - C;$$

en recourant à l'équ. (3), on trouve donc

$$\sin 2\theta = \frac{-B}{q - p}, \quad \cos 2\theta = \frac{A - C}{q - p}, \quad \text{tang}\, 2\theta = \frac{-B}{A - C}.$$

Cette dernière valeur, facile à construire, donne 2θ, et, par suite, l'angle θ d'inclinaison de l'axe des x' sur celui des x : le signe de tang 2θ apprendra si 2θ est $>$ ou $<$ 90° ; mais, dans tous les cas, θ est $<$ 90°, et l'axe des x' tombe en dessus de celui des x. D'ailleurs, sin 2θ est toujours positif; ainsi $p - q$ doit être de même signe que B : donc q est *la plus grande des deux racines de* z, *si* B *est négatif, et la plus petite, si* B *est positif*. On saura ainsi distinguer entre elles les racines qu'il faut préférer pour q et p.

Soit, par ex., l'équ. $5y^2 + 2xy + 5x^2 + 2y - 2x = \frac{3}{2}$; en transportant l'origine au centre (n° 425), point dont les coordonnées sont $h = \frac{1}{4}$, $k = -\frac{1}{4}$, la proposée devient $5y^2 + 2xy + 5x^2 = 2$; on a ensuite, pour l'équ. (i), $z^2 - 10z + 24 = 0$; d'où $z = 5 \pm 1$; ainsi, B étant positif, $q = 4$, $p = 6$, puis $4y'^2 + 6x'^2 = 2$, équ. qui

reste à construire, les axes des x' et y' étant déterminés par tang $2\theta = \infty$, d'où $2\theta = 90°$, c'est-à-dire que l'axe des x' fait un angle de 45° avec celui des x en dessus duquel il est placé. Ces constructions sont sans difficulté.

445. Ce calcul ne peut présenter aucun cas d'exception. Il est à observer que m étant négatif dans le cas actuel, sav., $B^2 = 4AC - m$, le radical des valeurs de z se réduit à $\sqrt{(A + C)^2 - m}$, qui est $< A + C$. Ces valeurs de p et q sont donc de même signe que $A + C$, en sorte qu'on peut regarder comme positifs p et q dans l'équ. (g), qu'il s'agit maintenant de discuter. Nous examinerons successivement trois cas, selon que Q est nul, positif ou négatif.

1° Si $Q = 0$, on a $qy'^2 + px'^2 = 0$; équ. qui ne peut subsister que si, à la fois, $x' = 0$, $y' = 0$. On a donc *un point*, qui est l'origine des x' et y'. L'équ. $y^2 - 4xy + 5x^2 + 2x + 1 = 0$ est dans ce cas ; le point est $(-1, -2)$, ainsi qu'on le reconnaît par le calcul, qui transforme d'abord la proposée en $y^2 - 4xy + 5x^2 = 0$, puis donne $z = 3 \pm 2\sqrt{2}$, tang $2\theta = -1$, $2\theta = 135°$, enfin $(3 + 2\sqrt{2})\,y'^2 + (3 - 2\sqrt{2})\,x'^2 = 0$.

2° *Si* Q *est positif*, la proposée ne représente *rien*, puisque l'équ. (g) est absurde, trois quantités positives ne pouvant s'entre-détruire. C'est ce qui arrive dans l'ex. précédent, quand on met, au lieu du dernier terme 1, une valeur > 1.

3° *Si* Q *est négatif*, la transformée (g) devient $qy'^2 + px'^2 = Q$. En faisant tour à tour x' et y' nuls, pour obtenir les points où la courbe coupe les nouveaux axes, on obtient

$$y = \sqrt{\frac{Q}{q}} = b, \quad x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a;$$

d'où $q = \frac{Q}{b^2}$, $p = \frac{Q}{a^2}$, puis $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$. La courbe est donc UNE ELLIPSE, rapportée à son centre et à ses axes $2a$ et $2b$.

Si, dans l'ex. précédent, on met -1 au dernier terme, on trouve d'abord $y^2 - 4xy + 5x^2 = 2$, les mêmes valeurs de z et de θ, puis l'équ.

$$(3 + 2\sqrt{2})\,y'^2 + (3 - 2\sqrt{2})\,x'^2 = 2,$$

qui appartient à une ellipse dont les axes sont $\sqrt{8\,(3 \mp 2\sqrt{2})}$.

446. Concluons de là que l'équ. générale du 2e degré appartient

à *l'ellipse, toutes les fois que* m *est négatif;* mais qu'on trouve deux cas particuliers, qui donnent l'un *rien*, l'autre *un point*. Lorsque $m < 0$, les valeurs de z sont de même signe : elles deviennent égales dans le cas du cercle, car $p = q$. *Voy.* n° 454.

3e CAS. $B^2 - AC = m$ *positif.*

447. Tous les calculs du n° 444 conviennent encore ici, en sorte qu'il faut reproduire la même transformation et les mêmes valeurs de θ et z; seulement, comme $B^2 = m + 4AC$, m étant positif, le radical est $> A + C$, et les deux racines de z sont de signes contraires, en sorte que, dans la transformée (g), on peut donner le signe $+$ à q, et le $-$ à p; savoir :

$$qy'^2 - px'^2 + Q = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (l)$$

Analysons les cas de Q nul, positif et négatif.

1° *Si* Q $= 0$, on a $qy'^2 = px'^2$, d'où $y' = \pm x' \sqrt{\frac{p}{q}}$; il est évident qu'on obtient *deux droites*, CD, CE (fig. 252), qui se croisent à la nouvelle origine C, l'axe des x' coupant par moitié l'angle DCE qu'elles font entre elles. L'ordonnée $\pm \sqrt{\frac{p}{q}}$, qui répond à $x' = 1$, sert à construire ces droites; elle est la tangente des angles DCx', ECx'.

Par ex., l'équ. $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0$, en transportant l'origine au point $(0, -1)$, qui est le centre, devient $y^2 - 6xy + x^2 = 0$: on trouve $z^2 - 2z = 8$; d'où $z = 1 \pm 3$; savoir, $q = 4$, $p = -2$ et $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = 0$; d'où $y' = \pm x' \sqrt{\frac{1}{2}}$: enfin, $\theta = 45°$. Ces constructions n'offrent aucune difficulté (*voy.* fig. 252).

2° *Si* Q *est positif*, l'équ. (l) devient $qy'^2 - px'^2 = -Q$: posant $x' = 0$, on a $y' = \sqrt{\frac{Q}{q}} \cdot \sqrt{-1}$; on fait $\sqrt{\frac{Q}{q}} = b$; puis on pose $y' = 0$, et l'on a

$$x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a, \quad \sqrt{\frac{Q}{q}} = b;$$

ce sont les demi-axes D'UNE HYPERBOLE, ainsi qu'il suit du calcul de la

substitution des valeurs $p = \frac{Q}{a^2}$, $q = \frac{Q}{b^2}$, qui donne

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2.$$

On a un exemple de ce cas en remplaçant $+1$, dans le dernier terme de l'équ. précédente, par 5; les valeurs de z, θ sont les mêmes, et l'on a $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = -1$; les axes sont $b = 1$, $a = \sqrt{2}$.

3° *Si* Q *est négatif*, on a $qy'^2 - px'^2 = Q$; un calcul semblable, ou seulement le changement de x en y, et y en x, prouve qu'on a une hyperbole dont les axes sont l'inverse des précédents. Qu'on change $+1$ en -3, dans le dernier terme de l'exemple ci-dessus, et l'on trouvera $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = 1$; les axes sont $a = 1$, $b = \sqrt{2}$; la courbe coupe le second des axes coordonnés (celui des y').

448. Faisons varier Q dans l'équ. (l). Q étant positif, on a l'hyperbole MAN, LOI (fig. 253); et il suit des valeurs des axes a et b, qu'en prenant $AD = AD' = \sqrt{\frac{p}{q}}$, et l'abscisse $CA = 1$ (ou $AD = b$ et $AC = a$), les droites CD et CD' sont les asymptotes de toutes les hyperboles, qu'on obtient à mesure que Q s'accroît; seulement le sommet A s'éloigne de plus en plus, et la courbe s'ouvre sans cesse davantage. Si $Q = 0$, on a les asymptotes mêmes, $qy'^2 - px'^2 = 0$. Enfin, si Q devient négatif, on obtient l'hyperbole $M'A'N'$, $I'O'L'$, tracée entre les mêmes asymptotes, mais dans les autres angles, les sommets A', O' s'éloignant à mesure que Q augmente

449. Ainsi *l'équ. générale du 2e degré appartient à l'hyperbole, toutes les fois que* m *est positif;* mais, dans un cas particulier, on trouve *deux droites qui se croisent*. Les valeurs de z sont alors de signes différents; et lorsque, abstraction faite de ce signe, elles sont égales, $C = -A$, l'hyperbole est équilatère. Comme $B^2 - 4AC$ est toujours positif dès que A et C ont des signes différents, on est alors dans le cas de l'hyperbole, quelles que soient les grandeurs de A, B, C.... La même chose a lieu si A ou C est nul, c'est-à-dire si la proposée est privée de l'un des carrés x^2 et y^2, et même si ces carrés manquent l'un et l'autre. Dans ces divers cas, la marche des calculs est toujours la même : mais comme dans le dernier elle devient très-simple, nous l'exposerons ici. Soit proposée l'équ.

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0;$$

on transporte l'origine au centre, en faisant $Bk + E = 0$, $Bh + D = 0$; d'où

$$k = -\frac{E}{B}, \quad h = -\frac{D}{B}, \quad x'y' = \frac{Q}{B^2},$$

en posant $Q = DE - BF$. Ces expressions ne sont sujettes à aucune exception. Ainsi l'équ. proposée est celle d'une *hyperbole rapportée à des axes parallèles aux asymptotes*. L'hyperbole est équilatère quand les xy sont rectangulaires (n° 416). Si CD' (fig. 253) est l'axe des x', CD celui des y', la courbe est tracée dans les angles DCD', ECE'; si Q est positif, elle est MAN, LOI; enfin elle est $M'A'N'$, $I'O'L'$ quand Q est négatif. Si $Q = 0$, l'équ. proposée appartient aux asymptotes mêmes.

Ainsi, pour l'équ. $xy - 2x + y + m = 4$, les axes étant Ax, Ay, on a $k = 2$, $h = -1$; on fera $AB = 1$ (fig. 254), $BC = 2$; Cx', Cy' seront les asymptotes de l'hyperbole $x'y' = 2 - m$, qui sera MN, OP, si $m < 2$; $M'N'$, $O'P'$, si $m > 2$; enfin, $m = 2$ donne les droites Cx', Cy'.

450. Il convient de remarquer que, dans les cas de $m >$ ou < 0, si la proposée est privée du terme en xy, le calcul de la discussion est très-simple, et se réduit à transporter l'origine au centre; il n'est pas même nécessaire de rendre les coordonnées rectangulaires quand elles ne le sont pas, et l'équ. est alors rapportée aux diamètres conjugués, au lieu de l'être aux axes. En effet, soit la proposée

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

le centre est au point $\left(-\frac{E}{2C}, -\frac{D}{2A}\right)$, c'est-à-dire qu'on a *

$$2Ch + E = 0, \quad 2Ak + D = 0, \quad Ay'^2 + Cx'^2 + Q = 0,$$

en faisant $Q = Ak^2 + Ch^2 + Dk + Eh + F = F - \frac{AE^2 + CD^2}{4AC}$.

Voici divers exemples de ces calculs :

Les équ. $2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 2 = 0$, $4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$ ne représentent rien; la 1re a pour centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, et se réduit à

* Les coordonnées du centre s'obtiennent aisément à l'aide du théorème (506), qui apprend à chasser le 2e terme d'un polynome. Si l'on multiplie respectivement les équ. qui suivent par h et k, et qu'on ajoute, on trouve $Ak^2 + Ch^2 = -\frac{1}{2}(Dk + Eh)$, qui sert à réduire la valeur de Q, ainsi qu'on l'indique plus bas.

$2y'^2 + 3x'^2 + \frac{3}{4} = 0$; la 2e a le centre au point $(\frac{3}{4}, 0)$, et donne $4y'^2 + 2x'^2 + \frac{7}{8} = 0$.

L'équ. $y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = 0$ appartient au point $(+1, -1)$.

L'équ. $\frac{3}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$ donne $h = 2$, $k = 0$, puis $\frac{3}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$: les demi-axes de l'ellipse sont $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$; on prend $AC = 2$ (fig. 255), et l'on trace l'ellipse $DFEO$, en formant $DC = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{6}$. Si les coordonnées étaient obliques, ces longueurs seraient celles des demi-diamètres conjugués.

Pour $y^2 + 2x^2 - 2y = 0$, on a une ellipse tangente à l'axe des x, dont le centre est sur l'axe des y au point $(0, 1)$; on a $a = 1$, $b = \sqrt{2}$.

L'équ. $y^2 - 4x^2 + 4y + 12x - 5 = 0$ devient $y' = \pm 2x'$, en transportant l'origine de A en C (fig. 252), $AB = \frac{3}{2}$, $BC = -2$; on prend $y' = 2$ et $x' = \pm 1$, et l'on trace CD et CE.

Pour $2y^2 - 3x^2 - 2y - 3x + \frac{1}{2} = 0$, le centre est au point $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, et l'on a $2y'^2 - 3x'^2 = -\frac{3}{4}$. On prendra $AB = \frac{1}{2} = BC$ (fig. 256), et l'on décrira l'hyperbole, dont $a = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{\frac{3}{8}}$ sont les axes ou les diamètres conjugués, selon que les coordonnées sont rectangles ou obliques.

L'équ. $y^2 - 2x^2 - 2y + 9 = 0$ donne $y^2 - 2x^2 + 8 = 0$, l'hyperbole pour laquelle $k = 1$, $h = 0$, $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$.

Enfin $3y^2 - 2x^2 + 2x + 3y = \frac{1}{2}$ donne $AB = h = \frac{1}{2}$ (fig. 257). $BC = k = -\frac{1}{2}$; d'où $3y'^2 - 2x'^2 = \frac{3}{4}$, équ. qu'il est aisé de rapprocher de celle de la fig. 256; seulement la courbe est placée différemment.

451. Il résulte, de cette exposition, que l'équation générale du 2e degré présente trois cas : le 1er où $m = 0$, qui donne une *parabole*, outre les cas particuliers *d'une droite, de deux parallèles*, et de *rien*; le 2e où m est négatif, qui donne *une ellipse*, outre les cas particuliers d'*un point* et de *rien*; le 3e enfin où m est positif, qui répond à *l'hyperbole*, rapportée soit au 1er, soit au 2e axe, outre un cas qui donne *deux droites non parallèles*. Comme les sections d'un cône par un plan sont précisément une parabole, une ellipse ou une hyperbole; et que lorsque la section se fait par le sommet, on a une droite, un point ou deux droites croisées; de nos huit cas, six sont des sections coniques : ce qui fait dire que *toutes les équ. du second degré appartiennent aux sections d'un cône par un plan*. Partout où un plan et un cône existent, il ne peut pas arriver qu'il n'y

ait pas intersection, ou qu'on ait deux parallèles ; d'où l'on voit que ce théorème souffre deux exceptions.

En faisant mouvoir le plan coupant parallèlement à lui-même, lorsqu'il passe par le sommet, l'ellipse devient un point, la parabole une droite, l'hyperbole deux droites croisées ; c'est ce qui a fait considérer le point comme une sorte d'ellipse dont les axes sont nuls ; une droite, comme une sorte de parabole ; deux droites croisées, comme une hyperbole (n° 400) : ces considérations n'intéressent en rien la théorie.

452. On obtient la grandeur et la direction des axes principaux par le procédé suivant. Supposons d'abord que les axes soient rectangulaires, et que l'origine soit au centre ; l'équ. de la courbe proposée est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Concevons que du centre A, avec un rayon r, on ait tracé un cercle (fig. 258 *bis*) ; l'équ. est $x^2 + y^2 = r^2$: il y aura, en général, quatre points de section ; pour les obtenir, menons par l'origine une droite AK à l'un de ces points, et soit $y = Mx$ son équ. ; en éliminant x et y entre ces équ., on trouve

$$(Ar^2 + Q)\, M^2 + Br^2 M + Cr^2 + Q = 0. \quad . \quad . \quad (2)$$

Si le rayon r est donné, cette équ. fera connaître deux valeurs de M, ce qui prouve qu'il n'y a que deux droites allant du centre aux quatre points d'intersection, c'est-à-dire que ces points sont deux à deux sur un même diamètre. Ces lignes s'obtiennent en construisant les deux valeurs de M, qui est la tangente de leur angle d'inclinaison sur l'axe des x. Quand les racines sont imaginaires, le rayon r est trop grand ou trop petit pour que le cercle rencontre la courbe ; et si les racines sont égales, les points de section coïncident deux à deux, et le cercle est tangent à la courbe. La tangente commune à l'un et à l'autre en ce point, est perpendiculaire au rayon du cercle, propriété qui ne convient qu'aux axes principaux. Ainsi les valeurs de M qui répondent au cas des racines égales sont propres à ces axes. Alors on a (n° 138)

$$B^2r^4 - 4\,(Ar^2 + Q)\,(Cr^2 + Q) = 0,$$

ou

$$(B^2 - 4AC)\, r^4 - 4Qr^2\,(A + C) = 4Q^2,$$

puis

$$(Ar^2 + Q)\, M + \tfrac{1}{2} Br^2 = 0,$$

en extrayant la racine de l'équ. (2) qui est un carré ; on en tire

$$r^2 = -\frac{2QM}{2AM + B}, \quad M^2 - 2\alpha M = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en posant, pour abréger, $A - C = B\alpha$; donc $M = \alpha \pm \sqrt{(1 + \alpha^2)}$. Ainsi prenez sur l'axe Ax, $AD = 1$, élevez l'ordonnée $DI = \alpha$, AI sera $\sqrt{(1 + \alpha^2)}$: du centre I, tracez le cercle KAK', avec le rayon AI, et les points de section K, K' donneront les directions AK, AK' des axes principaux, puisque les valeurs de M sont les tangentes des angles KAD, $K'AD$. Ces lignes sont à angle droit, d'après la construction ; et en effet le produit des deux valeurs de M est -1 (n° 137). On en tire ensuite les deux valeurs de r qui sont les longueurs des axes :

$$r^2 = 2Q \times \frac{A + C \pm \sqrt{B^2 - 4AC + (A + C)^2}}{B^2 - 4AC}. \quad . \quad . \quad (4)$$

Si $B^2 - 4AC = m$ est négatif, le radical est $< A + C$; les deux valeurs de r^2 sont, ou positives, et on a une *ellipse* ; ou négatives, et on n'a *rien*, ou enfin nulles, $Q = 0$, et on a *un point* A. Quand m est positif, on a une *hyperbole* ; les valeurs de r^2 sont de signes contraires ; on change le $-$ en $+$ pour avoir le 2e axe. Cependant lorsque $Q = 0$, on a les *deux droites* AK, AK'. Ce calcul n'est plus possible quand $B^2 - 4AC = 0$.

Soit, par ex., l'équ. $y^2 - 2xy + 2x^2 = 2$; d'où $\alpha = \frac{1}{2}$, etc. $M = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$; $DI = \frac{1}{2}$, $AI = \sqrt{\frac{5}{4}}$, et le cercle KAK' donne les directions AK, AK' des deux axes. Enfin $r^2 = 3 \pm \sqrt{5}$ sont les longueurs de ces axes, rayons des deux cercles tangents à l'ellipse.

On pourra s'exercer encore au calcul sur l'équation $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0$, déjà traitée page 416.

Cette méthode s'applique pareillement au cas où les coordonnées font un angle γ. L'équ. du cercle est alors (n° 377)

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\gamma = r^2;$$

éliminant x et y à l'aide de l'équ. $y = Mx$, on a

$$(Ar^2 + Q)\, M^2 + (Br^2 + 2Q \cos\gamma)\, M + Cr^2 + Q = 0;$$

pour que cette équation soit un carré, il faut que

$$(\tfrac{1}{2} Br^2 + Q \cos\gamma)^2 - (Ar^2 + Q)\,(Cr^2 + Q) = 0,$$

ou $(B^2 - 4AC)r^4 - 4Qr^2(A + C - B\cos\gamma) = 4Q^2\sin^2\gamma$; . . (5)

puis $(Ar^2 + Q)M + \frac{1}{2}Br^2 + Q\cos\gamma = 0$; . . . . (6)

l'équ. (5) qu'on résout à la manière du 2e degré donne r^2; on peut éliminer r^2 entre les équ. (5) et (6). Enfin l'équation (6) donne M, et on peut construire l'équ. $y = Mx$.

453. Souvent on a plutôt pour objet de connaître la nature et la forme de la courbe dont on a l'équ., que de la construire rigoureusement; le procédé suivant a l'avantage de donner avec rapidité ces circonstances, et n'a pas, comme le précédent, l'inconvénient d'introduire des irrationnelles dans les coefficients.

Comme il suit de ce qui précède, que les lignes comprises dans l'équ. générale (*a*) p. 409 sont connues d'avance, il ne faut, pour les distinguer entre elles, que trouver un caractère propre à chacune : ce caractère est tiré des limites de la courbe, qui sont très-différentes dans les cas de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole. Pour obtenir ces limites, résolvons l'équ. (*a*) par rapport à y; nous aurons une expression de cette forme,

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{(mx^2 + nx + p)}; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

α, β, m, n et p sont des constantes connues (*voy.* p. 183). Chaque valeur de x répond à deux points de la courbe, tant que le radical est réel ; s'il est imaginaire, la courbe n'a aucun point correspondant à l'abscisse dont il s'agit; enfin, si le radical est nul, on n'a qu'un point de la courbe. Les limites sont donc relatives à l'étendue où le radical passe de l'état réel à l'imaginaire. Comme en prenant pour x des valeurs suffisamment grandes, positives ou négatives, le trinome $mx^2 + nx + p$ reçoit le signe (139, 9°) du plus grand terme mx^2; si m est négatif, pour ces valeurs, le radical devient imaginaire, de sorte que la courbe est alors limitée dans les deux sens. Elle serait illimitée, si m était positif; enfin, m nul réduirait le radical à $\sqrt{(nx + p)}$, et l'on voit que la courbe serait limitée seulement dans un sens, puisque le signe de nx change avec x.

La nature de nos courbes dépend donc du signe de m, ce qui nous force encore de distinguer trois cas dans notre analyse générale, suivant que m, ou $B^2 - 4AC$, est négatif, positif ou nul.

Mais, avant tout, remarquons que, pour construire les ordonnées PM, PM' (fig. 258 et 259), qui répondent à une abscisse $AP = x'$, il faut d'abord porter parallèlement à l'axe des y (dont la

direction est donnée et quelconque) $PN = \alpha x' + \beta$; puis, pour ajouter et soustraire la partie radicale $MN = M'N = \sqrt{(mx'^2 + nx' + p)}$, on en portera la valeur, de part et d'autre de N, en M et en M', et N est le milieu de MM'. Tous les points N qui satisfont à l'équ.

$$y = \alpha x + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

coupent donc les cordes parallèles à Ay en deux parties égales; ainsi, on tracera la droite BN, qui est un *Diamètre* de la courbe (n° 426).

Aux points D et D' d'intersection de la courbe avec son diamètre, les équ. (1) et (2) ont lieu ensemble (n° 372), et ces points sont donnés par les racines de l'équ.

$$mx^2 + nx + p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

On voit de plus que les ordonnées ED, $E'D'$ correspondantes sont tangentes à la courbe, puisque, le radical étant nul, la proposée est le carré des $y - \alpha x - \beta = 0$; ainsi les points d'intersection sont réunis en un seul, aux points D et D' (n° 424).

1er CAS. *Courbes limitées en tous sens,* m *négatif.*

454. 1° *Si les racines de l'équ.* (3) *sont réelles,* en les désignant par a et b, et prenant $AE = a$, $AE' = b$ (fig. 258), on aura les tang. et les points d'intersection cherchés D, D' : le radical de (1) prendra la forme $\sqrt{[-m(x-a)(x-b)]}$: il n'est réel qu'autant que les facteurs $x - a$, $x - b$ sont de signes contraires, de sorte que x est compris entre a et b. La courbe ne s'étend donc qu'entre les limites EF, $E'F'$; elle forme un contour fermé; c'est une *Ellipse.*

Remarquons que, pour obtenir E, E', on a tiré de (3) des racines de la forme $x = h \pm \sqrt{f}$; on a donc porté $AK = h$, puis $KE' = KE = \sqrt{f}$. Donc C est le milieu du diamètre DD', ou le centre de l'ellipse (n° 427) : ainsi l'on obtiendra le conjugué en cherchant l'ordonnée centrale CO', à partir du diam., c'est-à-dire la valeur que prend $\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$ lorsqu'on fait $x = h$. La courbe étant rapportée à ses diam. conjugués, il sera facile de la décrire.

Par exemple, $3y^2 - 6xy + 9x^2 - 2y - 6x + \frac{7}{3} = 0$ donne $y = x + \frac{1}{3} \pm \sqrt{(-2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3})}$; on prend $AB = \frac{1}{3}$ (fig. 258), et l'on mène le diamètre BN, dont l'équ. est $y = x + \frac{1}{3}$; lorsque l'angle yAx est droit, BN fait avec Ax un angle de 45°. En égalant le radical à zéro, on a $x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}$; d'où $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$:

donc $AK = \frac{2}{3}$, $KE = KE' = \frac{1}{3}$ donnent le centre C et les points D, D' d'intersection de la courbe avec le diamètre BN. De plus, EF, $E'F'$ sont tangentes et limites, puisque le radical peut être mis sous la forme $\sqrt{[-2(x-1)(x-\frac{1}{3})]}$; d'où l'on voit que y n'est réel qu'autant que x est $> \frac{1}{3}$ et < 1.

En faisant $x = \frac{2}{3}$ sous le radical, il devient $\sqrt{\frac{2}{9}} = CO'$; c'est l'un des demi-diamètres conjugués; l'autre est CD : il est donc facile de tracer la courbe (n° 431, 2°). On trouve $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ pour la plus grande et la plus petite ordonnée, n° 423.

Pareillement $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ donne l'ellipse $DOD'O'$ (fig. 261); $AK = 2$, $EK = E'K = \sqrt{2}$, $CK = 1$; C est le centre. $y = 0$ donne $x^2 - 2x + 1 = 0$, carré de $x - 1$: donc, si l'on prend $AI = 1$, la courbe est tang. en I à Ax; $OO' = 2b' = \sqrt{2}$, la plus grande et la plus petite ordonnée sont 2 et 0.

Il est inutile de dire que, dans les constructions, il faut surtout avoir égard aux signes; ainsi, pour

$$4y^2 + 8yx + 8x^2 + 12x + 8y + 1 = 0,$$

on a
$$y = -x - 1 \pm \sqrt{(-x^2 - x + \tfrac{3}{4})};$$

on construit le diamètre BD (fig. 262), dont l'équation est $y = -x - 1$; de $x^2 + x = \frac{3}{4}$, on tire $x = -\frac{1}{2} \pm 1$, on prend $AK = -\frac{1}{2}$, et $KE = KD' = 1$, ce qui donne les limites tangentes ED, $E'D'$ de l'ellipse : C en est le centre, et l'on trouve $b' = 1$.

2° *Si les racines de l'équation* (3) *sont égales*, a étant leur valeur, le radical équivaut à $\sqrt{-m(x-a)^2}$; ainsi, (1) devient $y = \alpha x + \beta \pm (x - a)\sqrt{-m}$: on ne peut donc rendre y réel qu'en prenant $x = a$, d'où $y = a\alpha + \beta$.

Ainsi, on n'a qu'*un point*; ses coordonnées sont connues.

Il est aisé de voir qu'en effet la proposée équivaut ici à $(y - \alpha x - \beta)^2 + (x - a)^2 m = 0$; et comme la somme de deux quantités positives ne peut être nulle, à moins que chacune ne le soit en particulier, la proposée se partage d'elle-même en deux autres (n° 112). L'équ. $y^2 - xy + \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1 = 0$ donne le point dont les coordonnées sont $x = 1$, et $y = \frac{1}{2}$. L'éq. $x^2 + y^2 = 0$ donne l'origine.

3° *Si les racines de l'équation* (3) *sont imaginaires*, pour aucune valeur de x, le trinome $-mx + nx + p$ ne peut changer de signe (n° 139, 9°); ce signe demeure toujours le même que celui de son

plus grand terme $-mx^2$; $\sqrt{(-mx^2 + nx + p)}$ étant sans cesse imaginaire, la proposée *ne représente rien*. En effet, cette équ. revient alors à $(y - \alpha x - \beta)^2 + (mx^2 - nx - p) = 0$, dont les deux parties sont positives et ne peuvent s'entre-détruire; par conséquent il est absurde de supposer leur somme $= 0$, puisque la seconde ne peut être rendue nulle, comme on l'a fait précédemment.

C'est ce qui arrive pour $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x + 4 = 0$.

Pour que m, ou $B^2 - 4AC$, soit négatif, il faut que les trois 1ers termes de la proposée (3), $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ forment une quantité plus grande qu'un carré parfait. Dans le 1er exemple ci-dessus, page 423, ces termes sont

$$3(y^2 - 2xy + 3x^2) = 3[(y - x)^2 + 2x^2].$$

Cherchons dans quels cas l'équ. générale du 2e degré est celle d'un cercle, les coordonnées étant rectangles. Cette équ. est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

l'équ. la plus générale du cercle est $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, ou

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

La 1re, dégagée du coefficient A de y^2 doit être comparable terme à terme à la 2e. On en tire d'abord $A = C$, $B = 0$: donc *quand les* x *et* y *sont à angle droit, l'équ. du 2e degré est celle d'un cercle, lorsqu'elle est privée du terme en* xy *et que les coefficients de* x^2 *et de* y^2 *sont égaux*. Mais de plus il faut que $D = -2A\beta$, $E = -2A\alpha$, $F = A(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)$, d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{E}{2A}, \quad \beta = -\frac{D}{2A}, \quad r^2 = \frac{E^2 + D^2 - 4AF}{4A^2},$$

ce sont les coordonnées du centre et le rayon du cercle, qu'il est ainsi facile de construire. Remarquez cependant qu'il y a deux exceptions, savoir, quand le numérateur de la valeur de r^2 est *nul* ou *négatif* : dans le 1er cas, on a *un point unique*; dans le 2e, il n'y a pas de courbe.

On trouve, par ex., que l'équ. $2y^2 + 2x^2 - 4y - 4x + 1 = 0$ est celle d'un cercle dont le rayon est $\sqrt{\frac{3}{2}}$, et le centre au point (1, 1).

Lorsque les coordonnées sont obliques, on raisonne de même en partant de l'équ. (3) n° 377.