2e CAS. *Courbes illimitées en tous sens,* m *positif.*

455. Ici $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ est moindre qu'un carré.

1° *Quand les racines de l'équation* (3) *sont réelles*, $a = AE$, $b = AE'$ (fig. 259) donnent, comme ci-dessus, les points D et D' d'intersection de la courbe et du diamètre BN, et les tangentes EF, $E'F'$; puis le radical, prenant la forme $\sqrt{m(x-a)(x-b)}$, n'est réel qu'autant que $x - a$ et $x - b$ sont de même signe, c'est-à-dire que x est $>$ ou $<$ a et b; x ne peut donc recevoir de valeurs entre $a = AE$ et $b = AE'$, et la courbe s'étend à l'infini de part et d'autre des limites EF, $E'F'$; ainsi, elle est une *hyperbole*.

Pour obtenir le diamètre conjugué de DD', comme le centre C est au milieu de DD', on fera $x = AK = h$ sous le radical, on rendra le résultat réel (n° 429), et l'on aura ainsi b'. On tire ensuite la position des asymptotes (n° 435). Nous allons au reste donner bientôt (n° 457) un moyen plus facile de déterminer ces droites.

Soit, par ex., $y^2 - 2xy - x^2 - 2y + 8x - 3 = 0$; on en tire $y = x + 1 \pm \sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$. On trace d'abord le diamètre BN, $(y = x + 1)$; $2x^2 - 6x + 4 = 0$ donne $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, et le radical devient $\sqrt{2(x-1)(x-2)}$; on prend $AK = \frac{3}{2}$, $EK = E'K = \frac{1}{2}$; on a les limites EF, $E'F'$ tangentes en D et D'; et comme x est > 2 ou < 1, on obtient l'hyperbole MM', QQ' (fig. 259).

Pour trouver le diamètre conjugué de DD', on fait $x = AK = \frac{3}{2}$ dans $\sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$, et l'on rend réel; on a $b' = \sqrt{\frac{1}{2}}$. En prenant $D'F' = D'H = \sqrt{\frac{1}{2}}$, on forme le parallélogramme inscrit, dont les diagonales GF', FH sont les asymptotes de notre courbe.

2° *Lorsque les facteurs de* $mx^2 + nx + p$ *sont imaginaires,* la courbe ne coupe pas son diamètre BN (fig. 263) : de plus, ce trinome doit toujours conserver le même signe que $+ mx^2$, quelque valeur qu'on attribue à x (n° 139, 9°); donc chaque abscisse donne toujours des ordonnées réelles, la courbe s'étend à l'infini de part et d'autre, et elle est une *hyperbole* disposée comme on le voit fig. 263.

Quant aux diamètres conjugués, le centre est sur BN qui ne coupe pas la courbe; or, si l'origine était au centre, les abscisses égales et de signe contraire (n° 425) répondraient à des ordonnées égales; ainsi, le radical devrait être de la forme $\sqrt{(mx'^2 + p)}$; si donc on

veut transporter l'origine au centre, il faut faire $x = x'' + h$; h étant tel, que le 2e terme de $mx^2 + nx + p$ disparaisse (n° 506); h est l'abscisse du centre; on trouve $h = -\frac{n}{2m}$, la même valeur que ci-devant. Ainsi, on prend $AK = h$, l'ordonnée KC donne le centre C: faisant ensuite $x = h$ dans $\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$, il devient $= DC = a'$. Pour obtenir b', il faut chercher les points de rencontre de BN avec la courbe; en prenant la partie imaginaire des racines de $mx^2 + nx + p = 0$, et la rendant réelle, on a $KO = KO'$ pour les abscisses des extrémités E, E', du diamètre conjugué prises à partir de celle du centre.

Comme les parallèles FH, GI au diamètre BN sont tangentes à la courbe en D et D', les ordonnées $O'F$, IH déterminent aussi le parallélogramme inscrit, et les asymptotes IF, GH.

Soit, par exemple, $y^2 + 2xy - 2y - x = 0$; on en tire $y = -x + 1 \pm \sqrt{(x^2 - x + 1)}$; le diamètre BN (fig. 263) a pour équation $y = -x + 1$; comme $x^2 - x + 1 = 0$ donne $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, la courbe ne coupe pas BN; de plus, $x^2 - x + 1$ étant toujours positif, y est aussi toujours réel; ainsi, on a l'hyperbole de la figure 263.

Pour trouver les diamètres conjugués, on construit . . . . . $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $AK = \frac{1}{2}$, $KO = \frac{1}{2}\sqrt{3} = KO'$ donnent le centre C, et le 2e diamètre EE'; de plus, en faisant $x = \frac{1}{2}$ dans $\sqrt{(x^2 - x + 1)}$, on a $a' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

3° *Si les racines de l'équation* (3) *sont égales,* le radical équivaut à $\sqrt{m(x-a)^2}$, et l'équation (1) devient

$$y = \alpha x + \beta \pm (x - a)\sqrt{m},$$

savoir,
$$y = x(\alpha \pm \sqrt{m}) + \beta \mp a\sqrt{m};$$

on a donc *deux droites qui se coupent* au point du diamètre pour lequel $x = a$, et qu'il est aisé de construire, puisqu'on a leurs équ.; on obtient un 2e point de chacune, en posant $x = 0$,

$$\text{d'où } y = \beta \pm a\sqrt{m};$$

c'est-à-dire qu'il faut porter $a\sqrt{m}$ sur l'axe des y au-dessus et au-dessous du point où cet axe coupe le diamètre. Les droites menées par ces points et par le 1er, qui leur est commun, sont celles dont il s'agit.

Il est clair qu'en transposant et carrant, on a

$$(y - \alpha x - \beta)^2 - m(x - a)^2 = 0.$$

Ainsi, la proposée est décomposable en deux facteurs rationnels par rapport à x et y, et du premier degré, qu'on peut égaler à zéro indépendamment l'un de l'autre : c'est ce fait analytique qui explique l'existence de deux droites dans le cas présent.

Soit, par exemple, $4y^2 - 8xy + x^2 + 4y + 2x - 2 = 0$; on trouve $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(3x^2 - 6x + 3)}$; or, $3x^2 - 6x + 3 = 0$ donne $x = 1$; le diamètre (fig. 264) BN, $(y = x - \frac{1}{2})$ est donc coupé en un seul point N pour lequel $DA = 1$; et comme la proposée revient à $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(x - 1)\sqrt{3}$, on a deux droites. $x = 0$ donne $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$; on prend $BE = BE' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, et l'on trace les lignes EN, $E'N$.

Soit proposée l'équ. $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4k^2 = 0$; on en tire $y = x \pm 2\sqrt{(x^2 + k^2)}$; $y = x$ donne le diamètre BN (fig. 265); et l'on voit qu'il n'est pas coupé par la courbe, et qu'on a l'hyperbole MO, $M'O'$. Le centre est en C; on prend $CO = CO' = 2k$; OO' est le 1er diamètre, puis $CE = CE' = k$ donne le 2e, DD', et les asymptotes HF, IG. A mesure que k décroîtra, la courbe se rapprochera du centre et des asymptotes qui ne changeront pas; $k = 0$ donne ces droites mêmes. Enfin, si k^2 prend un signe contraire, l'hyperbole est GD', ID tracée dans l'autre angle entre les mêmes asymptotes, et s'en éloigne à mesure que k croît.

456. Quand $A = 0$, la proposée manque du terme en y^2 et l'on ne peut plus opérer comme n° 453; mais si l'on change x en y, et y en x, ce qui ne produit qu'une inversion dans les axes, on pourra appliquer nos calculs; il suffira donc d'y changer C en A, D en E : $B^2 - 4AC$ se réduit à B^2, m est positif, et l'on a encore une hyperbole. Au reste, pour discuter l'équ. privée du terme Ay^2, il est préférable de la résoudre par rapport à x, et d'opérer sur l'axe des x d'une manière analogue à ce qu'on a fait pour celui des y.

Par ex., pour l'équ. $x^2 - 2xy + 2x - 3y + c = 0$ (fig. 266), on a $x = y - 1 \pm \sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$; la droite DD' $(y = x + 1)$ est diamètre, c'est-à-dire coupe en deux parties égales toutes les cordes parallèles aux x. L'équation $y^2 + y = c - 1$ donne $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(c - \frac{3}{4})}$; si donc $c > \frac{3}{4}$, on prendra $AK = \frac{1}{2}$, $KE = KE' = \sqrt{(c - \frac{3}{4})}$, et l'on aura en D et D' les points où l'hyperbole MD, $M'D'$ coupe le diamètre DD'. En faisant $y = -\frac{1}{2}$

dans $\sqrt{(y^2 + y - c + 1)}$, et rendant réel, on a $\sqrt{(c - \frac{3}{4})}$, ce qui donne le conjugué de DD', et les asymptotes $F'G$ et FH, dont la seconde est parallèle aux y.

Si $c = \frac{3}{4}$, on a les asymptotes mêmes; et si $c < \frac{3}{4}$, on a encore une hyperbole entre les mêmes asymptotes, mais elle est tracée en HN et $F'N'$ dans les deux autres angles.

457. Dans l'équ. générale (1) (p. 422), le radical affecte la quantité $m\left(x^2 + \frac{nx}{m} + \frac{p}{m}\right)$; ajoutant et ôtant $\frac{n^2}{4m^2}$, pour compléter le carré (n° 138), on a

$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2\sqrt{m}}\sqrt{(2mx + n)^2 + 4mp - n^2};$$

le radical est de la forme $\sqrt{(z^2 - l)}$; en le développant par l'extraction (page 176), on verra, comme n° 416, qu'on a une suite de termes où $z = 2mx + n$ est au dénominateur, et qui décroissent quand x croît, le seul 1er terme excepté. En négligeant donc l, on a les équ. des asymptotes de notre hyperbole

$$Y = \alpha x + \beta \pm \frac{2mx + n}{2\sqrt{m}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

donc, *après avoir résolu la proposée, complétez le carré sous le radical où vous négligerez les termes constants, et vous aurez les équations des asymptotes.*

Il est facile de construire ces équ.; les droites se croisent au point $\left(-\frac{n}{2m}, \beta - \frac{\alpha n}{2m}\right)$, qui est le centre, et l'on a un 2e point, en faisant $x = 0$, ce qui donne les ordonnées à l'origine $\beta \pm \frac{n}{2\sqrt{m}}$; on portera $\frac{n}{2\sqrt{m}}$ sur l'axe des y, en dessus et en dessous du point de section de cet axe par le diamètre.

Dans le 1er exemple, p. 426, $y = x + 1 \pm \sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$; ajoutant et ôtant $\frac{9}{2}$ sous le radical, il devient $\sqrt{[2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}]}$; négligeant $\frac{1}{2}$, on a, pour équations des asymptotes (figure 259), $Y = x + 1 \pm (2x - 3)\sqrt{\frac{1}{2}}$. Faisant x nul, on trouve $Y = 1 \pm 3\sqrt{\frac{1}{2}}$; il faut porter $3\sqrt{\frac{1}{2}}$ de B en i et i'; Ci et Ci' sont les asymptotes.

Pour l'équ. page 428, on a $y = x \pm 2\sqrt{(x^2 + k^2)}$; on néglige k^2, et il vient, pour équ. des asymptotes, $Y = x \pm 2x$.

La discussion de l'équ. devient très-facile quand le terme en x^2, ou en y^2 manque ; par exemple, $Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ donne, en résolvant, effectuant la division, et désignant par h, k, l des coefficients connus,

$$y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{Bx + D} = hx + k + \frac{l}{Bx + D}.$$

Or si l'on construit la droite FC (fig. 266) dont l'équation est $Bx + D = 0$, cette ligne, parallèle aux y, est l'une des asymptotes de la courbe ; car plus x décroît vers la limite $-\frac{B}{D}$, et plus y augmente, devenant infini à cette limite ; ce qui montre que la courbe s'approche indéfiniment de la droite FC. D'un autre côté, en construisant la droite $F'G$ qui a pour équ. $y = hx + k$, on voit que pour obtenir les points de la courbe qui répondent à une abscisse quelconque x, on a l'ordonnée en ajoutant à celle de la droite $F'G$ la longueur $\frac{l}{Bx + D}$; et comme plus x est grand, plus cette fraction est petite, devenant nulle pour x infini, il est clair que la courbe s'approche de plus en plus de la droite $F'G$ qui est la 2e asymptote.

Lorsque c'est le terme en x^2 qui manque, on résout l'équ. par rapport à x, et on trouve de même les deux asymptotes, dont l'une est parallèle aux x. Ainsi, *quand l'équ. de la courbe est privée du terme en* x^2 *ou en* y^2, *l'une de ses asymptotes est parallèle à celui des axes coordonnés dont le carré manque.* Cette théorie ne suppose pas que les coordonnées soient rectangulaires.

Soit l'équ. $x^2 - 2xy + 2x - 3y + 1 = 0$, on a (fig. 266)

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 3} = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x + 3};$$

l'équ. $2x + 3 = 0$ est construite en prenant $AI = -\frac{3}{2}$, et menant FH parallèle à Ay ; l'équ. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ appartient à la droite $F'G$; ce sont les deux asymptotes. Le reste de la construction est facile (n° 421).

De même, pour $2y^2 + 3xy - 8y - 3x + 1 = 0$,

$$x = -\frac{2y^2 - 8y + 1}{3y - 3} = -\tfrac{2}{3}y + 2 + \frac{5}{3y - 3};$$

les droites GH, FI (fig. 263), dont les équations sont $3y - 3 = 0$,

$x = -\frac{2}{3}y + 2$, sont les asymptotes, la première parallèle aux x.

Si l'équation est privée à la fois des deux termes en x^2 et y^2, $xy + Dy + Ex + F = 0$, on a

$$y = -\frac{Ex + F}{x + D} = -E + \frac{DE - F}{x + D};$$

les deux asymptotes sont parallèles aux axes, et ont pour équation $y = -E$, $x = -D$. On pourrait discuter l'équation en transportant l'origine au centre, car l'hyperbole serait alors rapportée aux asymptotes prises pour axes (n° 425), l'équation prenant la forme $xy = m^2$.

3e CAS. *Courbes illimitées d'un seul côté*, m = 0.

458. Lorsque $m = 0$, ou $B^2 - 4AC = 0$, les trois 1ers termes de la proposée, ou $Ay^2 + Bxy + Cx^2$, forment un carré (n° 138) : le radical de l'équ. (1) p. 422 se réduit à $\sqrt{(nx + p)}$. Après avoir tracé (fig. 248) le diamètre BN ($y = \alpha x + \beta$), on trouve son point D d'intersection avec la courbe et sa tangente EF, en faisant $nx + p = 0$. Soit $x = a =$ la racine AE de cette équ., le radical devient $\sqrt{n(x - a)}$, et n'est réel que quand n et $x - a$ sont de même signe ; donc x est $> a$, et la courbe est située comme $M'DM$ lorsque n est positif ; si n est négatif, x est $< a$, et l'on a ODM'. La courbe qui s'étend à l'infini d'un seul côté est donc *une parabole*.

On peut aisément en déduire le paramètre de ce diamètre, à l'aide d'un seul point de la courbe, et soumettre la courbe à une description rigoureuse (n° 438).

Soit l'équation $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y - x + 5 = 0$; on en tire $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x - 4)}$; on prend $AE = 2$ (fig. 248), EF est limite, $AB = 1$, $DE = 2$; la courbe est située comme $M'DM$.

Pour $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y + 3x - 3 = 0$, on obtient le même diamètre ; et comme le radical est $\sqrt{(-2x + 4)}$, on a la courbe ODM'.

Si m *et* n *sont nuls à la fois*, l'équ. devient $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{p}$.

1° Si p est positif, on a 2 *droites parallèles*, qu'on trace en portant $\sqrt{p}$ en BD et BD' sur l'axe des y (fig. 267), de part et d'autre du point B où le diam. BN rencontre cet axe. $(y + x)^2 - 2y - 2x = 1$

donne $y = -x + 1 \pm \sqrt{2}$; on prend $AB = AN = 1$, BN est le diamètre; puis $BD = BD' = \sqrt{2} = BN$; et l'on mène DE, $D'E'$ parallèles à BN.

2° Si p est nul, $y = \alpha x + \beta$; on n'a qu'*une droite* : telle est l'équ. $(y + x)^2 - 2y - 2x + 1 = 0$, représentée par BN (fig. 267).

3° Si p est négatif, l'imaginaire subsiste toujours, et *il n'y a pas de ligne*. Telle est l'équ. $(y + x)^2 - 2y - 2x + 2 = 0$.

En un mot, $(y + x)^2 - 2y - 2x + 1 = k$ donne

$$y = -x + 1 \pm \sqrt{k};$$

on prend $AB = AN = 1$, et l'on trace BN, puis $BD = D'B = \sqrt{k}$. Or, plus k diminue, plus les parallèles se rapprochent du diamètre BN, avec lequel elles se confondent enfin lorsque $k = 0$; si k est négatif, l'équ. ne représente plus rien.

Quelque point G qu'on prenne sur BN (fig. 267), il doit couper au milieu la partie IM d'une droite quelconque; BN est *le lieu d'une infinité de centres* (n° 425).

Quand m et n sont nuls ensemble, la proposée revient à $(y - \alpha x - \beta)^2 - p = 0$: 1° quand p est positif, elle est le produit de $y - \alpha x - \beta + \sqrt{p}$ par $y - \alpha x - \beta - \sqrt{p}$, où x a même coefficient; on y satisfait donc en égalant à zéro l'un indépendamment de l'autre; 2° si p est nul, la proposée est le carré de $y - \alpha x - \beta$, nos deux facteurs sont égaux; 3° enfin, si p est négatif, on veut rendre nulle la somme de deux quantités positives, dont l'une $+ p$ ne peut être zéro, et l'équ. est absurde. Telles sont les causes qui expliquent l'existence de nos trois cas particuliers.

459. Il résulte de toute cette analyse que,

I. Si m, ou $B^2 - 4AC$, est négatif, $Ay^2 + Byx + Cx^2$ est plus grand qu'un carré, C doit être positif; la courbe est fermée; elle est *une ellipse*, ou *un cercle*, ou *un point*, ou *rien*.

II. Si m, ou $B^2 - 4AC$, est positif, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ est moindre qu'un carré; la courbe est formée de deux parties illimitées; elle est *une hyperbole*, ou *deux droites qui se croisent*. On est dans ce cas, si C est négatif, ou s'il manque x^2 ou y^2, xy restant.

III. Si m, ou $B^2 - 4AC = 0$, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ est un carré, la courbe s'étend à l'infini d'un seul côté; elle est *une parabole*, *une droite*, *deux parallèles* ou *rien* : quand xy manque, avec un des carrés x^2 ou y^2, on tombe dans ce cas.

460. On peut composer à volonté une équ. du 2e degré, qui rentre dans celle qu'on voudra de ces circonstances. Il suffira de recourir à l'équation (1) p. 422, et d'y déterminer arbitrairement les constantes α, β, m, ... ayant soin de composer le radical de sorte qu'il satisfasse aux conditions requises; ainsi m sera négatif pour une ellipse, et $mx^2 + nx + p = 0$ aura ses racines réelles : m sera positif pour une hyperbole, et suivant que l'équ. précédente à ses racines réelles ou imaginaires, cette courbe coupera ou ne coupera pas son diamètre, etc. On peut enfin se donner des conditions qui déterminent toutes les constantes α, β.... Voici un ex. de ce calcul :

L'hyperbole ponctuée (fig. 265) a l'origine C au centre, le diamètre BN fait avec les x un angle de 45°; $CE = 1$ donne GH tangente et limite de la courbe; enfin le diamètre conjugué est $CO = \sqrt{2}$: trouver l'équation de cette hyperbole? Elle est visiblement $y = x \pm \sqrt{m}\,(x^2 - 1)$, et il reste à déterminer m. Mais $x = 0$ donne le radical imaginaire; et changeant le $-$ en $+$, il faut qu'il soit $\sqrt{2}$; donc $\sqrt{m} = \sqrt{2}$, et $y^2 - 2xy - x^2 = -2$ est l'équ. demandée.

Si l'on veut que l'équ. soit celle d'un point, une ou deux droites, ou rien, on peut opérer de même; mais il est plus simple de se conduire comme il suit :

L et M étant de la forme $ky + lx + g$, on a

1° Pour un point, $L^2 + M^2 = 0$ (p. 424);

2° Pour une droite, $L^2 = 0$ (p. 432);

3° Pour deux droites, $LM = 0$ (p. 428); et si l'on veut que ces lignes soient parallèles, le rapport des constantes k et l doit être le même dans L et M (p. 431);

4° Pour que l'équation ne représente rien, N doit être un nombre positif quelconque dans $L^2 + M^2 + N = 0$ (p. 425).

461. Après avoir discuté l'équ. (1), les coordonnées étant rectangulaires, on peut se proposer de la construire exactement, sans recourir à la théorie (n° 439), mais en rapportant la courbe à un système de diamètres. Prenons pour axes des x' une parallèle au diamètre $y = \alpha x + \beta$, sans changer l'origine, ni l'axe des y. Comme tang $(xx') = \alpha$, on a cos $(xx') = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + \alpha^2)}} = k$, sin $(xx') = \alpha k$, $(xy') = 90°$, et les équations B (n° 383) deviennent $x = kx'$, $y = \alpha kx' + y'$; la transformée de (1) est

$$y' = \beta \pm \sqrt{(mk^2 x'^2 + nkx' + p)}.$$

1° Si la courbe a un centre, portons-y l'origine; et l'équ. étant ainsi rapportée à des diamètres conjugués, recevra la forme (n° 427) $y = \sqrt{(Q + Cx^2)}$: il suffit donc de chasser les termes β et nkx'. Posons $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{n}{2km}$; ces 2es termes sont les x' et y' du centre, et l'on trouve

$$y''^2 - mk^2x''^2 = p - \frac{n^2}{4m}.$$

Telle est l'équ. de la courbe proposée, réduite à ses diamètres conjugués. Rien n'est donc plus facile que de construire cette ligne (n° 431, 2°).

Pour l'équation $y = x + 1 \pm \sqrt{(-2x^2 + 6x - 4)}$, on a $a = 1$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $m = -2\ldots$, et l'on obtient, pour transformée, $y''^2 + x''^2 = \frac{1}{2}$; ainsi, après avoir tracé le diamètre BN, $y = x + 1$ (fig. 258), porté l'origine au centre C, comme on l'a vu (n° 454), il restera à décrire une ellipse, dont les demi-diamètres CO, CD, sont égaux à $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2° S'il n'y a pas de centre, $m = 0$, et le radical devient $\sqrt{(nkx' + p)}$: chassant les termes constants β et p, l'origine sera portée au point où la courbe est coupée par son diamètre; savoir, $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{p}{nk}$; d'où $y''^2 = nkx''$. Après avoir décrit le diamètre $y = ax + \beta$, l'origine sera prise au point où il coupe la parabole; l'axe des y'' étant parallèle aux y, et l'axe des x'' le diamètre, la courbe sera facile à tracer (n° 438).

Pour $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x - 4)}$, on a (fig. 248) $a = \frac{1}{2}$, $k = \sqrt{\frac{4}{5}}$, DN et DF étant les axes, on a l'équation $y''^2 = 4x''\sqrt{\frac{1}{5}}$, qui est celle de la parabole MDM'; et comme, page 431-432, on a $AB = 1$, $AE = DE = 2$.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE.

De la Génération des Courbes.

462. I. Quelle est la courbe qui résulte de l'intersection continuelle de deux droites AM, BM (fig. 268) qui tournent autour de

A et B, et sont toujours à angle droit en M? Prenons les *Génératrices* dans une de leurs positions AM, MB : l'origine étant au milieu C de AB, et $AC = r$; les lignes AM et MB qui passent, l'une en $A(-r, 0)$, et l'autre en $B(r, 0)$, ont pour équ.

$$y = a(x + r),\ y = a'(x - r), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

de plus, on a

$$aa' + 1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

puisque ces droites sont perpend. : les valeurs de a et a', qui ne satisfont pas à cette condition, répondent à des droites AN et BN, qui ne sont pas génératrices. Si l'on met $-\frac{1}{a}$ pour a', les équations (1), qui sont celles de toutes les droites passant en A et B, appartiendront à deux génératrices, dont les directions dépendront de la valeur de a qu'on voudra prendre : la coexistence de ces équ. fera que x et y seront les coordonnées CP, PM, du point de section de ces droites. En éliminant a de ces équations, x et y seront donc les coordonnées du point d'intersection de deux génératrices quelconques, puisqu'elles ne sont distinguées entre elles que par a, qui n'y entrera plus.

Ainsi, l'élimination de a et a' entre les équations 1 et 2, donne l'équation de la courbe cherchée : $a = \frac{y}{x + r}$, $a' = \frac{y}{x - r}$ changent (2) en $y^2 + x^2 = r^2$: on a un cercle dont le diamètre est AB.

II. Si les deux génératrices AM, MB (fig. 269) étaient assujetties à former un angle donné AMB, dont la tangente fût t, l'équ. (2) serait remplacée par $t = \frac{a' - a}{1 + aa'}$: on aurait $(x^2 + y^2 - r^2)t = 2ry$. En discutant (n° 450) cette équ., où $AC = CB = r$, on verra que la courbe est un cercle dont le rayon est $OB = \sqrt{\left(r^2 + \frac{r^2}{t^2}\right)}$, $CO = \frac{r}{t}$ donne le centre O.

En général, au lieu de supposer la courbe décrite par un point qui se meut d'une manière déterminée, on peut la considérer comme engendrée par l'intersection continuelle de deux lignes (droites ou courbes) données, mais variables dans leurs positions ou leurs formes, suivant une loi connue. On prendra ces génératrices dans