1° Si la courbe a un centre, portons-y l'origine; et l'équ. étant ainsi rapportée à des diamètres conjugués, recevra la forme (n° 427) $y = \sqrt{(Q + Cx^2)}$: il suffit donc de chasser les termes β et nkx'. Posons $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{n}{2km}$; ces 2es termes sont les x' et y' du centre, et l'on trouve

$$y''^2 - mk^2x''^2 = p - \frac{n^2}{4m}.$$

Telle est l'équ. de la courbe proposée, réduite à ses diamètres conjugués. Rien n'est donc plus facile que de construire cette ligne (n° 431, 2°).

Pour l'équation $y = x + 1 \pm \sqrt{(-2x^2 + 6x - 4)}$, on a $a = 1$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $m = -2\ldots$, et l'on obtient, pour transformée, $y''^2 + x''^2 = \frac{1}{2}$; ainsi, après avoir tracé le diamètre BN, $y = x + 1$ (fig. 258), porté l'origine au centre C, comme on l'a vu (n° 454), il restera à décrire une ellipse, dont les demi-diamètres CO, CD, sont égaux à $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2° S'il n'y a pas de centre, $m = 0$, et le radical devient $\sqrt{(nkx' + p)}$: chassant les termes constants β et p, l'origine sera portée au point où la courbe est coupée par son diamètre; savoir, $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{p}{nk}$; d'où $y''^2 = nkx''$. Après avoir décrit le diamètre $y = ax + \beta$, l'origine sera prise au point où il coupe la parabole; l'axe des y'' étant parallèle aux y, et l'axe des x'' le diamètre, la courbe sera facile à tracer (n° 438).

Pour $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x - 4)}$, on a (fig. 248) $a = \frac{1}{2}$, $k = \sqrt{\frac{4}{5}}$, DN et DF étant les axes, on a l'équation $y''^2 = 4x''\sqrt{\frac{1}{5}}$, qui est celle de la parabole MDM'; et comme, page 431-432, on a $AB = 1$, $AE = DE = 2$.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE.

De la Génération des Courbes.

462. I. Quelle est la courbe qui résulte de l'intersection continuelle de deux droites AM, BM (fig. 268) qui tournent autour de

A et B, et sont toujours à angle droit en M? Prenons les *Génératrices* dans une de leurs positions AM, MB : l'origine étant au milieu C de AB, et $AC = r$; les lignes AM et MB qui passent, l'une en $A(-r, 0)$, et l'autre en $B(r, 0)$, ont pour équ.

$$y = a(x + r),\ y = a'(x - r), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

de plus, on a

$$aa' + 1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

puisque ces droites sont perpend. : les valeurs de a et a', qui ne satisfont pas à cette condition, répondent à des droites AN et BN, qui ne sont pas génératrices. Si l'on met $-\frac{1}{a}$ pour a', les équations (1), qui sont celles de toutes les droites passant en A et B, appartiendront à deux génératrices, dont les directions dépendront de la valeur de a qu'on voudra prendre : la coexistence de ces équ. fera que x et y seront les coordonnées CP, PM, du point de section de ces droites. En éliminant a de ces équations, x et y seront donc les coordonnées du point d'intersection de deux génératrices quelconques, puisqu'elles ne sont distinguées entre elles que par a, qui n'y entrera plus.

Ainsi, l'élimination de a et a' entre les équations 1 et 2, donne l'équation de la courbe cherchée : $a = \frac{y}{x + r}$, $a' = \frac{y}{x - r}$ changent (2) en $y^2 + x^2 = r^2$: on a un cercle dont le diamètre est AB.

II. Si les deux génératrices AM, MB (fig. 269) étaient assujetties à former un angle donné AMB, dont la tangente fût t, l'équ. (2) serait remplacée par $t = \frac{a' - a}{1 + aa'}$: on aurait $(x^2 + y^2 - r^2)t = 2ry$. En discutant (n° 450) cette équ., où $AC = CB = r$, on verra que la courbe est un cercle dont le rayon est $OB = \sqrt{\left(r^2 + \frac{r^2}{t^2}\right)}$, $CO = \frac{r}{t}$ donne le centre O.

En général, au lieu de supposer la courbe décrite par un point qui se meut d'une manière déterminée, on peut la considérer comme engendrée par l'intersection continuelle de deux lignes (droites ou courbes) données, mais variables dans leurs positions ou leurs formes, suivant une loi connue. On prendra ces génératrices dans

l'une des positions convenables, et l'on aura leurs équ., telles que $M = 0$, $N = 0$: de plus, le changement que ces deux lignes éprouvent tient à celui de deux constantes qui y entrent; mais sont assujetties, dans leurs variations, à une condition donnée $P = 0$. En faisant de nouveau le raisonnement ci-dessus, on prouvera que, si l'on élimine ces deux constantes entre ces trois équ., on aura pour résultat l'équ. de la courbe engendrée.

S'il y avait trois constantes variables, outre $P = 0$, on devrait avoir une autre équation de condition $Q = 0$; il faudrait éliminer ces trois constantes entre les quatre équ. $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$. Et ainsi de suite...., de manière à avoir toujours une équ. de plus qu'il n'y a de quantités à éliminer.

S'il y avait moins d'équations qu'il n'en faut, l'équation finale serait encore celle de la courbe cherchée; mais il y aurait un ou plusieurs *paramètres* variables : le problème serait indéterminé, et l'on y satisferait par une série de courbes. Lorsqu'il y a autant d'équ. que de constantes, il en résulte des valeurs de x et y en nombre fini : on n'a plus que divers points; et s'il y a plus d'équ. encore, le problème est absurde. Tout ceci sera éclairci par des exemples.

III. Étant données les droites DN, Dx (fig. 270) et un point fixe A sur l'une, cherchons la courbe dont chaque point M est tel, que la distance MA est égale à la perpend. PN sur Dx. Concevons cette courbe comme engendrée par l'intersection continuelle d'une droite mobile PN, perpend. à Dx, par un cercle KL, dont le centre est fixe en A, le rayon et la droite variant d'ailleurs, de sorte que la condition donnée $AM = PN$ soit toujours remplie.

L'origine étant en A, $AM = \alpha$, $AP = \beta$, $AD = p$, $t = \text{tang}\, NDA$; les équ. du cercle LK et de la droite PN sont

$$x^2 + y^2 = \alpha^2, \quad x = \beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

L'équation de la droite DN, qui passe en $D\ (-p, 0)$, est $y = t\ (x + p)$; l'équation de condition $MA = NP$ devient $\alpha = t\ (\beta + p)$. Lorsque l'on fait varier la droite et le cercle, α et β changent seuls; il faut donc les éliminer à l'aide des équ. (1), ce qui donne

$$y^2 + x^2\,(1 - t^2) - 2t^2px - t^2p^2 = 0.$$

1° Si $t = 1$, l'angle donné $E'DA = 45°$, et l'équ. devient

$y^2 = 2px + p^2$, qui est celle d'une *parabole* $E'S$, dont l'origine est au foyer A, le sommet en S, $2AS = AE' = p$.

2° Si $t < 1$, l'angle NDA est $< 45°$, on a une *ellipse* dont le centre C et les axes a et b sont tels, que

$$AB = \frac{pt^2}{1 - t^2}, \quad a = \frac{pt}{1 - t^2}, \quad b = \frac{pt}{\sqrt{(1 - t^2)}}.$$

Si DN est parallèle à DA, on a un *cercle*, ce qui résulte aussi de ce que, par la génération, PN est constant.

3° Enfin, si $t > 1$, ou EDA, changé en IDA, $> 45°$, on a une *hyperbole*.

Cette propriété pourrait donner un moyen facile de tracer nos trois courbes; elles touchent toutes la droite donnée DE, DE'...., en son point de section avec AE (n° 424).

IV. Imaginons que la ligne AB (fig. 271) d'une longueur donnée se meuve dans l'angle BCA, de manière que ses extrémités A et B restent toujours sur les côtés de cet angle : trouver la courbe décrite par un point M donné sur cette ligne AB? Soient $b = AM$, $a = MB$, AC, CB les axes coordonnés quelconques, et c le cosinus de l'angle ACB qu'ils forment entre eux; la courbe peut être considérée comme produite par la section continuelle des deux droites mobiles AB, PM, dont les équ. sont $y = \alpha x + \beta$, $x = \gamma$; d'où $PM = \alpha\gamma + \beta$, $CP = \gamma$. Il s'agit de trouver l'équ. de condition entre α, β et γ. Or, le triangle PMB donne (D, n° 355), en faisant $PB = z$, $a^2 = z^2 + PM^2 - 2cz\ .\ PM$; d'ailleurs les parallèles AC, PM donnent $bz = a \times CP$: donc on a

$$bz = a\gamma, \quad a^2 = z^2 + (\alpha\gamma + \beta)^2 - 2cz\,(\alpha\gamma + \beta).$$

Il reste à éliminer z, α, β et γ. Mettons y pour $\alpha\gamma + \beta$, nous aurons $bz = ax$, $a^2 = z^2 + y^2 - 2cyz$; enfin, chassant z, $a^2b^2 = b^2y^2 + a^2x^2 - 2abcxy$ est l'équ. demandée, qui appartient à une *ellipse* (n° 454) dont C est le centre.

Lorsque l'angle ACB est droit, tout le calcul se simplifie beaucoup : on a l'équ. $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$, qui est celle de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes $2a$, $2b$. Il en résulte un nouveau moyen très-facile de tracer une ellipse. Après avoir décrit deux lignes indéfinies Cy, Cx, à angle droit, on portera, sur une règle $M'B$, des parties égales aux demi-axes $AM = b$, $BM = a$, puis on présentera cette règle sur l'angle droit yCx, de manière que les

points A et B soient sur les côtés de cet angle. Dans cette position, et toutes celles de même nature, le point M sera l'un de ceux de l'ellipse; on marquera ces divers points, et l'on tracera la courbe qui les joint.

Si le point décrivant est situé en M' sur le prolongement de AB, la même analyse conduit au même résultat, au signe près du terme $-2abcxy$. Ainsi, en prenant $BM' = a$, $AM' = b$, AB est la différence des demi-axes, au lieu d'en être la somme, et la construction demeure la même.

V. Si, du foyer F' d'une ellipse (fig. 238), on abaisse une perpendiculaire sur chaque tangente, quelle est la courbe qui passe par tous les points I de rencontre de ces tangentes et de leurs perpendiculaires? $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$ est l'équ. de la tangente au point (x', y') (n° 408). La droite, qui passe par le foyer $(-\alpha, 0)$, a pour équ. $y = \beta(x + \alpha)$; pour qu'elle soit perp. à la tangente, il faut (n° 370) que β satisfasse à l'équation $b^2x'\beta - a^2y' = 0$: les équ. des génératrices sont donc

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2, \quad b^2x'y = a^2y'(x + \alpha).$$

Lorsque le point de tangence varie, ces lignes changent de position avec x' et y'; l'équ. de condition est celle qui exprime que ce point est sur l'ellipse, $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$. Il reste à éliminer x' et y' entre nos trois équ. On tire des 1res x' et y', et l'on substitue dans la 3e; on trouve

$$b^2y^2 + a^2(x + \alpha)^2 = [y^2 + x(x + \alpha)]^2.$$

En développant, on a

$$y^4 + y^2[2x(x + \alpha) - b^2] + (x + \alpha)^2(x^2 - a^2) = 0;$$

or, $-b^2 = \alpha^2 - a^2$ (n° 386) : le second terme devient donc $y^2[(x + \alpha)^2 + x^2 - a^2]$; de sorte qu'en réunissant les termes affectés de $x^2 - a^2$, on a

$$(y^2 + x^2 - a^2)[y^2 + (x + \alpha)^2] = 0.$$

Le second facteur est visiblement étranger à la question, puisqu'il donne le foyer; l'autre donne *le cercle circonscrit à l'ellipse*; c'est la courbe cherchée.

1° b n'entrant pas ici, le cercle inscrit dans l'hyperbole résout la question proposée pour cette courbe (n° 397).

2° Ce cercle est commun à toutes les ellipses décrites sur le grand axe, et même au cercle qui se reproduit ainsi lui-même.

3° Comme $y^2 + x^2 = a^2$ est indépendant de α, on trouve le même cercle en opérant sur l'un et l'autre foyer.

VI. Pour résoudre le même problème pour la parabole (fig. 234), on verra aisément qu'il faut éliminer x' et y' entre

$$yy' = p(x + x'), \quad py = -y'(x - \tfrac{1}{2}p), \quad y'2 = 2px'.$$

Il vient $0 = (-2xy^2 + 2x^2 - px)(p - 2x)$, ou en réduisant, $x[4y^2 + (2x - p)^2] = 0$. Le 2e facteur donne le foyer; il faut le supprimer : le 1er, $x = 0$, donne l'axe des y; c'est le lieu des pieds des perpend. (i, fig. 234, p. 382).

VII. La parabole NAK (fig. 272) étant donnée, trouver le lieu de tous les points M, tels qu'en menant les deux tangentes NM et KM, l'angle qu'elles formeront soit toujours égal à un angle donné M.

Les tang. à la parabole aux points (x', y'), (x'', y''), ont pour équ. (n° 404) fig. 272,

$$yy' = p(x + x'), \quad yy'' = p(x + x'').$$

L'angle KMN, que forment entre elles ces droites (n° 370), a, pour tang, $t = \dfrac{p(y'' - y')}{y'y'' + p^2}$. Lorsqu'on change les points K et N de contact, cet angle doit rester le même; t est constant; mais x', y', x'', y'', varient; il faut les éliminer, et l'on a pour cela, outre les trois équ. précédentes, $y'^2 = 2px'$, $y''^2 = 2px''$. x' et x'', tirées de celles-ci, changent les deux premières en

$$y'^2 - 2yy' + 2px = 0, \quad y''^2 - 2yy'' + 2px = 0.$$

Ainsi, des deux racines de la première de ces équ., l'une est y', et l'autre y''; donc $y'y'' = 2px$, d'où $t = \dfrac{y'' - y'}{2x + p}$: de plus, $y' = y \pm \sqrt{(y^2 - 2px)}$ donne $y'' - y' = 2$ fois le radical; ainsi, l'équ. cherchée est

$$y^2 - t^2x^2 - px(2 + t^2) - \tfrac{1}{4}t^2p^2 = 0.$$

c'est celle d'une hyperbole; et comme t n'entre qu'au carré, l'une des branches est décrite par le sommet M' de l'angle obtus $K'M'N$, et l'autre par celui M de son supplément NMK. On trouvera aisément le centre C et les axes de la courbe.

Si l'angle donné M était droit, ou $t = \infty$, on aurait (n° 398) $2x + p = 0$; en sorte que si de chaque point de la directrice on mène deux tangentes à la parabole, elles font toujours entre elles un angle droit.

VIII. Il arrive souvent que l'équ. même de la courbe est donnée, ou presque exprimée dans sa définition, plutôt que par sa génération : ceci mérite à peine de nous arrêter. En voici un exemple : Quelle est la courbe dont chaque ordonnée est la moyenne proportionnelle entre celles de deux droites données, correspondant à la même abscisse? Il est clair que $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ étant les équ. des droites données, celle de la courbe est

$$y^2 = (ax + b)(a'x + b'), \quad \text{ou} \quad y^2 - aa'x^2 - x(a'b + ab') = bb'.$$

1° Si l'une des droites est parallèle aux x, $a' = 0$ donne $y^2 = ab'x + bb'$, qui appartient à une parabole qu'on décrira aisément. Quand $a = 0$, $y^2 = bb'$ donne deux droites parallèles, une droite ou rien, suivant les grandeurs et les signes de b et b'. Lorsqu'on fait abstraction du signe des ordonnées des droites, outre notre parabole, on en a encore une deuxième égale et opposée, et qui a même sommet.

2° Si a et a' sont de signes contraires, on a une ellipse; lorsque $aa' = -1$, les lignes données sont perpend., et l'on a un cercle (on a aussi un point, ou rien).

3° Enfin, si a et a' sont de même signe, on a une hyperbole : quand $a = a'$, l'une des asymptotes est parallèle aux droites données, d'où l'on peut conclure l'autre (n° 450 et 457). On peut aussi avoir deux droites qui se croisent.

Dans ces deux derniers cas, en faisant abstraction des signes des ordonnées, on a à la fois l'ellipse et l'hyperbole décrites sur les mêmes axes, comme fig. 247.

On pourrait varier beaucoup ces problèmes. M. Puissant en a mis plusieurs dans son *Recueil de diverses propositions de Géométrie*. En voici quelques autres :

IX. Deux angles de 45°, BAC, BDC (fig. 272) étant donnés de position, les faire tourner autour de leurs sommets fixes A et D, de sorte que deux côtés AB, BD se coupent toujours sur BE parallèle à AD. Quelle est la courbe décrite par le point C d'intersection des deux autres côtés AC, DC?

On peut prendre les angles mobiles quelconques, ainsi que la droite BE.

X. Soit un point M (fig. 274) tel, que ses distances AM, BM, à deux points fixes A et B, soient entre elles dans un rapport donné; quelle est la courbe dont tous les points jouissent de cette propriété?

En quel lieu de cette courbe AM sera-t-elle tangente? Comment déterminer le point M, tels que les distances MA, MB, MD à trois points fixes A, B et D aient entre elles des rapports connus?

XI. Un cercle et une droite étant donnés, trouver le lieu de tous les centres des cercles tangents à l'un et à l'autre.

Le même problème pour deux cercles donnés.

XII. Les côtés d'un angle droit glissent sur une ellipse ou une hyperbole, à laquelle ils demeurent sans cesse tangents; quelle est la courbe décrite par le sommet (fig. 272)?

On peut prendre aussi l'angle quelconque, comme au problème VII.

XIII. Deux droites AF, CD (fig. 220) tournent autour des extrémités A et C de la base d'un triangle donné ABC; trouver le lieu BE de tous leurs points G d'intersection, en supposant que D et F sont, dans leur mouvement, à la même distance de la base (*voyez* n° 376, VIII).

Problèmes qui passent le second degré.

463. Nous avons construit page 314, les racines des équations du 2e degré. L'exemple suivant montre ce qu'il faut faire lorsqu'on est conduit par la résolution d'un problème déterminé à une équ. où l'inconnue est élevée au delà du 2e degré. Soit

$$x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m^2 = 0.$$

Si l'on fait $x^2 = py$, on a $y^2 - qy + rx + m^2 = 0$; la proposée provenant de l'élimination de y entre celles-ci, si l'on construit les sections coniques qui s'y rapportent, les abscisses des points d'intersection seront les racines cherchées : ce sont ici deux paraboles. La proposée aura ses quatre racines réelles, quand les deux courbes se couperont en quatre points : il n'y aura que deux points d'intersection s'il n'y a que deux racines réelles : elles seront toutes quatre

imaginaires, s'il n'y a aucun point commun entre les courbes. Au cas qu'il y eût quelques racines égales, les deux courbes se toucheraient, etc.

Mais comme l'une des deux courbes est arbitraire, il convient toujours de préférer le cercle comme plus aisé à décrire. Après avoir tracé les deux axes rectangulaires Ax, Ay (fig. 275), on décrira l'hyperbole $xy = pm$ entre ses asymptotes; éliminant pm, la proposée devient l'équ. d'un cercle facile à décrire,

$$x^2 + y^2 + \frac{pry}{m} = pq.$$

Prenez $AC = \frac{pr}{2m}$; du centre C, avec le rayon $\sqrt{\left(pq + \frac{p^2r^2}{4m^2}\right)}$, tracez un cercle; l'hyperbole sera coupée en des points M, M', N, N', dont les abscisses AP, AP', AQ, AQ', seront les 4 racines x cherchées; deux sont positives dans la fig., les deux autres négatives. Il pourrait n'y avoir aucun point d'intersection, ou seulement deux.

De même, pour $x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^3r = 0$, on prendra $x^2 = py$; d'où $y^2 - py + qx + pr = 0$; ajoutant $x^2 - py = 0$, il vient

$$y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = 0, \quad x^2 = py,$$

équ. d'un cercle et d'une parabole faciles à décrire.

Pour $x^3 \pm a^2x - a^2q = 0$, multipliez par x; faites $x^2 = ay$; d'où $y^2 \pm ay - qx = 0$; ajoutez la précédente, il vient

$$y^2 + x^2 = qx, \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 = 2ay + qx,$$

suivant que la proposée contient $+a^2$ ou $-a^2$. On construit le cercle que cette équ. représente; les abscisses des points communs avec la parabole, $x^2 = ay$, sont les racines cherchées; $x = 0$ répond à la racine introduite.

Pour $x^3 - 3a^2x = 2a^3$, le même calcul donne

$$x^2 = ay, \quad y^2 + x^2 = 4ay + 2ax.$$

Soit décrite la parabole MA (fig. 276) dont le paramètre est a, et le cercle CAM, dont le centre est $C(a, 2a)$, et le rayon $AC = a\sqrt{5}$; le point M d'intersection a pour abscisse $x = AP$; c'est la seule racine réelle.

On peut, par cette construction, obtenir la valeur de $\sqrt[3]{a}$.

Étant données deux droites a et b, trouver entre elles deux moyennes proportionnelles x et y, $\because a : x : y : b$. Puisque $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, en construisant deux paraboles, dont a et b soient les paramètres, qui aient l'origine pour sommet commun, et dont les axes respectifs soient ceux des y et des x; on aura, pour abscisse x et l'ordonnée y de leur point commun, les lignes demandées.

Mais les constructions sont plus simples en employant le cercle au lieu de l'une des deux paraboles. Ajoutons nos équations, il vient $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$, et l'on retombe sur la fig. 276, où $BC = \frac{1}{2}a$, $AB = \frac{1}{2}b$.

Lorsque $b = 2a$, on a $x^3 = 2a^3$; ce qui résout le célèbre problème de *la duplication du cube*. Si l'on fait $b = \frac{m}{n}a$, comme on a $x^3 = \frac{m}{n}a^3$: on peut donc aussi former un cube x^3, qui soit à un cube donné a^3, $\because m : n$.

En général, ces constructions peuvent être variées de bien des manières; car, puisqu'elles dépendent de deux courbes dont on a les équ., en multipliant ces équ. par des indéterminées et les ajoutant, on obtient différentes courbes propres à la résolution du problème.

464. Au reste, il peut arriver qu'une question proposée comme déterminée ne le soit pas (*voy.* n° 376, II), ou même qu'on puisse en faciliter la solution, lorsqu'elle est déterminée, en la faisant dépendre d'une autre question qui ne le soit pas. L'analyse indique d'elle-même ces modifications; c'est ce qui va être éclairci par les questions suivantes.

I. Étant donnés deux points A et B (fig. 277), trouver un 3e point M, tel, qu'en menant AM et MB, l'angle MAB soit la moitié de MBA. Faisons $AB = m$; les équations de AM, MB sont $y = ax$, $y = -a'(x - m)$, l'origine étant en A : or, a et a' sont des tangentes d'angles doubles l'un de l'autre; donc. . . . $a' = \frac{2a}{1 - a^2}$ (*L*, 359). Éliminons a et a' entre ces trois équations, et faisons abstraction de $y = 0$, qui n'apprend rien; il vient

$$y^2 - 3x^2 + 2mx = 0.$$