On voit que la question est indéterminée, et qu'on y satisfait en prenant pour M chaque point de l'hyperbole que nous allons construire. Faisons $AC = CD = \frac{1}{3} m = \frac{1}{3} AB$; C sera le centre, A et D les sommets; les asymptotes CG, CH, font avec AB un angle égal aux deux tiers d'un droit, $\sqrt{3}$ en étant la tangente (n° 352); cette courbe MD sera celle dont il s'agit.

Si l'on veut partager un arc de cercle AEB, ou un angle AKB, en trois parties égales, on prendra le tiers AC de sa corde AB; construisant l'hyperbole ci-dessus, l'intersection avec l'arc donnera (n° 212) le tiers EB de l'arc, ou le tiers EKB de l'angle.

Pour résoudre le problème de *la trisection de l'angle*, nous l'avons d'abord présenté sous une forme indéterminée, et même plus générale, puisque nous aurions pu de même trouver le point d'un arc d'ellipse AEB, ou de toute autre courbe, qui remplit une condition analogue.

II. Mener une droite DD', $y = ax + b$ (fig. 278), de manière que la somme des perpend. MD, $M'D'$, abaissées de deux points donnés M et M', soit égale à une longueur connue $= m$. Il s'agit de déterminer a et b par la condition $MD + M'D' = m$.

La distance du point M (x', y') à cette ligne (n° 374) est $\frac{ax' - y' + b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$; en raisonnant de même pour M' (x'', y''), on a

$$(ax' - y' + b) + (ax^2 - y'' + b) = m\sqrt{(1 + a^2)}. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette équ. ne pouvant faire connaître que a ou b, le problème est indéterminé; si l'on met $y - ax$ pour b dans (1), on a

$$y - \tfrac{1}{2}(y' + y'') = a[x - \tfrac{1}{2}(x' + x'')] + \tfrac{1}{2} m\sqrt{(1 + a^2)};$$

c'est l'équation de la droite cherchée. Transportons l'origine au milieu de MM', en $C[\frac{1}{2}(x' + x''), \frac{1}{2}(y' + y'')]$, on a

$$y = ax + \tfrac{1}{2} m\sqrt{(1 + a^2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

La direction de la droite est restée arbitraire; seulement on voit que lorsqu'on a choisi a à volonté, l'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2} m\sqrt{(1 + a^2)}$; ainsi (n° 374) la distance $FC = \frac{1}{2} m$, ce qui fournit cette construction. Du centre C des moyennes distances aux axes, on décrira un cercle avec le rayon $\frac{1}{2} m$: toute tangente à ce cercle satisfera seule à la condition exigée. C'est ce que rend évidente la propriété connue du trapèze $MDD'M'$ (n° 219, 4°).

Si l'on eût donné trois points, il aurait suffi d'ajouter $ax''' - y''' + b$

au 1er membre de (1) : en général pour n points, il faudrait remplacer m dans (2) par $\frac{m}{n}$. Donc la somme des perpendiculaires menées de n points sur la droite DD' est $= m$, quand DD' est tangent au cercle FC décrit du centre des moyennes distances avec un rayon $FC =$ la n^e partie de m.

III. Étant données deux droites AP, AD (fig. 279), cherchons un point M, tel que les perpend. MP, MD soient entre elles dans un rapport donné $= n : m$. Prenons AP pour axe des x, A pour origine; $AP = x'$, $PM = y'$; enfin $y = ax$ pour l'équation de AD. La perp. (n° 374) $MD = \frac{y' - ax'}{\sqrt{(1 + a^2)}} = \frac{my'}{n}$ par condition; d'où

$$y' = \frac{anx'}{n - m\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Donc, tous les points d'une droite AM passant en A, satisfont à la question. Prenons des parties $AC = m$, $AB = n$, sur les perpendiculaires aux droites données, et menons des parallèles BM, CM, à ces droites; M sera l'un des points de la ligne cherchée, puisqu'il satisfait à la condition : cette ligne est donc AM.

Si l'on voulait obtenir sur la courbe MN les points M et N, qui jouissent de la propriété assignée, il faudrait construire la droite AM, et prendre ses points d'intersection M et N avec la courbe.

Le point M pourra être situé au-dessous de AD; alors $\sqrt{(1 + a^2)}$ ayant un signe contraire, il faudra prendre $AC' = m$ en sens opposé de AC, et la section de BM avec $C'I$.

IV. D'un point K (fig. 280) menons deux tang. KM, KN à l'ellipse donnée CMN, et la corde MN qui joint les points de contact. Si l'on fait parcourir au point K une droite quelconque AB donnée, les points M, N varieront ainsi que MN; on demande la courbe qui est le lieu des intersections successives de ces cordes MN.

Menons, par le centre C, CD parallèle à AB, et CA diamètre conjugué de Cy; prenons ces lignes pour axes. En partant de l'équ. de la tang. à l'ellipse, et exprimant qu'elle passe par un point donné $K(\alpha, \beta)$, on a prouve (413) qu'il y a deux tang., et que la corde MN, qui joint les points de contact, a pour équ. $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$. Si l'on place le point K en B, l'équ. de la nouvelle corde mn sera la même en changeant β en β'. Le point de section de ces cordes se trouve en éliminant x et y entre leurs équations. En les retran-

chant, il vient $a^2y(\beta - \beta') = 0$, ou $y = 0$. Il est donc prouvé que le point de section est sur l'axe des x, et cela, quels que soient β, β'; d'où résulte que toutes ces cordes se coupent en un seul point. La même propriété a lieu pour l'hyperbole et la parabole (*voy.* n°s 407, 413).

465. Les principes exposés précédemment suffisent quelquefois pour discuter les équ. de degrés supérieurs en x et y. Par ex.,

$$y^2 - x^3 + (a - b)x^2 + abx = 0,$$

d'où $$y = \pm\sqrt{x(x-a)(x+b)};$$

la courbe (fig. 288) est symétrique des deux côtés de l'axe des y, qu'elle coupe aux trois points A, C et B, pour lesquels $x = 0$, a et $-b$. On ne peut prendre x positif $< a$; mais x peut croître indéfiniment au delà; ainsi la courbe s'ouvre à l'infini et ne s'étend pas entre A et C. Dans le sens des x négatifs, elle forme une *feuille* entre A et B, et ne dépasse pas B.

Si $a = 0$, $y = \pm x\sqrt{(x+b)}$, l'espace AC est nul, et la double branche infinie a son point C soudé en A. Si $b = 0$, $y = \pm x\sqrt{(x-a)}$, la feuille AB se réduit à un point A, isolé de la branche infinie CM.

Soit encore l'équation $y^2 - x^2y^2 = 1$, d'où $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $x = \pm\dfrac{\sqrt{(y^2-1)}}{y}$: la courbe est symétrique par rapport aux x et aux y, et si l'on plie la fig. selon l'un ou l'autre de ces axes, les parties coïncident; x est < 1, et comme $x = \pm 1$ donne $y = \infty$, deux parallèles aux y menées des deux côtés de cet axe à la distance 1, sont asymptotes de la courbe qui est entièrement renfermée entre elles. Enfin $x < \pm 1$; ainsi la courbe est composée de deux branches infinies et opposées, séparées par un intervalle, comme dans la fig. 263, excepté qu'elles sont renfermées entre deux parallèles aux y, et $> \pm 1$.

Enfin l'équ. $x^2y^2 + y^4 - y^2 - x^3 - xy^2 + x = 0$,

équivaut à $$(x^2 + y^2 - 1)(y^2 - x) = 0,$$

en égalant chaque facteur séparément à zéro, on trouve que la courbe est formée du système d'un cercle BCP (fig. 233) dont le rayon est 1 et le centre à l'origine C; et d'une parabole MAM'. Les choses se passent ici comme n° 460, 3°.

De quelques autres Courbes.

466. Lorsqu'on donne divers points F, G, M, Z.... (fig. 211), il y a une infinité de courbes qui les unissent; cependant, parmi celles qu'on peut choisir, il en est une qu'on préfère, comme étant plus simple que les autres; c'est celle dont l'équation est $y = A + Bx + Cx^2 +$ etc., et qu'on nomme *Parabole*, par analogie avec la courbe que nous connaissons sous ce nom. Après avoir tracé deux axes Ax, Ay, et marqué les coordonnées AD, DF, AC, CG.... des points connus, on comprendra dans l'équ. autant de termes qu'il y a de ces points, et il s'agira d'en déterminer les coefficients A, B, ... par les conditions données, savoir, que 1° $x = AD = \alpha$ donne $y = DF = a$; d'où $a = A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots$; 2° de même, $x = \beta$ donne $y = b$; $b = A + B\beta + C\beta^2 + \ldots$, en ainsi des autres points. Il faudra ensuite éliminer les inconnues A, B, C,.... afin d'en obtenir les valeurs.

Le calcul peut être présenté d'une manière simple et générale; car, puisque $x = \alpha$ doit donner $y = a$, la valeur de y est de la forme de $y = Aa + K$, A et K étant composés de manière que $x = \alpha$ rende $A = 1$; et $K = 0$: ainsi (n° 500), $K = (x - \alpha)K'$. De plus, quand $x = \beta$, on a $y = b$; donc on a en général $y = Bb + L$, L étant $= (x - \beta)L'$; de sorte que, pour allier ces deux conditions,

$$y = \frac{x-\beta}{\alpha-\beta}A'a + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}B'b + (x-\alpha)(x-\beta)M';$$

A' et B' étant $= 1$, lorsqu'on fait respectivement $x = \alpha$, ou $= \beta$.

En continuant le même raisonnement, on verra que

$$y = Aa + Bb + Cc + \text{etc.},$$

équ. où $$A = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots};$$

$$B = \frac{(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots},$$

en prenant pour chaque coefficient une fraction ayant autant de facteurs moins 1, qu'il y a de points donnés.

On obtient ainsi l'équ. approchée d'une courbe donnée, mais

tracée au hasard; il suffit d'y distinguer un nombre suffisant de points, pris surtout aux lieux où la courbe offre des sinuosités marquées, et d'en mesurer les coordonnées α, a, β, b, ...

On pourra ainsi trouver, entre des points isolés F, G, M, Z, . . . d'autres points assujettis à la même loi; et de même, entre plusieurs quantités liées par de certains rapports, obtenir une loi qui puisse servir à faire connaître, par approximation, quelque circonstance intermédiaire. C'est en cela que consiste *la méthode de l'Interpolation*, dont l'application est si fréquente aux phénomènes naturels (*voy.* n°s 637 et 947).

Les mêmes raisonnements servent à faire passer une courbe de nature connue par une série de points donnés: l'équation de cette courbe doit alors renfermer autant de constantes arbitraires qu'il y a de ces points, sans quoi le problème serait absurde ou indéterminé. Ainsi l'équ. la plus générale du cercle étant

$$(y-k)^2+(x-h)^2=r^2,$$

on ne peut exiger que cette courbe passe par plus de trois points connus (α, a), (β, b), (γ, c), et l'on aurait, pour déterminer les constantes k, h et r, les conditions

$$(a-k)^2+(\alpha-h)^2=r^2,$$
$$(b-k)^2+(\beta-h)^2=r^2,$$
$$(c-k)^2+(\gamma-h)^2=r^2.$$

Si le rayon r était connu, on ne pourrait plus se donner que deux points, et ainsi de suite.

En général on peut faire passer une section conique par cinq points, puisqu'il y a cinq arbitraires dans l'équ. générale du 2e degré, dégagée du coefficient du 1er terme.

467. Quelle est la courbe DM, QE (fig. 281) engendrée par l'intersection continuelle de la ligne BM, qui tourne autour de B, et d'un cercle MEQ, dont le centre C glisse le long de AC, de manière que ce centre soit toujours sur BM? Prenons Ax et BD pour axes. Soient $AC=\alpha$, $AB=b$, $CM=AD=a$, les équ. du cercle, et de la droite BM qui passe en $B\,(0, -b)$ et $C\,(\alpha, 0)$, sont

$$(x-\alpha)^2+y^2=a^2,\quad \alpha y=b\,(x-\alpha);$$

éliminant α, il vient $\qquad x^2y^2=(a^2-y^2)\,(y+b)^2.$

Telle est l'équ. de la courbe proposée, que Nicomède a nommée *Conchoïde*. Il suit de sa génération qu'elle est formée de deux branches, l'une au-dessus, l'autre en dessous de Ax, étendues à l'infini, et dont Ax est l'asymptote; que la plus grande largeur est en DD', lorsque la droite mobile BM est perpend. à Ax. Si AB est $< a$, alors il y a en D' un *nœud;* ce nœud s'évanouit, et ne laisse qu'un point de *rebroussement,* lorsque $AB=a$ (*voy.* fig. 282).

468. Le cercle AFB (fig. 283) et sa tang. BD sont fixes; la droite AD tourne en A, et AM est toujours pris $=FD$: quelle est la courbe des points M? Elle résulte de la section continuelle de AD; par un 2e cercle, dont le centre est en A, et dont le rayon R variable est sans cesse $=FD$. Les équ. de nos deux cercles, l'origine étant en A, sont $x^2+y^2=R^2$, $y^2=2ax-x^2$; celle de AD est $y=Ax$; A et R varient, et l'on a $AM=FD$, ou $AP=EB$. Or, on trouve (n°s 372, 354) $AE=\dfrac{2a}{1+A^2}$, $EB=\dfrac{2aA^2}{1+A^2}$, $AP=R\cos MAP=\dfrac{R}{\sqrt{(1+A^2)}}$: donc $R\sqrt{(1+A^2)}=2aA^2$; c'est l'équ. de condition.

Éliminant R et A, à l'aide de $x^2+y^2=R^2$, $y=Ax$, on a l'équ. cherchée

$$x^3+xy^2=2ay^2;\quad \text{d'où } y^2=\frac{x^3}{2a-x}.$$

Il résulte de cette équ. que, 1° x ne peut être $>2a$, ni négatif: ainsi la courbe est renfermée entre Ay et BD; 2° elle est symétrique de part et d'autre de AB; 3° elle passe par l'origine A (où elle a un rebroussement); 4° $x=a$ donne $y=\pm a$: les points H et H', où la courbe coupe la circonf. directrice, partagent celle-ci en ses quatre quadrans; 5° $x=2a$ donne $y=\infty$: BD est asymptote. Cette courbe est nommée *Cissoïde de Dioclès*.

469. La courbe OBM (fig. 284), dont les abscisses AE, AP. . . . sont les logarithmes des ordonnées correspondantes EF, MP. . . . est nommée *Logarithmique*: son équ. est $x=\log y$, ou $y=a^x$, a étant la *base* (n° 145). Il est facile de voir que, 1° la courbe n'a qu'une seule branche, qui est infinie à droite et à gauche; 2° l'ordonnée AB à l'origine est $=1$; 3° soit $AE=1=AB$, on a $EF=a=$ la base; 4° si a est >1, la partie BM de la courbe qui est dans la région des x positifs, s'écarte sans cesse de Ax (le con-

traire a lieu lorsque $a < 1$); l'autre partie FO s'approche de AQ; QAx est l'asymptote. 5° Si l'on prend des abscisses successives en progression par différence, les ordonnées correspondantes formeront une progression par quotient.

Les différentes espèces de logarithmiques sont distinguées entre elles par la base a.

470. Formons *la courbe des sinus* (fig. 289) : l'équ. est $y = \sin x$. Chaque abscisse x est le développement d'un arc de cercle dont l'ordonnée y est le sinus, le rayon étant r. Si l'arc est 0, πr, $2\pi r$,.... le sinus est nul : à partir de l'origine A, et de part et d'autre, on prend $AB = BC = AB' = \ldots = \pi r$, les points A, B, B', C, C'.... sont ceux où la courbe coupe l'axe des x. L'arc croissant depuis zéro jusqu'à $\frac{1}{2}\pi r = AE$, le sinus croît aussi jusqu'à $EF = r$; mais x continuant de croître, y diminue ; la portion AFB de courbe est symétrique par rapport à FE. Lorsque x passe $AB = \pi r$, le sinus devient négatif; et comme il reprend les mêmes valeurs, on a une autre partie de courbe BDC égale à la première. Le cours se continue ainsi à l'infini. Ces courbes ne diffèrent entre elles que par le rayon r.

471. Un point M (fig. 285) se meut le long de CM, en même temps que CM tourne en C; quand ce rayon mobile était couché sur CA, M était en A; et l'on exige que AC soit toujours à AP, comme le quadrans ac est à l'arc décrit ab. On demande quelle est la courbe $AMDB$ décrite par A? Elle est produite par l'intersection continuelle du rayon CM et de PM perpend. à CA. C étant l'origine, soient $AC = a$, $ab = \theta$, $CP = \alpha$, les équ. de CM et PM sont $y = x \operatorname{tang} \theta$, $x = \alpha$. Mais la condition imposée $\frac{AC}{AP} = \frac{ac}{ab}$ donne $\frac{a}{a - \alpha} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\theta}$; éliminons α et θ, il vient

$$y = x \operatorname{tang}\left[\frac{\frac{1}{2}\pi(a - x)}{a}\right], \text{ ou } y = x \cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right).$$

Il est aisé de voir, 1° que la courbe est symétrique de part et d'autre de Cy; 2° que $\pm x > a$ rend y négatif; 3° que $\pm x = 2a$ donne les asymptotes QN, $Q'N'$; $x = 0$ donne $y = 0 \times \infty$, expression singulière de l'ordonnée CD, et dont nous rechercherons plus tard la valeur (n° 756). *Dinostrate*, inventeur de cette courbe, lui a donné le nom de *Quadratrice*, à cause de l'utilité qu'il lui supposait pour la quadrature du cercle.

472. Si un cercle GM (fig. 290) roule sur une droite AB, le point M, qui originairement était en contact en A, aura décrit l'arc AM; et le nouveau point de tangence avec AB sera en D, de sorte que AD sera le développement de l'arc de cercle MD. En continuant le mouvement du cercle, le point M tracera la courbe $AMFB$, qu'on nomme *Cycloïde, Roulette* ou *Trochoïde*.

Après une révolution complète, le point M se retrouvera au contact en B, qui sera un point de la courbe, AB étant la circonférence du cercle générateur : en E, milieu de AB, le diamètre $FE = 2r$ de ce cercle, est la plus grande ordonnée; la courbe est symétrique de part et d'autre de l'*axe* FE. La cycloïde continue son cours à l'infini, en formant en A, B.... des rebroussements.

Prenons l'origine en A, $AP = x$, $PM = y$; comme ..... $AP = AD - PD$, on a $x = MD - z$, en faisant $PD = z$; z est l'ordonnée QM du cercle CM, l'abscisse y étant DQ; d'où $z^2 = 2ry - y^2$. Or, MD est un arc qui, dans le cercle dont le rayon est r, a z pour sinus; ce qu'on exprime ainsi :

$$MD = \text{arc}\,(\sin = z);$$

donc on a $$x = \text{arc}\,(\sin = z) - z,$$

ou $$z = \sin(x + z);\ z^2 = 2ry - y^2.$$

Si l'origine est en F, $FS = x$, $SM = y$, $FK = u$, on a

$$FS = AE - AP = AE - (AD - PD)$$

$$= \text{demi-circ. } FKE - \text{arc } MD + MQ = FK + KN,$$

ou $x = \text{arc}\,(\sin = z) + z$, $z = \sin(x - z)$, ou $x = u + \sin u$.

Les travaux de Fermat, Descartes, Roberval, Pascal, Huyghens, ... ont rendu cette courbe célèbre ; elle jouit de propriétés géométriques et mécaniques très-singulières, mais ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper. *Voy.* le second volume.

Si l'on eût cherché la courbe décrite par un point du plan circulaire différent de ceux de la circonférence, on aurait eu une autre espèce de cycloïde. On aurait aussi pu donner au cercle mobile un mouvement de translation dans l'un ou l'autre sens, outre celui dont nous venons de parler, ce qui aurait allongé ou accourci la

cycloïde. Enfin on aurait pu faire rouler la circonférence sur une autre courbe : on aurait eu ce qu'on nomme les *Épicycloïdes*. Mais nous ne pouvons qu'indiquer ces objets.

473. On nomme *Spirale* une courbe qui est coupée en une infinité de points par toute ligne passant par un point fixe ou pôle. Les spirales forment un genre de courbes dont la génération nécessite, pour ainsi dire, les coordonnées polaires. Telle est celle de *Conon*, qui porte le nom de *Spirale d'Archimède*, parce que ce célèbre géomètre en a le premier reconnu les propriétés. La droite AI (fig. 286) tourne autour de A, pendant qu'un point mobile M glisse le long de AI. Cherchons l'équ. de la courbe $AMNC$, qu'il trace, en supposant que AI est placée en AC, quand le mobile est en A ; qu'après une révolution, lorsque AI se retrouve en AC, le mobile M est en C; qu'enfin les espaces $AM = r$ qu'il parcourt sont proportionnels aux angles $IAC = \theta$ que décrit AI.

La valeur angulaire 2π devant répondre à $AC = a$, on a

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{gh}{AM} = \frac{\theta}{r}; \text{ donc, } 2\pi r = a\theta$$

est l'équ. cherchée. La courbe passe en A, en C. . . ; les révolutions successives de AI donnent $\theta = 2\pi$, $= 4\pi$, $=$. . . ; d'où $r = a$, $= 2a$, ... de sorte que, chaque fois, le rayon vecteur augmente de a. Comme, pour un nombre quelconque k de révolutions, l'équ.

$$r = \frac{a\theta}{2\pi} \text{ devient } r = ak + \frac{a\theta}{2\pi},$$

k étant un entier quelconque, tous les rayons vecteurs s'accroissent aussi de a.

474. Soient menées les perpend. AC, CD (fig. 287), et décrit du centre C des arcs, tels que PM, égaux en longueur à une ligne donnée $CD = a$; les extrémités M de ces arcs déterminent une courbe NM, dont on trouve aisément l'équ. ; car on a $\frac{Ch}{gh} = \frac{CM}{PM}$; or, $PM = a$, $Ch = 1$; donc $r\theta = a$. L'analogie de cette équ. avec $xy = m^2$ a fait donner à cette courbe le nom de *Spirale hyperbolique :* on voit d'ailleurs que DE, parallèle à AC, est asymptote. Puisque $r = \frac{a}{\theta}$, r n'est nul que quand $\theta = \infty$; et comme $\theta = 2\pi$,

$= 4\pi$, ... donnent des valeurs de r de plus en plus petites, la courbe fait autour du pôle des circonvolutions, et n'y parvient qu'après une infinité de tours.

On a donné de même le nom de *Spirale logarithmique* à la courbe dont l'équ. est $\theta = \log r$, ou $r = a^\theta$. θ croissant, r croît aussi, et le cours de la spirale s'étend à l'infini; mais θ étant négatif et croissant, r décroît, de sorte que ce n'est qu'après un nombre infini de tours que la courbe atteint le pôle. Elle participe, comme on voit, des deux précédentes.

La *Spirale parabolique* a pour équ. $r = a \pm \sqrt{(p\theta)}$, de sorte que $r - a$ est moyenne proportionnelle entre p et θ : on reconnaîtra aisément la forme de cette courbe.

FIN DU PREMIER VOLUME.