Enfin, pour un nombre $4n + 3$, le résultat du calcul actuel est $9n + 8$; en y ajoutant 1, on a un multiple de 9; il doit en être de même de la somme de ses chiffres.

La règle est donc justifiée dans tous les cas.

PROBLÈME IV

Faire le même encore diversement.

Fais doubler le nombre pensé et à ce double fais ajouter 5, puis multiplier le tout par 5, puis ajouter 10 et multiplier le tout par 10. Lors t'enquérant quel est ce dernier produit, et en ôtant d'icelui 350, le nombre des centaines du reste sera le nombre pensé.

Par exemple, qu'on ait pensé 3, son double est 6, auquel ajoutant 5 vient 11, qui multiplié par 5 fait 55, auquel ajoutant 10 provient 65, qui multiplié par 10 produit 650, duquel si tu ôtes 350 restera 300, où tu vois clairement que le nombre des centaines, à savoir 3, est le nombre pensé.

DÉMONSTRATION.

En exécutant sur un nombre quelconque n les opérations prescrites par la règle, on a :

$$n \times 2 + 5 = 2n + 5,\ (2n + 5) \times 5 = 10n + 25,$$
$$10n + 25 + 10 = 10n + 35,\ (10n + 35) \times 10 = 100n + 350,$$
$$100n + 350 - 350 = 100n,\ 100n : 100 = n,$$

ce qui prouve l'exactitude de la règle.

AVERTISSEMENT.

Si tu considères bien les fondements de cette démonstration, tu comprendras aisément le moyen de diversifier la pratique de ce problème en cent mille façons : car premièrement si tu veux toujours que le nombre des centaines exprime le nombre pensé, et que les multiplications se fassent par 2, par 5 et par 10, comme auparavant, mais seulement que le nombre qui se soustrait de la dernière somme, à savoir 350, soit changé; prends garde que 350 est provenu du 5 qu'on a ajouté du commencement, lequel multiplié par 5 a fait 25 auquel ajoutant 10 est provenu 35 qui finalement multiplié par 10 a produit 350. Donc si tu veux changer 350, change les nombres que tu fais ajouter, par exemple au lieu de 5 fais ajouter 4, et 12 au lieu de 10, ou bien tels autres nombres qu'il te plaira, et lors pour savoir quel autre nombre il faut soustraire, multiplie le premier, 4, par 5, viendra 20, auquel ajoute 12, viendra 32, qui multiplié par 10 fera 320, le nombre qu'il conviendra soustraire de la dernière somme; et ainsi si tu changes encore les 4 et 12, tu changeras aussi le 320. Partant déjà par ce moyen le problème se peut parfaire en infinies sortes différentes.

Secondement voulant encore que le nombre des centaines montre le nombre pensé, tu peux toutefois changer les multiplicateurs, car le nombre pensé est multiplié par 100 pource que les trois multiplicateurs 2, 5 et 10, dont nous nous sommes servis, multipliés ensemble font 100. Donc pourvu que tu prennes pour multiplicateurs des nombres qui multipliés ensemble fassent 100, il n'importe quels ils soient. Partant premièrement tu te peux servir des mêmes 2, 5 et 10 en changeant l'ordre

seulement, comme faisant en premier lieu multiplier par 5, puis par 10, puis par 2, ou bien premièrement par 10, puis par 2, et enfin par 5, ou autrement.

En après tu peux prendre d'autres nombres qui fassent le même effet, comme 5, 4, 5, ou bien 2, 25, 2; seulement prends garde qu'en tous ces changements le nombre qu'il faut soustraire à la fin change aussi, selon la diversité des multiplicateurs et des nombres qu'on fait ajouter. Par exemple, prends 5, 4, 5 pour multiplicateurs, et pour nombres à ajouter 6 et 9, et soit le nombre pensé 8. Qu'on le multiplie par 5 vient 40, auquel ajoutant 6 viendra 40+6, qui multiplié par 4 fait 160 + 24, auquel ajoutant 9 viendra 160+33, qui multiplié par 5 donnera 800+165, par où l'on voit qu'ôtant 165, il reste 800, où le nombre des centaines est le nombre pensé.

Troisièmement tu peux prendre tout autre nombre que 100, et faire qu'il soit contenu au restant de la soustraction autant de fois qu'il y aura d'unités au nombre pensé; et pour ce faire il ne faut que choisir pour multiplicateurs des nombres qui multipliés ensemble fassent le nombre que tu veux. Comme si tu veux prendre 24, choisis pour multiplicateurs 2, 3, 4, ou bien 2, 6, 2. Par exemple, prenons pour multiplicateurs 2, 3, 4, et pour nombres à ajouter 7 et 8; et soit le nombre pensé 5 qui doublé fera 10, à qui ajoutant 7 vient 10+7, qui multiplié par 3 fait 30 + 21, à qui ajoutant 8 provient 30+29, qui multiplié par 4 fait 120+116; ainsi ôtant 116 restera 120 où tu vois que 24 est contenu 5 fois, et par là tu juges que le nombre pensé était 5.

Tu peux aussi ne prendre que deux multiplicateurs et n'ajouter qu'un nombre; comme si tu voulais que le nombre des dizaines exprimât le nombre pensé, prends 2 et 5 pour multiplicateurs et

6 pour nombre à ajouter, et soit par exemple le nombre pensé 7, qui doublé fera 14 auquel ajoutant 6 viendra 14+6, qui multiplié par 5 produira 70+30, dont il faut ôter 30 pour que le reste 70 contienne autant de dizaines qu'il y a d'unités au nombre pensé. Semblablement on pourrait prendre quatre, cinq, ou six, ou plusieurs multiplicateurs, et ajouter davantage de nombres, comme je laisse considérer au prudent lecteur.

Finalement on peut diversifier la pratique de ce problème usant de soustraction au lieu d'addition, et par conséquent à la fin usant d'addition au lieu de soustraction. Comme si tu te veux servir des nombres donnés au premier exemple, soit 12 le nombre pensé; fais-le doubler, viendra 24, d'où fais ôter 5 viendra 24 — 5, qui multiplié par 5 fera 120 — 25, d'où fais ôter 10 restera 120 — 35, qui multiplié par 10 produira 1200 — 350; mais maintenant il faut ajouter 350 au lieu de le soustraire, et la somme sera 1200 où le nombre des centaines exprime le nombre pensé 12.

PROBLÈME V

Deviner encore le nombre pensé d'une autre sorte.

Cette façon semble plus ingénieuse que les autres, bien que la démonstration en soit plus aisée.

Fais multiplier le nombre pensé par quel nombre que tu voudras, puis diviser le produit par quel autre que tu voudras, puis multiplier le quotient par quelque autre, et derechef multiplier ou diviser par un autre, et ainsi tant que tu voudras. Voire même, s'il te plaît, remets cela à la volonté de celui qui aura songé le nombre, pourvu qu'il te die toujours par quels nombres il multiplie et par quels il divise. Mais pour deviner le nombre pensé, prends en même temps quelque nombre à plaisir et fais sur lui secrètement toutes les mêmes multiplications et divisions, et lorsqu'il te plaira d'arrêter, dis à celui qui a songé le nombre qu'il divise le dernier nombre qui lui reste par le nombre pensé; toi semblablement divise ton dernier nombre par le premier que tu auras pris, et sois assuré que le quotient de ta division sera le même que le quotient de la sienne. Partant, fais ajouter à ce quotient le nombre pensé et demande qu'il te déclare cette somme; alors ôtant d'icelle le quotient connu,

tu sauras infailliblement que le reste c'est le nombre pensé.

Par exemple, soit le nombre pensé 5 : fais-le multiplier par 4, viendra 20; fais-le diviser par 2 viendra 10; fais-le multiplier par 6, viendra 60; fais-le diviser par 4, viendra 15; et ainsi fais multiplier et diviser tant qu'il te plaira, mais en même temps choisis quelque nombre, et fais sur lui toutes les mêmes opérations. Par exemple, prends 4 (il vaudrait mieux prendre 1) qui multiplié par 4 fait 16, qui divisé par 2 fait 8, qui multiplié par 6 fait 48, qui divisé par 4 donne 12. Lors, si tu te veux arrêter là, dis à celui qui a songé le nombre qu'il divise son dernier nombre, à savoir 15, par le nombre pensé 5; le quotient sera 3, et tu vois bien aussi que tu auras le même quotient si tu divises ton dernier nombre 12 par le premier que tu avais pris qui est 4. Partant dès maintenant tu peux faire un assez plaisant jeu devinant le quotient de cette dernière division, chose qui semblera bien admirable à ceux qui en ignoreront la cause. Que si tu veux avoir le nombre pensé, sans faire semblant de savoir ce dernier quotient, fais ajouter ledit nombre pensé audit dernier quotient, et demande la somme de cette addition, qui est 8 en l'exemple donné, d'où si tu soustrais le quotient connu, à savoir 3, te restera infailliblement le nombre pensé 5.

DÉMONSTRATION.

Lorsqu'on fait sur un nombre n une suite de multiplications et de divisions, on obtient un résultat de la forme $n\frac{abc..}{gh..}$; en exécutant les mêmes opérations sur un nombre p, on a $p\frac{abc..}{gh..}$; donc ces deux résultats divisés l'un par n, l'autre par p donnent

le même nombre $\frac{abc..}{gh..}$; par conséquent, connaissant le nombre $\frac{abc..}{gh..}$, si l'on se fait donner le nombre $\frac{abc..}{gh..}+n$, il suffira d'en retrancher $\frac{abc..}{gh..}$ pour connaître n.

AVERTISSEMENT.

On peut changer infiniment la pratique de ce problème, d'autant qu'on peut faire multiplier et diviser par divers nombres tels que l'on veut, et n'importe que l'on fasse multiplier, puis diviser alternativement, ou que l'on fasse multiplier deux ou trois fois de suite, puis diviser semblablement. L'on peut aussi, ayant connu le dernier quotient, user de soustraction au lieu d'addition, si le nombre pensé se trouve moindre qu'icelui quotient. Comme en l'exemple donné, si l'on se fût arrêté après avoir multiplié par 6, le dernier nombre d'un côté eût été 60, de l'autre 48. Partant faisant diviser 60 par le nombre pensé 5, le quotient est 12 qui te viendra pareillement divisant 48 par 4 pris du commencement. Partant si du quotient 12 tu fais soustraire le nombre pensé, demandant combien il reste, on te répondra qu'il reste 7. Donc il est certain que si tu soustrais 7 du quotient connu 12, le reste 5 est le nombre pensé. L'on peut aussi à ce dernier quotient connu faire ajouter, ou soustraire d'icelui, non tout le nombre pensé, mais quelque partie d'icelui, comme la moitié, le tiers, le quart, ou quelque autre; car, connaissant la partie d'un nombre, il n'est pas malaisé de connaître tout le nombre.

PROBLÈME VI

Faire encore le même d'une autre façon

Cette façon est la plus difficile à pratiquer de toutes, et la démonstration en est assez cachée.

Prends deux ou trois, ou plusieurs nombres premiers entre eux, de telle sorte que chacun d'iceux soit premier à chacun des autres, comme sont ces trois 3, 4, 5, et cherche le moindre nombre qui est mesuré par iceux, qui en l'exemple donné est 60 (c'est toujours leur produit). Lors dis à celui qui doit penser le nombre qu'il en pense quelqu'un qui ne passe point 60; et mets peine de treuver un nombre qui étant mesuré par 3 et 4 surpasse de l'unité quelque multiple de 5 (note 11) lequel est 36; semblablement treuve un nombre qui étant mesuré par 3 et 5 surpasse de l'unité quelque multiple de 4, lequel est 45; finalement cherche un nombre qui étant mesuré par 4 et 5 surpasse de l'unité quelque multiple de 3, lequel est 40. Ayant ces trois nombres, fais ôter 3 tant de fois qu'on pourra du nombre pensé, et qu'on te dise ce qui reste, et pour autant d'unités qu'il restera prends autant de fois 40. Semblablement fais ôter 4 tant qu'on pourra du nombre pensé, et demandant le reste, pour chaque unité restante retiens 45; finalement fais aussi ôter tous les 5 du nombre pensé, et pour chaque unité qui restera retiens 36. Puis ajoute ensemble tous les nombres que tu as retenus, et si la somme est moindre que 60 elle sera égale au nombre pensé; mais si elle passe 60, ôtant d'icelle 60 tant de fois que tu pourras, le reste sera le nombre pensé.

Par exemple, qu'on ait songé 19 : en ôtant tous les 3 d'icelui reste 1, pour lequel tu retiendras une fois 40; en ôtant tous les 4 reste 3, partant tu retiendras 3 fois 45, à savoir 135; en ôtant tous les 5 reste 4, partant tu retiendras 4 fois 36, à savoir 144. Or ajoute ensemble 40, 135 et 144, la somme sera 319, d'où si tu ôtes 60 tant de fois qu'on le peut ôter, il restera 19, le nombre pensé. Que si ôtant tous les 3, tous les 4 et tous les 5, il ne restait jamais rien, le nombre pensé serait infailliblement 60.

Le problème se peut parfaire également avec quatre, cinq, six, ou plusieurs nombres premiers entre eux en la manière exposée. Soient les quatre nombres choisis 2, 3, 5, 7. Alors le nombre duquel il ne faudra pas en penser un plus grand sera 210, qui est celui qui se fait multipliant ensemble tous les 4 nombres choisis; et pour chaque unité qui restera ôtant tous les 2, il faudra retenir 105 (multiple de 3, 5, 7, qui surpasse d'une unité un multiple de 2); pour chaque unité restante ôtant tous les 3, il faudra retenir 70 (multiple de 2, 5, 7, qui surpasse d'une unité un multiple de 3); pour chaque unité restante ôtant tous les 5, il faudra retenir 126 (multiple de 2, 3, 7, qui surpasse d'une unité un multiple de 5); et pour chaque unité restante tous les 7 ôtés, il faudra retenir 120 (multiple de 2, 3, 5, qui surpasse d'une unité un multiple de 7). Puis ajoutant ensemble les nombres retenus, leur somme sera égale au nombre pensé, sinon qu'elle

surpasse 210, car alors il faudra ôter 210 d'icelle somme tant de fois qu'on pourra, et le reste sera le nombre pensé.

DÉMONSTRATION.

On a pris des nombres premiers entre eux deux à deux, a, b, c,..., et quelqu'un a pensé un nombre n qui ne surpasse pas leur produit abc.. lequel est leur plus petit commun multiple M ; puis on a divisé n alternativement par a, par b, par c,... ce qui a donné les restes α, β, γ.... Or on sait qu'il n'y a pas deux nombres moindres que M qui divisés par les nombres a, b, c,... donnent le même système de restes (note 1) ; donc le nombre n est déterminé par les restes α, β, γ.....; mais il y en a d'autres plus grands que M qui donnent les mêmes restes, ce sont les nombres

$$M+n,\ 2M+n,\ 3M+n,\ldots \text{ (note 1)},$$

et ce sont les seuls. Or on a calculé les nombres

$$\dot{\overline{bc..}}=\dot{a}+1,$$

$$\dot{\overline{ac..}}=\dot{b}+1,$$

$$\dot{\overline{ab..}}=\dot{c}+1;$$

il en résulte

$$\alpha\,\dot{\overline{bc..}}=\dot{a}+\alpha,$$

$$\beta\,\dot{\overline{ac..}}=\dot{b}+\beta,$$

$$\gamma\,\dot{\overline{ab..}}=\dot{c}+\gamma;$$

et par suite la somme

$$\alpha\,\dot{\overline{bc..}}+\beta\,\dot{\overline{ac..}}+\gamma\,\dot{\overline{ab..}}+\ldots$$

jouit de la propriété qu'étant divisée alternativement par a, par b, par c,... elle donne les restes α, β, γ,... ; cette somme est donc l'un des nombres n, $M+n$, $2M+n$,... ; c'est le nombre n si elle est moindre que M, et l'on voit que, dans le cas contraire, il suffit d'en retrancher M autant de fois que possible pour avoir n ; ce qui démontre la règle.

Remarque. Le calcul des quantités $\dot{\overline{bc..}}$, $\dot{\overline{ac..}}$,... est enseigné dans la note 11 ; mais comme dans les jeux arithmétiques les nombre a, b, c,.. sont de petits nombres, on peut résoudre la question rapidement de la manière suivante. Soit par exemple à trouver un multiple de 7 et 9 qui surpasse d'une unité un multiple de 11. Le premier multiple de 7 et 9 est 63 ; il est égal à un multiple de 11 plus 8 ; donc les multiples suivants sont des multiples de 11 augmentés successivement des multiples de 8 qu'on diminue d'ailleurs de 11 chaque fois qu'ils surpassent 11 ; on trouve ainsi les excès $8+8$ ou 5, $5+8$ ou 2, $2+8$ ou 10, $10+8$ ou 7, $7+8$ ou 4, $4+8$ ou 1.

Ainsi c'est le septième multiple de 63 ou 441 qui le premier est égal à un multiple de 11 plus 1.

Si l'on veut de même un multiple de 7 et 11 qui surpasse de l'unité un multiple de 9, comme le premier qui est 77 surpasse de 5 un multiple de 9, on conclut que le suivant 154 aura un excès de 10 ou 1 sur un multiple de 9.

Enfin, on trouve que le premier multiple de 9 et 11, qui est 99, surpasse de l'unité un multiple de 7.