PROBLÈME XVIII

De plusieurs cartes disposées en divers rangs deviner laquelle on aura pensée.

PRENDS 15 cartes et les dispose en trois rangs, si bien qu'il s'en trouve 5 en chaque rang; et que quelqu'un pense laquelle qu'il voudra pourvu qu'il te déclare en quel rang elle est. Alors ramasse à part les cartes de chaque rang, puis joins-les toutes ensemble, mettant toutefois le rang où est la carte pensée au milieu des deux autres. En après derechef dispose toutes les cartes en trois rangs, en posant une au premier, puis une au second, puis une au troisième, et en remettant derechef une au premier, puis une au second, puis une au troisième, et ainsi jusqu'à ce qu'elles soient toutes rangées. Alors demande en quel rang est la carte pensée, et ramasse comme auparavant chaque rang à part, mettant au milieu des autres celui où est la carte pensée; et finalement dispose-les encore en trois rangs de la même sorte qu'auparavant, et demande auquel est-ce que se treuve la carte pensée, et sois assuré qu'elle se treuvera lors la troisième du rang où elle sera. Ainsi tu la devineras aisément.

Que si tu veux encore mieux couvrir l'artifice, tu peux ramasser derechef toutes les cartes en la façon que j'ai dit ci-dessus,

mettant au milieu des deux autres le rang où est la carte pensée, et lors la carte pensée se treuvera au milieu de toutes les quinze cartes, si bien que, de quel côté que l'on commence à compter, elle sera toujours la huitième.

DÉMONSTRATION.

Pour rendre raison infaillible de ceci, il me faut preuver que, disposant les cartes ainsi que j'ai dit par trois fois, enfin après la troisième fois la carte pensée est nécessairement la troisième du rang où elle se treuve. Or prends garde que la première fois ayant rangé en trois rangs quinze cartes, comme j'ai dit, quand tu sais en quel rang est la carte pensée, tu es assuré que c'est une des cinq qui sont en ce rang; et mettant au milieu des autres rangs celui où est la carte pensée, et les disposant derechef comme j'ai enseigné, alors tu mets en divers rangs les cinq cartes qui auparavant n'étaient qu'en un seul rang. Partant regarde bien en quelles places tombent les cartes du rang du milieu, entre lesquelles tu sais que doit être la carte pensée, et remarque ces cinq points :

1° Que la première tombe au second lieu du troisième rang.

2° Que la seconde tombe au troisième lieu du premier rang.

3° Que la troisième tombe au troisième lieu du second rang.

4° Que la quatrième tombe au troisième lieu du troisième rang.

5° Que la cinquième tombe au quatrième lieu du premier rang.

En représentant par des o les cartes où ne se trouve pas la carte

pensée et par des 1 celles parmi lesquelles elle se trouve, on a la disposition suivante :

1er *rang*.	2e *rang*.	3e *rang*.
0	0	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0
0	0	0

Donc si la carte pensée est lors au premier rang, tu es assure que c'est la troisième ou quatrième d'icelui; partant disposant derechef les cartes en la façon ordonnée, elle tombera nécessairement en la troisième place du second ou en la troisième du troisième rang.

Que si après la seconde disposition la carte pensée est au second rang tu es assuré que c'est la troisième du même rang; partant dès lors tu la peux deviner; mais quand bien tu rangeras derechef les cartes en la façon exposée, elle retombera toujours à la même place (c'est une propriété spéciale et évidente de la carte du milieu). Que si la carte pensée, après la seconde disposition, est au troisième rang, tu es assuré que c'est la seconde ou la troisième d'icelui ; partant rangeant derechef les cartes, elle tombera infailliblement en la troisième place du premier rang, ou en la troisième du second. Donc, quoi qu'il advienne, après la troisième fois, la carte pensée sera toujours la troisième du rang où elle se treuvera. Ce qu'il fallait démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

La démonstration de Bachet est évidemment trop particulière,

et ne montre pas si avec un nombre impair quelconque de cartes distribuées en un nombre impair de tas égaux, on peut toujours amener la carte pensée au milieu du jeu.

Soient n le nombre des cartes de chaque tas et t le nombre des tas. La carte pensée se trouve au commencement parmi les n cartes du tas du milieu ; à la distribution suivante ces n cartes seront réparties sur les t tas, et si n divisé par t donne un quotient entier e, elles se trouveront également distribuées dans les t tas, formant un groupe de e cartes au milieu de chaque tas.

1re *disposition*.			2e *disposition*.		
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0

Il en sera de même si le quotient e est divisible par t ; et encore de même si le nouveau quotient f est divisible par t ; et ainsi de suite : en sorte que la carte pensée se trouve constamment dans un groupe occupant le milieu du jeu, quand on a mis au milieu des autres le tas où elle se trouve. Si donc les divisions par t se font sans reste jusqu'à ce qu'on trouve le quotient 1, la carte pensée sera au milieu du jeu quand on aura mis le tas qui la contient au milieu des autres. Mais aussitôt que l'un des quotients n'est plus entier, on trouve dans une ou plusieurs des tranches

horizontales des cartes des deux espèces, comme dans l'exemple suivant où il y a 5 tas de 9 cartes :

1re *disposition.*	2e *disposition.*
0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 1 1
0 0 1 0 0	1 1 1 1 1
0 0 1 0 0	1 1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 0 0

et si la carte pensée n'est pas dans le tas du milieu, après la distribution, elle peut se trouver dans un groupe qui ne forme pas le milieu du jeu, après qu'on aura mis le tas qui la contient au milieu des autres; comme si, par exemple, elle se trouve dans l'un des deux premiers tas de droite, ou dans l'un des deux derniers tas de gauche dans la seconde distribution précédente.

Mais alors il suffira de remplacer un zéro par un 1 pour pouvoir dire que la carte pensée se trouve dans un groupe qui peut occuper ensuite le milieu du jeu. Ainsi, que la carte soit dans le premier tas de gauche, on remplacera par 1 le 0 qui précède le premier 1, et ce tas étant mis au milieu des autres, la carte pensée se trouvera dans un groupe de trois cartes placé au milieu du jeu.

En raisonnant de la même manière pour les répartitions suivantes, on voit qu'à la fin la carte pensée ne peut manquer de se trouver au milieu du jeu.

Reste la question de savoir après combien de coups elle se trouvera sûrement au milieu du jeu. Si l'on a bien compris les explications précédentes, on en conclura qu'ayant divisé n par t, si le quotient e est entier on devra le diviser aussi par t, et ainsi de suite, tant que le quotient sera entier ; que si un quotient n'est pas entier, le premier nombre entier supérieur à ce quotient exprime le maximum du nombre de cartes (contenant la carte pensée) qui se trouvent dans un tas, dans la distribution correspondante ; mais que si ce maximum est un nombre pair, il faut y ajouter 1 pour avoir le groupe qui peut être placé au milieu du jeu et dont fasse partie la carte pensée. On divisera de même ce groupe par t, en opérant de la même manière ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à l'unité ou à un quotient plus petit que 1 : le nombre des divisions par t sera le nombre maximum des conps après lesquels le problème sera résolu. D'ailleurs il n'y a pas à craindre de manquer la solution en faisant plus de coups qu'il ne faut ; car quand la carte pensée est arrivée au milieu du jeu, elle s'y maintient, quel que soit le nombre des distributions que l'on puisse faire inutilement.

Si l'on considère les n cartes du tas qu'on a mis la première fois au milieu des autres, on voit que ces cartes se répartiront ensuite au milieu de la distribution sur les t nouveaux tas, en sorte que si n ne surpasse pas t, elles se trouveront dans la rangée horizontale du milieu, et il n'y en aura pas plus d'une dans chaque tas ; par conséquent, les tas étant ramassés comme on l'a dit, la carte pensée se trouvera au milieu du jeu.

Si l'on a $n > t$ mais que n ne surpasse pas t^2, les n cartes du milieu occuperont dans la distribution suivante plus d'une rangée horizontale, mais elles n'en occuperont pas plus de t, ces

rangées étant toujours placées au milieu de la distribution ; en sorte que les tas étant ramassés, on sera certain que la carte pensée se trouve parmi les t cartes du milieu du jeu. Une nouvelle distribution isolant ces t cartes sur les t tas, la carte pensée se trouvera au milieu du tas qui la contient, et par suite au milieu du jeu quand on aura ramassé les tas suivant la règle.

On verra de même que si n est supérieur à t^2 mais non supérieur à t^3, il faudra trois distributions pour amener la carte pensée au milieu du jeu (nous ne comptons pas le premier partage du jeu, lequel n'avait d'autre objet que de présenter les cartes à une personne pour qu'elle en choisît une en faisant connaître le tas où elle se trouvait). En continuant le même raisonnement, on voit que le nombre des distributions doit être égal à la première valeur de d qui rend t^d égal ou supérieur à n.

AVERTISSEMENT.

Si tu comprends bien le fondement de ce jeu, il te sera bien aisé de le faire en tout nombre de cartes, et en plusieurs différentes façons. Car la finesse consiste en cela que les cartes d'un même rang par une autre disposition se séparent et se mettent en divers rangs, ce que je veux éclaircir entièrement par un exemple facile. Prends 16 cartes et les dispose seulement en deux rangs, tellement qu'il y en ait 8 d'un côté et 8 de l'autre. Lors sachant en quel rang est la carte pensée, tu es assuré que c'est une des huit; partant prenant les cartes de chaque rang à part, et les disposant de telle sorte que tu en mettes une au premier rang, l'autre au second, puis une au premier, puis une au second, et ainsi jusques à la fin, tu vois bien que des huit cartes entre lesquelles est la carte pensée, il en tombe quatre d'un côté et quatre de l'autre. Donc

demandant lors en quel rang est la carte pensée tu es assuré que c'est une des quatre. Que si tu les ranges derechef ainsi que j'ai dit, de ces quatre-là il en tombera deux d'un côté et deux de l'autre; partant si tu sais lors en quel rang est la carte pensée, tu es assuré que c'est une des deux. Que si finalement tu les ranges encore comme il faut, de ces deux-là l'une se treuvera au premier rang, l'autre au second. Par conséquent, sachant lors en quel rang est la carte pensée, tu la devineras infailliblement.

Que si tu veux faire le jeu plus promptement, prenant les mêmes 16 cartes il te les faut disposer en quatre rangs, si bien qu'en chaque rang il y en ait 4; et après avoir su en quel rang est la carte pensée, disposant derechef les cartes en la façon ci-devant exposée, les quatre de ce rang-là se sépareront toutes, tellement qu'une tombera au premier rang, l'autre au second rang, l'autre au troisième, l'autre au quatrième. Partant tout incontinent tu peux deviner la carte pensée, sachant le rang où elle est alors.

Par ce même artifice quelques-uns font un autre jeu assez gentil, par lequel plusieurs cartes étant proposées à plusieurs personnes, on devine quelle carte chaque personne a pensée. Par exemple qu'il y ait quatre personnes, prends quatre cartes et les montrant à la première personne dis-lui qu'elle pense celle qu'elle voudra, et mets à part ces quatre cartes. Puis prends-en quatre autres et les présente de même à la seconde personne afin qu'elle pense celle qu'elle voudra; et fais encore tout de même avec la troisième et quatrième personne. Alors prends les quatre cartes de la première personne et les dispose en quatre rangs, et sur icelles range les quatre de la seconde personne, puis les quatre de la troisième, puis celles de la quatrième. Et présentant chacun de ces quatre rangs à chaque personne, demande à chacune en quel

rang est la carte par elle pensée; car infailliblement la carte de la première personne sera la première du rang où elle se treuvera, la carte de la seconde personne sera la seconde de son rang, la carte de la troisième sera la troisième en son rang, et la carte de la quatrième sera la quatrième du rang où elle se treuvera. Et ainsi des autres, s'il y a plus de personnes, et par conséquent plus de cartes. La raison de ceci est bien évidente, partant je ne m'y amuserai pas davantage.

Voilà ce que j'avais dit de ce jeu en la première impression de ce livre. Mais en cette seconde je veux donner une autre façon de le faire beaucoup plus belle que toutes les précédentes. Prends un nombre de cartes qui soit le produit de la multiplication de deux nombres prochains, c'est-à-dire dont l'intervalle soit l'unité, comme 12 qui se fait multipliant 3 par 4, ou 20 qui se fait multipliant 4 par 5, ou 30 qui se fait multipliant 5 par 6, ou 42 qui se fait multipliant 6 par 7; puis accouple lesdites cartes 2 à 2, et ordonne qu'on en pense deux ainsi accouplées comme elles sont. Alors ramasse toutes lesdites cartes ensemble, mettant toujours celles qui sont accouplées l'une après l'autre. Après tu rangeras toutes ces cartes en un carré long en cette sorte. Mets les trois premières par même ordre l'une à côté de l'autre, puis range la 4 sous la 1; puis mets la 5 à côté de la troisième, la 6 sous la 4, la 7 à côté de la 5, la huitième sous la 6, et continue à faire de la sorte jusqu'à ce qu'au rang de celles que tu mets à côté l'une de l'autre, il y ait un nombre de cartes égal au plus grand côté de ton carré long, et un autre nombre de cartes égal au moindre côté du même carré long au rang de celles que tu mets l'une sous l'autre. Comme si tu as pris 20 cartes, le plus grand côté sera 5 et le plus petit 4. Partant tu rangeras tes cartes en la façon exposée jusqu'à ce qu'il

y en ait 5 l'une à côté de l'autre, et 4 l'une sous l'autre, ce qui sera lorsque tu auras mis la 8 sous la 6. Cela fait, range à côté de la 4 la 9, la 10 et la 11 toutes de suite; puis mets la 12 sous la 9, et la 13 à côté de la 11, et la 14 sous la 12; après range tout de suite la 15, 16, 17 à côté de la 12, et finalement la 18, 19, 20 à côté de la 14.

Mais parce que je ne puis ici exprimer 20 cartes par nombres, prenons au lieu de 20 cartes 20 nombres, à savoir les 20 premiers depuis 1 jusques à 20. Et supposant que tu les aies accouplés au commencement 2 à 2, mettant ensemble 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8, et ainsi de suite, il est certain que suivant la règle donnée tu les rangeras comme tu vois qu'ils sont en la figure suivante :

A	1	2	3	5	7	B
C	4	9	10	11	13	D
E	6	12	15	16	17	F
G	8	14	18	19	20	H

Cela fait, tu demanderas en quel rang, ou en quels rangs, sont les deux nombre pensés, prenant les rangs d'un côté à l'autre, non pas de haut en bas, le premier étant AB, le second, CD, le troisième EF, le quatrième GH. Lors on te dira que les deux nombres pensés sont en un même rang, ou en deux rangs différents, spécifiant lesdits rangs. S'ils sont en un même rang, tiens pour règle assurée que ce sont deux nombres l'un à côté de l'autre, dont le premier tient le même rang dans son propre rang que tient ce rang même entre les autres rangs : comme si les deux nombres

pensés sont au troisième rang, le premier d'iceux est le troisième de ce rang-là et les nombres pensés sont 15 et 16. Tu remarqueras donc attentivement les nombres 1 et 2 du premier rang, les nombres 9 et 10 du second rang, 15 et 16 du troisième, 19 et 20 du quatrième; car je les appelle les clefs du jeu, qui servent non-seulement pour deviner les deux nombres pensés lorsqu'ils sont tous deux en un même rang, mais aussi lorsqu'ils sont en deux divers rangs. D'autant qu'en ce cas, aussitôt qu'on t'a manifesté les deux rangs où sont les deux nombres pensés, il te faut prendre la clef du rang le plus haut, et sous le premier nombre de ladite clef tu trouveras au rang d'en bas un des deux nombres pensés, et à côté du second nombre de la clef, en égale distance, tu trouveras l'autre nombre pensé. Par exemple, si les deux nombres pensés sont 7 et 8, on te dira qu'ils sont au premier et au quatrième rang: prends donc la clef du plus haut de ces deux rangs, à savoir du premier, laquelle est 1 et 2, et descends droit depuis 1 jusques au quatrième rang, tu trouveras 8 un des nombres pensés. Après cherche à côté de 2 un nombre autant éloigné de 2 que 8 est éloigné de 1 : tu trouveras 7 l'autre nombre pensé. Que si l'on te dit que les nombres pensés sont au second et au quatrième rang, tu prendras la clef du second qui est 9 et 10, et descendant droit depuis 9 jusques au quatrième rang, tu trouveras 14 un des nombres pensés; et si tu prends à côté de 10 un nombre autant éloigné de 10 que 14 de 9, tu trouveras l'autre nombre pensé qui est 13.

La démonstration de ceci a même fondement que les règles données ci-devant; car il est évident que des nombres accouplés 2 à 2, il n'y en a jamais qu'un couple qui se treuve au même rang; de tous les autres l'un (des nombres) est toujours en un rang et l'autre en un autre. Tout ce à quoi il faut bien prendre garde, c'est à

disposer lesdits nombres comme j'ai enseigné. Et pour mieux te faire comprendre cet ordre, j'ai mis ici les deux figures suivantes, l'une de 30 nombres, l'autre de 42:

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

1	2	3	5	7	9	11
4	13	14	15	17	19	21
6	16	23	24	25	27	29
8	18	26	31	32	33	35
10	20	28	34	37	38	39
12	22	30	36	40	41	42

Ce jeu se peut faire non pas seulement avec une personne, mais encore avec plusieurs en même temps. Car quand ils seront quatre ou cinq dont chacun pensera en même temps deux de ces cartes accouplées, après que tu les auras rangées en un carré long tu demanderas à chacun, l'un après l'autre, en quels rangs sont celles qu'il a pensées, et les devineras par la règle donnée.

PROBLÈME XIX

Deviner de plusieurs cartes celle que quelqu'un aura pensée.

PRENEZ un nombre quelconque de cartes et montrez-les par ordre à celui qui en voudra penser une; en les lui montrant vous en compterez secrètement le nombre, et vous lui direz de retenir le rang de la carte qu'il a pensée, c'est-à-dire si c'est la première, ou la seconde ou la troisième, etc. Puis vous ramasserez les cartes dans le même ordre que vous les avez présentées, et vous les mettrez sous les cartes que vous n'avez pas employées, s'il y en a. Alors vous annoncerez que comptant les cartes d'une certaine façon vous ferez tomber la carte pensée sous tel nombre que vous direz, soit le nombre des cartes que vous avez employées, soit un nombre plus grand : pour y réussir, vous demanderez le numéro du rang qu'occupait la carte pensée, et commençant à compter les cartes par la fin, vous donnerez à la dernière carte ce même numéro, 7 par exemple, et aux suivantes les numéros suivants 8, 9, 10, etc., jusqu'à ce que vous soyez arrivé au numéro exprimé par le nombre des cartes que vous avez primitivement employées; la carte qui recevra ce numéro sera la carte pensée. Si vous avez annoncé un nombre plus grand que celui des cartes employées, il

vous suffira d'augmenter d'autant le numéro du rang de la carte pensée, et de partir de la somme obtenue, en comptant les cartes à partir de la fin.

DÉMONSTRATION.

Supposons que la carte pensée soit la septième et qu'on emploie 20 cartes. On arriverait de la carte pensée à la dernière en nommant successivement les cartes

7, 8, 9, 10, ..., 17, 18, 19, 20,

ou en ajoutant un nombre quelconque, 3 par exemple,

10, 11, 12, 13, ..., 20, 21, 22, 23;

donc on arrivera aussi de la dernière à la carte pensée en nommant les mêmes nombres dans le même ordre : la carte pensée tombera sous le nombre 20 dans le premier cas, et sous le nombre 23 dans le second.

PROBLÈME XX

De plusieurs nombres par ordre commençant par l'unité et disposés en rond, deviner lequel on aura pensé.

SOIENT par exemple les nombres de 1 à 12.

1

12 2

11 3

10 4

9 5

8 6

7

Une personne ayant pensé un nombre, 5 par exemple, dites-lui d'en toucher un autre, et supposons que ce soit 9. Pour arriver de 5 à 9 directement on doit compter 5, 6, 7, 8, 9; donc on arrivera de 9 à 5, en comptant à rebours, c'est-à-dire en repassant par les mêmes nombres 9, 8, 7, 6, 5, et en les appelant aussi 5, 6,

7, 8, 9. Quand on est arrivé de 9 à 5, si l'on fait un tour de cadran dans le même sens, c'est-à-dire si l'on compte 12 nombres de plus, on reviendra au même nombre 5 ; et cela revient à compter à rebours, à partir de 9, depuis 5 jusqu'à 9+12 ou 21.

Si au contraire on avait pensé 9, et qu'on eût touché 5, on arriverait de 9 à 5 dans le sens direct en comptant

9, 10, 11, 12, 12+1, 12+2, 12+3, 12+4, 12+5 ou 17 ;

donc on arriverait de 5 à 9 en parcourant le cercle en sens contraire et en comptant les mêmes nombres.

On conclut de là cette manière de deviner le nombre pensé : *Au nombre touché ajoutez le plus grand nombre du cercle, et dites à la personne qu'à partir du nombre qu'elle touche, inclusivement, elle compte à rebours sur le cercle depuis le nombre qu'elle a pensé jusqu'à la somme que vous avez obtenue, et en touchant à mesure chacun des nombres du cercle : le nombre sur lequel elle s'arrêtera sera le nombre pensé.*

REMARQUE. Il est évident qu'au nombre touché on peut ajouter plusieurs fois le plus grand nombre du cercle, comme aussi à la série des nombres à compter on peut substituer toute autre série qui contienne la même quantité de nombres.

On fait le même jeu avec des cartes, qu'on peut retourner quand on connaît la disposition qu'on leur a donnée, ce qui rend le jeu plus piquant.