§ 3. — *Méthode des horizontales et des verticales.*

Les méthodes précédentes ne s'appliquent qu'aux carrés impairs ; nous allons appliquer celle-ci aux carrés pairs.

Dans la progression 1, 2, 3, 4,... r, deux nombres également distants des extrêmes et les deux extrêmes eux-mêmes sont dits nombres *complémentaires*.

Il en est de même des termes de la progression 0, r, $2r$, $3r$,...

Deux horizontales sont dites *correspondantes* lorsqu'elles sont à la même distance des deux côtés horizontaux du carré. La même dénomination s'applique à deux verticales également distantes des deux côtés verticaux du carré. Dans une ligne, les cases extrêmes ainsi que deux cases également distantes de celles-là sont des cases *correspondantes*.

Pour former le premier carré, on remplit d'abord la première diagonale des nombres 1, 2, 3,... r, les cases correspondantes étant occupées par des nombres complémentaires ; puis on remplit la seconde avec les complémentaires des nombres qui remplissent la première, en les

PREMIER CARRÉ DE 6.

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

plaçant dans les cases horizontales correspondantes ; ensuite on remplit les bandes verticales chacune avec le nombre qui s'y trouve déjà et son complémentaire, de manière que ces deux nombres y soient le même nombre de fois, et quand on a rempli une verticale, on remplit sa correspondante en y inscrivant les compléments des nombres qui sont dans la première.

Pour former le second carré, on remplit d'abord la première diagonale des nombres 0, r, $2r$... suivant la règle précédente ; puis on remplit la seconde avec les complémentaires des nombres qui remplissent la première, en les plaçant dans les cases verticales correspondantes ; ensuite on remplit les bandes horizontales, comme on a rempli les bandes verticales du premier carré, mais en y observant une règle spéciale.

SECOND CARRÉ DE 6.

0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

Si une horizontale du premier carré et sa correspondante contiennent verticalement deux nombres complémentaires, il faut dans le second carré mettre le même nombre dans chaque horizontale aux cases occupées par ces deux nombres complémentaires. Quand on a satisfait à cette condition, on achève de remplir les bandes horizontales, et toujours de manière que les bandes correspondantes contiennent verticalement des nombres complémentaires.

Ainsi, dans le premier carré de 6, la première horizontale et sa correspondante donnant 5 et 2 à la seconde verticale, on met dans le second carré le même nombre 30 à la seconde et à la cinquième case de la première horizontale ; et par suite le même nombre 0 sera placé aux mêmes cases dans l'horizontale correspondante. Dans la seconde horizontale du premier carré et sa correspondante, on trouve 4 et 3 à la troisième verticale ; on mettra donc dans le second carré le même nombre 24 à la troisième et à la quatrième case de la seconde horizontale. Enfin, dans la troisième et la quatrième horizontale du premier carré, on trouve 6 et 1 à la première verticale, et l'on met dans le second carré le même nombre 18 à la première et à la dernière case de la troisième horizontale. On achève alors de remplir les horizontales suivant la règle ; et en faisant les sommes on a le carré magique.

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Formons de la même manière le carré magique 10. Le premier carré étant formé comme on le voit ici, et les diagonales étant remplies dans le second carré, on prend dans le premier la première horizontale et sa correspondante, et l'on voit que les nombres 9, 8, 4, 7, 3, 2 de la première correspondent à leurs complémentaires dans la seconde ; on mettra donc dans la première horizontale du second carré le même

nombre 90 ou le même nombre 0 aux cases correspondantes de cette ligne ; et comme il y a déjà deux 0 dans la ligne, on mettra une fois deux 0, et deux fois deux 90. La seconde horizontale du premier carré a sa correspondante constituée de la même manière qu'elle ; et il en est de même de la cinquième et de la sixième. Mais à la troisième et à la huitième, les premiers nombres 10 et 1 étant complémentaires, on

PREMIER CARRÉ DE 10.

1	9	8	4	6	5	7	3	2	10
10	2	3	7	6	5	4	8	9	1
10	2	3	4	5	6	7	8	9	1
1	9	8	4	5	6	7	3	2	10
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
1	9	8	4	6	5	7	3	2	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	2	3	7	6	5	4	8	9	1
1	2	3	7	6	5	4	8	9	10

placera le même nombre 70 ou le même nombre 20 aux deux extrémités de la troisième horizontale du second carré. Enfin, dans la quatrième et la septième horizontale du premier carré, on trouve les nombres complémentaires 5 et 6 à la cinquième verticale ; on mettra donc le

même nombre 30 ou le même nombre 60 dans les cases du milieu de la quatrième horizontale du second carré.

SECOND CARRÉ DE 10.

0	90	90	0	90	0	0	90	90	0
80	10	10	80	80	80	80	10	10	10
70	20	20	20	70	70	70	20	20	70
30	60	60	30	30	30	30	60	60	60
50	50	50	40	40	40	40	50	50	40
40	40	40	50	50	50	50	40	40	50
60	30	30	60	60	60	60	30	30	30
20	70	70	70	20	20	20	70	70	20
10	80	80	10	10	10	10	80	80	80
90	0	0	90	0	90	90	0	0	90

La règle spéciale étant observée à l'égard de toutes les horizontales qui en exigent l'application, on achève, suivant la règle générale, de remplir chaque horizontale des deux nombres complémentaires qu'elle doit contenir, de manière que chacun d'eux s'y trouve le même nombre de fois et que les cases homologues des horizontales correspondantes soient remplies de nombres complémentaires. On fait ensuite les sommes et l'on a le carré magique suivant :

1	99	98	4	96	5	7	93	92	10
90	12	13	87	86	85	84	18	19	11
80	22	23	24	75	76	77	28	29	71
31	69	68	34	35	36	37	63	62	70
60	59	58	47	45	46	44	53	52	41
50	49	48	57	55	56	54	43	42	51
61	39	38	64	66	65	67	33	32	40
21	72	73	74	25	26	27	78	79	30
20	82	83	17	16	15	14	88	89	81
91	2	3	97	6	95	94	8	9	100

Pour troisième exemple, nous donnerons la construction d'un carré magique de 8.

PREMIER CARRÉ DE 8.

7	6	1	4	5	8	3	2
7	3	8	5	4	1	6	2
2	6	1	5	4	8	3	7
2	6	8	4	5	1	3	7
7	6	8	4	5	1	3	2
2	3	1	4	5	8	6	7
2	3	8	5	4	1	6	7
7	3	1	5	4	8	6	2

SECOND CARRÉ DE 8.

8	48	48	8	8	48	48	8
56	0	0	56	0	56	0	56
40	16	40	16	16	40	16	40
24	24	24	32	32	32	32	24
32	32	32	24	24	24	24	32
16	40	16	40	40	16	40	16
0	56	56	0	56	0	56	0
48	8	8	48	48	8	8	48

CARRÉ MAGIQUE DE 8.

15	54	49	12	13	56	51	10
63	3	8	61	4	57	6	58
42	22	41	21	20	48	19	47
26	30	32	36	37	33	35	31
39	38	40	28	29	25	27	34
18	43	17	44	45	24	46	23
2	59	64	5	60	1	62	7
55	11	9	53	52	16	14	50

Dans les deux premiers carrés, on n'a pas rempli les diagonales en y plaçant par ordre les nombres 1, 2, 3,.... 0, *r*, 2 *r*,.... ; mais on y a toutefois placé ces nombres de manière que deux nombres complémentaires y occupent toujours deux cases correspondantes.

Dans les carrés pairement pairs, on peut faire en sorte que les bandes horizontales correspondantes du premier carré soient identiques deux à deux ; alors on est dispensé d'avoir égard à la règle spéciale pour la construction du second carré qui reste seulement soumis pour les bandes horizontales aux lois générales de la construction du premier par bandes verticales. En voici un exemple :

PREMIER CARRÉ DE 8.

8	2	3	5	4	6	7	1
1	7	6	4	5	3	2	8
1	7	6	4	5	3	2	8
8	2	3	5	4	6	7	1
8	2	3	5	4	6	7	1
1	7	6	4	5	3	2	8
1	7	6	4	5	3	2	8
8	2	3	5	4	6	7	1

La disposition spéciale que nous avons donnée aux lignes horizontales et aux lignes verticales dans les deux premiers carrés, disposition dont on aperçoit facilement la loi, donne les carrés magiques pairs tels que les rapportent les anciens auteurs ; comme ces carrés avaient été pris des talismans hébraïques, le nombre 1 est toujours placé à droite ; nous le mettrons à gauche, en faisant connaître la règle que Moscopule

SECOND CARRÉ DE 8.

0	56	56	0	0	56	56	0
48	8	8	48	48	8	8	48
40	16	16	40	40	16	16	40
24	32	32	24	24	32	32	24
32	24	24	32	32	24	24	32
16	40	40	16	16	40	40	16
8	48	48	8	8	48	48	8
56	0	0	56	56	0	0	56

CARRÉ MAGIQUE DE 8.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

a donnée pour construire de cette manière les carrés pairement pairs (*a*). Voici comment il faut procéder :

Inscrivez dans un premier carré et par bandes horizontales les nombres consécutifs qu'il faut disposer dans un carré pour faire un carré magique.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Prenez un second carré, et inscrivez-y d'abord dans les diagonales les nombres qui sont dans les diagonales du premier (le lecteur est prié de faire la figure, ou de suivre l'explication sur le carré magique précédent supposé retourné de droite à gauche).

Puis vous y inscrirez les autres nombres en conservant les uns dans les mêmes cases, et en échangeant les autres comme il sera dit plus loin.

Dans la première horizontale vous conserverez 1, vous échangerez 2 et 3, vous conserverez 4 et 5, vous échangerez 6 et 7, et ainsi de suite de 2 en 2, jusqu'au dernier nombre que vous conserverez.

(*a*) Moscopule n'a pas donné de règle pour les carrés pairement impairs, quoiqu'il donne deux exemples de ces carrés.

Dans la deuxième bande horizontale, c'est le contraire : vous échangez le premier nombre, vous conservez les deux suivants, vous échangez les deux nombres qui viennent après, et ainsi de suite de 2 en 2 jusqu'au dernier nombre que vous échangez. Vous traiterez la troisième horizontale comme la seconde, la quatrième et la cinquième comme la première, la sixième et la septième comme la seconde, et ainsi de suite de 2 en 2 bandes ; et l'opération sera achevée quand vous l'aurez faite sur les deux bandes du milieu.

Quant aux nombres qui ne doivent pas rester à leurs cases, on les échange avec ceux qui sont placés dans les bandes horizontales correspondantes à la même distance de la case de droite que les premiers le sont de la case de gauche, ou *vice versa* ; ainsi, dans le carré de 8, on échange 2 et 63, 3 et 62, 6 et 59, 7 et 58 ; puis 9 et 56, 12 et 53, 13 et 52, etc. La somme de deux nombres échangés est égale à la somme des extrêmes de la progression qui forme le carré, car ces deux nombres sont toujours à égale distance des extrêmes.

On peut encore construire les carrés magiques pairement pairs par une méthode qui dispense de faire deux carrés.

1		3			6		8
	10		12	13		15	
17		19			22		24
	26		28	29		31	
	34		36	37		39	
41		43			46		48
	50		52	53		55	
57		59			62		64

On remplit les cases horizontales de 2 en 2 en mettant dans chacune

le nombre correspondant à son rang, avec cette exception qu'on ne remplit pas les deux cases du milieu d'une bande quand on a rempli la première case de la bande, et qu'on les remplit dans la bande suivante ; de plus, les deux bandes horizontales du milieu doivent être remplies de la même manière.

Lorsqu'on a placé le dernier nombre r^2, ici 64, on recommence à partir de ce nombre, et de droite à gauche, à compter 1, 2, 3, 4,... et l'on inscrit ceux de ces nombres qui correspondent à des cases vides. On obtient ainsi le carré magique suivant :

1	63	3	61	60	6	58	8
56	10	54	12	13	51	15	49
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	14	52	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

Voici le carré de 4 construit de la même manière :

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Malgré la longueur de cette addition au problème XXI de Bachet, nous n'avons pu qu'effleurer la question des carrés magiques ; le lecteur qui s'y intéresserait pourra consulter les Mémoires de l'Académie des sciences, tome V, et années 1705, 1710, 1750 ; les Mémoires des Savants étrangers, tome IV, et différents travaux d'Euler recueillis dans les *Commentationes Arithmeticæ*. Outre l'ouvrage de Diego Palomino dont nous avons parlé précédemment, nous citerons :

Traité des Carrés sublimes, par Poignard ;

De Quadratis magicis commentatio, auctore C. Mollweide.

On trouve encore des renseignements sur les carrés magiques dans les ouvrages suivants :

Du Royaume de Siam, par de La Loubère ;

Arithmologia, par le P. Kircher ;

Nouveaux Eléments de Géométrie (par MM. de Port-Royal) ;

Nouveaux Eléments de Mathématiques, par Jean Prestet ;

Récréations mathématiques, par Ozanam.

PROBLÈME XXII

Si deux ont proposé entre eux de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse point un nombre préfix, pour voir, ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront, qui arrivera plus tôt à quelque nombre prescrit, faire si bien qu'on arrive toujours le premier au nombre destiné.

Soit 100 le nombre destiné, et que le nombre préfix qu'on ne peut passer soit 10, si bien qu'il soit permis de dire 10 ou tout nombre moindre. Par exemple, le premier die 7, le second 10, qui font 17, puis le premier prenne 5, qui font 22, et le second prenne 8, qui font 30, et ainsi toujours l'un après l'autre alternativement prenne un nombre à plaisir, ne surpassant point 10 ; et qu'on ajoute toujours les nombres qu'ils diront, jusqu'à ce qu'on parvienne à 100, et que celui qui dira le nombre accomplissant 100 soit réputé pour vainqueur. Or, pour vaincre infailliblement, ajoute 1 au nombre qu'on ne peut passer, qui est ici 10, tu auras 11 ; et ôte continuellement 11 du nombre destiné 100, tu auras ces nombres :

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1

(c'est-à-dire à partir de 1 tous les multiples de 11 plus 1). Partant, si tu commences à dire 1, quel nombre que ton adversaire die, il ne pourra t'empêcher de parvenir ensuite à 12, et de la même ma-