Malgré la longueur de cette addition au problème XXI de Bachet, nous n'avons pu qu'effleurer la question des carrés magiques ; le lecteur qui s'y intéresserait pourra consulter les Mémoires de l'Académie des sciences, tome V, et années 1705, 1710, 1750 ; les Mémoires des Savants étrangers, tome IV, et différents travaux d'Euler recueillis dans les *Commentationes Arithmeticæ*. Outre l'ouvrage de Diego Palomino dont nous avons parlé précédemment, nous citerons :

Traité des Carrés sublimes, par Poignard ;

De Quadratis magicis commentatio, auctore C. Mollweide.

On trouve encore des renseignements sur les carrés magiques dans les ouvrages suivants :

Du Royaume de Siam, par de La Loubère ;

Arithmologia, par le P. Kircher ;

Nouveaux Eléments de Géométrie (par MM. de Port-Royal) ;

Nouveaux Eléments de Mathématiques, par Jean Prestet ;

Récréations mathématiques, par Ozanam.

PROBLÈME XXII

Si deux ont proposé entre eux de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse point un nombre préfix, pour voir, ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront, qui arrivera plus tôt à quelque nombre prescrit, faire si bien qu'on arrive toujours le premier au nombre destiné.

Soit 100 le nombre destiné, et que le nombre préfix qu'on ne peut passer soit 10, si bien qu'il soit permis de dire 10 ou tout nombre moindre. Par exemple, le premier die 7, le second 10, qui font 17, puis le premier prenne 5, qui font 22, et le second prenne 8, qui font 30, et ainsi toujours l'un après l'autre alternativement prenne un nombre à plaisir, ne surpassant point 10 ; et qu'on ajoute toujours les nombres qu'ils diront, jusqu'à ce qu'on parvienne à 100, et que celui qui dira le nombre accomplissant 100 soit réputé pour vainqueur. Or, pour vaincre infailliblement, ajoute 1 au nombre qu'on ne peut passer, qui est ici 10, tu auras 11 ; et ôte continuellement 11 du nombre destiné 100, tu auras ces nombres :

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1

(c'est-à-dire à partir de 1 tous les multiples de 11 plus 1). Partant, si tu commences à dire 1, quel nombre que ton adversaire die, il ne pourra t'empêcher de parvenir ensuite à 12, et de la même ma-

nière à 23, puis à 34, à 45, à 56, à 67, à 78, à 89, et finalement à 100. Dont il appert que si les deux qui jouent à ce jeu savent tous deux la finesse, infailliblement celui qui commence emportera la victoire. Toutefois, ce n'est pas règle générale, car si l'on changeait le nombre destiné, à savoir 100, ou le nombre qu'on ne peut passer, à savoir 10, la chose pourrait aller autrement, comme je déclarerai ci-après.

AVERTISSEMENT.

On peut apporter de la diversité en la pratique de ce jeu. Premièrement à cause que le nombre destiné pour y parvenir peut être quel nombre que l'on voudra choisir : par exemple, au lieu de 100, on se pourrait proposer 120, et alors les nombres qu'il faudrait remarquer seraient 109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10 (c'est-à-dire à partir de 10 les multiples de 11 plus 10), où il appert aussi que celui qui commencerait gagnerait infailliblement.

Secondement, pour ce que le nombre préfix que l'on ne peut passer se peut aussi changer à plaisir, par exemple, voulant toujours parvenir à 100, on pourrait, pour le nombre préfix, choisir 8, et alors les nombres qu'il faudrait remarquer seraient

91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 19

(c'est-à-dire à partir de 1 les multiples de 9 plus 1); et celui qui commencerait gagnerait aussi. Mais si l'on prenait 9 pour le nombre préfix, les nombres à remarquer seraient

90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10;

partant, il appert que celui qui commencerait pourrait perdre si l'autre entendait le secret du jeu, d'autant que le premier ne

pouvant passer 9, ne pourrait parvenir à 10, et ne pouvant dire moins que 1, il ne pourrait empêcher que l'autre ne parvînt à 10; et ainsi des autres nombres 20, 30, etc., jusqu'à 100.

Mais il est certain que tous ces jeux ne se font pas ordinairement avec ceux qui les savent déjà, ains avec ceux qui les ignorent. Partant, si ton adversaire ne sait pas la finesse du jeu, tu ne dois pas prendre toujours tous les nombres remarquables et nécessaires pour gagner infailliblement; car faisant ainsi tu découvriras trop l'artifice, et s'il est homme de bon esprit il remarquera tout incontinent ces nombres-là, voyant que tu choisis toujours les mêmes; mais au commencement tu peux dire à la volée des autres nombres jusqu'à ce que tu approches du nombre destiné, car alors tu pourras subtilement accrocher quelqu'un des nombres nécessaires, de peur d'être surpris.

PROBLÈME XXIII

Étant proposé quelque nombre d'unités distinguées entre elles, les disposer et ranger par ordre en telle sorte que rejetant toujours la neuvième, ou la dixième, ou la tantième que l'on voudra jusques à un certain nombre, les restantes soient celles que l'on voudra.

On a accoutumé de proposer ce problème en cette facon : Quinze chrétiens et quinze Turcs se treuvent sur mer dans un même navire, et s'étant élevé une terrible tourmente, le pilote dit qu'il est nécessaire de jeter dans la mer la moitié des personnes qui sont en la nef pour sauver le reste. Or, cela ne se peut faire que par sort ; partant on est d'accord que se rangeant tous par ordre, et comptant de 9 en 9 on jette chaque neuvième dans la mer jusqu'à ce que, de 30 qu'ils sont, il n'en demeure que 15 ; on demande comment il les faudrait disposer pour faire que le sort tombât sur les 15 Turcs, sans perdre aucun des chrétiens.

En comptant de 9 en 9 une suite de 30 objets placés les uns à la suite des autres, 30 zéros par exemple, on tombe sur les objets dont les rangs sont 9, 18, 27.

Qu'on supprime ces objets, puis que l'on continue à compter de 9 en 9, en prenant d'abord les trois objets qui suivent le 27e

et en revenant au commencement de la série qui ne contient plus que 27 objets, on tombera sur ceux dont les rangs sont 6, 15, 24, dans la nouvelle série.

Ces objets étant supprimés, si l'on opère de même pour la nouvelle série de 24 objets, on tombera sur les objets dont les rangs sont 6, 15 et 24 dans cette série.

En les supprimant, on aura une nouvelle série de 21 objets dont on sera conduit à supprimer ceux dont les rangs sont 9 et 18, ce qui la réduira à 19 objets, dont on supprimera ensuite, par le même calcul, ceux dont les rangs sont 6 et 15. Enfin, la série étant réduite alors à 17 objets, on y supprimera les objets placés aux rangs 5 et 14, et il restera 15 objets. Si l'on examine alors quels rangs les objets restants occupaient dans la première série, on trouve que ce sont les suivants :

1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, ., 13, 14, 15, ., 17, .., 20,
21, ..., 25, .., 28, 29, ..

De là la solution donnée par Bachet :

Pour faire ceci promptement, remarque ces deux vers :

Mort, tu ne falliras pas
En me livrant le trépas!

et prends garde seulement aux voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, t'imaginant que la première, *a*, vaut 1, la seconde, *e*, vaut 2, la troisième, *i*, vaut 3, la quatrième, *o*, vaut 4, et la cinquième, *u*, vaut 5. Et d'autant qu'il faut commencer par les chrétiens, en la première syllabe *mort*, la voyelle *o* te montre qu'il faut en premier lieu mettre 4 chrétiens ; en la seconde syllabe *tu*, la voyelle *u* te

montre qu'il faut après ranger 5 Turcs; ensuite *ne* signifie 2 chrétiens, *fal* un Turc, *li* 3 chrétiens, *ras* un Turc, *pas* un chrétien, *en* 2 Turcs, *me* 2 chrétiens, *li* 3 Turcs, *vrant* un chrétien, *le* 2 Turcs, *tré* 2 chrétiens, *pas* un Turc.

AVERTISSEMENT.

Il est aisé à voir que ce jeu se peut pratiquer fort diversement. Car premièrement le nombre des unités peut être tel que l'on veut, par exemple au lieu de 30 on en pourrait mettre 40, 50, 60, ou plus ou moins. Secondement, au lieu de rejeter toujours la neuvième, on peut rejeter la sixième, la dixième, ou la tantième que l'on voudra.

Finalement, au lieu d'en rejeter autant qu'il en demeure, on peut n'en rejeter que tant peu que l'on voudra; tellement qu'il en demeure davantage, ou bien en rejeter si grand nombre qu'il en demeure beaucoup moins. La solution se trouverait toujours comme il a été précédemment expliqué.

Or, comme j'ai touché en la préface de cette œuvre, c'est par cette invention que Josèphe se sauva très-subtilement dans Jotapata, ainsi qu'on recueille évidemment des paroles d'Hegesippus touchant ce fait au livre III de la *Guerre de Hierusalem*. Et bien qu'il ne particularise pas assez cette action, toutefois par ce qu'il dit nous nous pouvons imaginer comme le tout se passa. Car, ainsi qu'il raconte, il y eut quarante soldats qui se sauvèrent avec Josèphe dans la caverne, si bien qu'à compter ledit Josèphe, ils étaient en tout 41. Partant, supposons qu'il ordonna que comptant de 3 en 3 on tuerait toujours le troisième, il est certain que, procédant de la sorte, tu trouveras qu'il faut que Josèphe se

mît le trente-unième après celui par lequel on commençait à compter, au cas qu'il visât à demeurer en vie lui tout seul. Mais s'il voulut sauver un de ses compagnons, il le mit en la seizième place, et s'il en voulut sauver encore un autre, il le mit en la trente cinquième place.

PROBLÈME XXIV

Plusieurs nombres inégaux étant proposés, diviser chacun d'iceux en deux parties, et treuver deux nombres desquels l'un multipliant une desdites parties, et l'autre multipliant l'autre, la somme des deux produits se treuve partout la même.

Considérons d'abord deux nombres a et b, le premier étant plus grand que le second ; soient x et $a - x$ les deux parties de a, y et $b - y$ les deux parties de b, z et t les deux multiplicateurs, le premier étant plus grand que le second.

On doit avoir :

$$x z + t (a - x) = z y + t (b - y);$$

on en tire

$$x = y - \frac{(a - b) t}{z - t} \qquad (1),$$

égalité qui détermine x quand on a choisi y. On n'oubliera pas que x et y désignent les parties de a et de b, qui sont multipliées par le plus grand des deux multiplicateurs.

Il faut que y, qui est une partie de b, soit pris plus grand que $\frac{(a - b) t}{z - t}$, ce qui exige qu'on ait $\frac{(a - b) t}{z - t} < b$; on en conclut qu'il faudra prendre

$$z > \frac{a t}{b} \qquad (2).$$

Ces deux formules résolvent la question.

Soient les deux nombres 18 et 40, et prenons $t = 3$; d'après la formule (2), il faut prendre $z > \frac{40 \times 3}{18}$ ou $> \frac{20}{3}$: soit $z = 14$; la quantité $\frac{(a - b) t}{z - t}$ donne $\frac{22.3}{11}$ ou 6.

Prenons alors dans 18 un nombre plus grand que 6, 10 par exemple, ce sera le nombre y, et le nombre correspondant de 40 sera $10 - 6$ ou 4.

Les deux parties de 18 sont 10 et 8 qui multipliées respectivement par 14 et 3 donnent 140 et 24 dont la somme est 164.

Les deux parties de 40 sont 4 et 36 qui multipliées respectivement par 14 et 3 donnent 56 et 108 dont la somme est aussi 164.

Au lieu de prendre $z = 14$, prenons $z = 7$: la quantité $\frac{(a - b) t}{z - t}$ donne $\frac{22.3}{4}$ ou $16 \frac{1}{2}$.

Décomposons alors 18 en 17 et 1 ; la première partie de 40 sera

$$17 - 16 \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}, \text{ et l'autre } 39 \frac{1}{2}.$$

En faisant les multiplications par 7 et 3, et ajoutant les produits, on trouve 122 de part et d'autre.

Sachant résoudre le problème pour deux nombres, il est facile de le résoudre pour tant de nombres qu'on voudra. Soient les trois nombres 18, 40 et 50.

Prenons $t = 3$; pour déterminer une limite inférieure de z, il faut évidemment opérer avec le plus grand nombre, et prendre $z > \frac{50.3}{18}$ ou $8 : \frac{1}{3}$: nous prendrons $z = 10$.

La quantité $\frac{(a-b)t}{z-t}$ devient pour le second nombre $\frac{22.3}{7}$ ou $9\frac{3}{7}$, et pour le troisième nombre $\frac{32.3}{7}$ ou $13\frac{5}{7}$: prenons donc dans 18 un nombre supérieur à $13\frac{5}{7}$, par exemple 15 ; les parties correspondantes des autres nombres seront $15-9\frac{3}{7}$ ou $5\frac{4}{8}$ et $15-13\frac{5}{7}$ ou $1\frac{2}{7}$: en sorte que les trois nombres seront décomposés en

$$15 \text{ et } 3,\ 5\frac{4}{7} \text{ et } 34\frac{3}{7},\ 1\frac{2}{7} \text{ et } 48\frac{5}{7}.$$

En multipliant les deux parties de chaque nombre par 10 et 3, et faisant la somme des produits, on trouve 159 pour chacun des trois nombres.

Le problème que nous venons de résoudre se propose ordinairement sous la forme d'une vente :

Trois personnes arrivent au marché ayant respectivement 10 mesures, 12 mesures et 15 mesures de graine ; elles vendent leurs marchandises aux mêmes prix, et elles en retirent chacune la même somme : on demande comment la vente a été faite.

Mais si les objets mis en vente ne peuvent être fractionnés, il faut résoudre le problème en nombres entiers, et c'est ce dont Bachet s'occupe exclusivement, en prenant pour exemple trois femmes qui vendent au marché, l'une 20 pommes, l'autre 30 et la troisième 40.

La formule (1) donnera pour x un nombre entier, si y étant pris entier, la quantité $\frac{(a-b)t}{z-t}$ est un nombre entier.

Or, il suffit de chercher les solutions où z et t sont premiers entre eux ; car si le problème est résolu par mz' et mt', il le sera évidemment par z' et t', et réciproquement. Dans ce cas, $z-t$ est premier avec t ; et il faut alors et il suffit que $z-t$ divise l'autre facteur $a-b$ du numérateur de la fraction $\frac{(a-b)t}{z-t}$, pour que celle-ci donne un nombre entier. En sorte que si $a-b$ est un nombre premier, il faudra qu'on ait $z-t=1$ ou $z=t+1$.

Cela posé, revenons à la formule fondamentale $x = y - \frac{(a-b)t}{z-t}$.

Ici y est au plus égal à $b-1$, et en posant

$$\frac{(a-b)t}{z-t} < b-1$$

on trouve qu'il faut prendre

$$z > \frac{a-1}{b-1}t.$$

Soient, par exemple, les trois nombres 31, 32, 37, dont les différences $32-31$, $37-31$ sont premières entre elles. Il faut prendre $z > \frac{36}{30}t$ ou $\frac{6}{5}t$, et chercher les solutions où $z-t=1$:

Pour $t=1$, on a $z=2$,
pour $t=2$, on a $z=3$,
pour $t=3$, on a $z=4$,
pour $t=4$, on a $z=5$,

et il n'y a pas d'autres solutions de cette espèce.

Quant aux trois nombres 20, 30 et 40 choisis par Bachet, il faut prendre $z > \frac{39}{19}t$.

Les différences 30 — 20 ou 10, 40 — 20 ou 20 ayant pour diviseurs communs 2, 5 et 10, on pourrra prendre

$$t = 1 \text{ et } z = 3$$
$$t = 1 \text{ et } z = 6$$
$$t = 1 \text{ et } z = 11$$
$$t = 2 \text{ et } z = 7$$
$$t = 3 \text{ et } z = 8$$
$$t = 3 \text{ et } z = 13, \text{ etc.},$$

en se bornant aux solutions où z et t sont premiers entre eux. Le reste s'achèvera avec la formule (1).

Remarque. Si $z - t = d$, on devra avoir

$$t + d > \frac{a-1}{b-1} t,$$

inégalité d'où l'on tire $t < \frac{(b-1)d}{a-b}$.

Ainsi dans l'exemple précédent, on doit avoir $t < \frac{19.10}{20}$ ou $t < 9\frac{1}{2}$; donc 9 sera la plus grande valeur que l'on devra donner à t si l'on continue les essais précédents pour trouver les autres solutions.

PROBLÈME XXV

De trois choses et de trois personnes proposées deviner quelle chose aura été prise par chaque personne.

Imagine-toi que des trois personnes l'une est première, l'autre est seconde, l'autre est troisième; et semblablement des trois choses fais-en une première, l'autre seconde, l'autre troisième. Puis prenant 24 jetons, donne 1 jeton à la première personne, 2 à la seconde, 3 à la troisième, et laissant les 18 jetons restants sur la table, permets qu'à ton insu chaque personne prenne celle des trois choses qu'elle voudra. Cela fait, ordonne que la personne qui a pris la première chose prenne des jetons restants autant que tu lui en as donné, et que la personne qui a pris la seconde chose prenne des jetons restants deux fois autant que tu lui en as donné, et que la personne qui a pris la troisième chose prenne des jetons restants quatre fois autant que tu lui en as donné. Il reste alors sur la table un certain nombre de jetons, et, d'après la connaissance de ce nombre de jetons, il faut deviner quelle chose a été prise par chaque personne.

Voyons combien il doit rester de jetons dans les différents cas qui peuvent se présenter. Désignons les trois objets par les lettres a, e, i. En les disposant dans l'ordre où les ont pris la première,