Les différences 30 — 20 ou 10, 40 — 20 ou 20 ayant pour diviseurs communs 2, 5 et 10, on pourrra prendre

$$t = 1 \text{ et } z = 3$$
$$t = 1 \text{ et } z = 6$$
$$t = 1 \text{ et } z = 11$$
$$t = 2 \text{ et } z = 7$$
$$t = 3 \text{ et } z = 8$$
$$t = 3 \text{ et } z = 13, \text{ etc.},$$

en se bornant aux solutions où z et t sont premiers entre eux. Le reste s'achèvera avec la formule (1).

Remarque. Si $z - t = d$, on devra avoir

$$t + d > \frac{a-1}{b-1} t,$$

inégalité d'où l'on tire $t < \frac{(b-1)d}{a-b}$.

Ainsi dans l'exemple précédent, on doit avoir $t < \frac{19.10}{20}$ ou $t < 9\frac{1}{2}$; donc 9 sera la plus grande valeur que l'on devra donner à t si l'on continue les essais précédents pour trouver les autres solutions.

PROBLÈME XXV

De trois choses et de trois personnes proposées deviner quelle chose aura été prise par chaque personne.

Imagine-toi que des trois personnes l'une est première, l'autre est seconde, l'autre est troisième; et semblablement des trois choses fais-en une première, l'autre seconde, l'autre troisième. Puis prenant 24 jetons, donne 1 jeton à la première personne, 2 à la seconde, 3 à la troisième, et laissant les 18 jetons restants sur la table, permets qu'à ton insu chaque personne prenne celle des trois choses qu'elle voudra. Cela fait, ordonne que la personne qui a pris la première chose prenne des jetons restants autant que tu lui en as donné, et que la personne qui a pris la seconde chose prenne des jetons restants deux fois autant que tu lui en as donné, et que la personne qui a pris la troisième chose prenne des jetons restants quatre fois autant que tu lui en as donné. Il reste alors sur la table un certain nombre de jetons, et, d'après la connaissance de ce nombre de jetons, il faut deviner quelle chose a été prise par chaque personne.

Voyons combien il doit rester de jetons dans les différents cas qui peuvent se présenter. Désignons les trois objets par les lettres a, e, i. En les disposant dans l'ordre où les ont pris la première,

la seconde et la troisième personne, on pourra avoir les six cas suivants :

a, *e*, *i*; *e*, *a*, *i*; *a*, *i*, *e*;
e, *i*, *a*; *i*, *a*, *e*; *i*, *e*, *a*.

Dans le premier cas, les trois personnes prennent respectivement 1, 4 et 12 jetons, ce qui fait 17, et il en reste 1.

Dans le second cas, les trois personnes prennent respectivement 2, 2 et 12 jetons, ce qui fait 16, et il en reste 2.

Dans le troisième cas, les trois personnes prennent respectivement 1, 8 et 6 jetons, ce qui fait 15, et il en reste 3.

Dans le quatrième cas, les trois personnes prennent respectivement 2, 8 et 3 jetons, ce qui fait 13, et il en reste 5.

Dans le cinquième cas, les trois personnes prennent respectivement 4, 2 et 6 jetons, ce qui fait 12, et il en reste 6.

Dans le sixième cas, les trois personnes prennent respectivement 4, 4 et 3 jetons, ce qui fait 11, et il en reste 7.

Ces résultats sont compris dans le tableau suivant :

RESTES.	1re PERS.	2e PERS.	3e PERS.
1	*a*	*e*	*i*
2	*e*	*a*	*i*
3	*a*	*i*	*e*
5	*e*	*i*	*a*
6	*i*	*a*	*e*
7	*i*	*e*	*a*

On peut remarquer que, pour le reste 1, les objets sont dans l'ordre direct *a*, *e*, *i*, et pour le reste 7 dans l'ordre inverse *i*, *e*, *a*; que pour le reste 2 il suffit de permuter les deux premiers du reste 1, et pour le reste 3 les deux derniers; que pour le reste 5 il suffit de permuter les deux premiers du reste 7, et pour le reste 6 les deux derniers.

Voici la règle mnémonique donnée par Bachet :

Pour ces six façons différentes, remarque ces six paroles :

Par fer, César, jadis, devint, si grand, prince.

Que s'il reste 1 jeton, tu te serviras de la première (par fer);

S il en reste 2, tu te serviras de la seconde (César) :

S'il en reste 3, tu te serviras de la troisième (jadis);

S'il en reste 5, tu te serviras de la quatrième (devint); et ainsi consécutivement.

Or, pour t'en servir, tu dois remarquer qu'en chaque parole, il y a deux syllabes, dont la première signifie la première personne et la seconde signifie la seconde personne; semblablement prends garde aux voyelles *a*, *e*, *i*, car *a* signifie la première chose, *e* la seconde, *i* la troisième. Partant, selon que tu trouveras une de ces voyelles en une des syllabes, tu dois juger qu'une telle chose est entre les mains d'une telle personne. Par exemple, supposons qu'il reste 3 jetons, et que partant il se faille servir de la troisième parole *jadis*. Alors d'autant que la première voyelle *a* est en la première syllabe, tu diras que la première personne a la première chose; et pour ce que la troisième voyelle *i* est en la seconde syllabe, tu diras que la seconde personne a la troisième chose, et sachant ce qu'ont la première et la seconde personne, tu sais bien ce qu'a la troisième.

AVERTISSEMENT.

Quelques-uns pratiquent ce jeu un peu différemment, car ils donnent 1 jeton à la première personne, 2 à la seconde et 4 à la troisième ; partant les jetons restants ne sont que 17. Puis ils ordonnent que celui qui a la première chose prenne des jetons restants autant qu'il en a reçu, et que celui qui a la seconde chose prenne des jetons restants deux fois autant qu'il en a, et que celui qui a la troisième chose prenne des jetons restants trois fois autant qu'il en a ; et faisant en cette façon, les restes de jetons sont 0, 1, 2, 5, 4, 6, dans les six cas étudiés précédemment.

[On peut résoudre mnémoniquement le problème en employant ces paroles :

Avec éclat l'Aï brillant devint libre,

et en les appliquant successivement aux restes 0, 1, 2, 4, 5, 6.

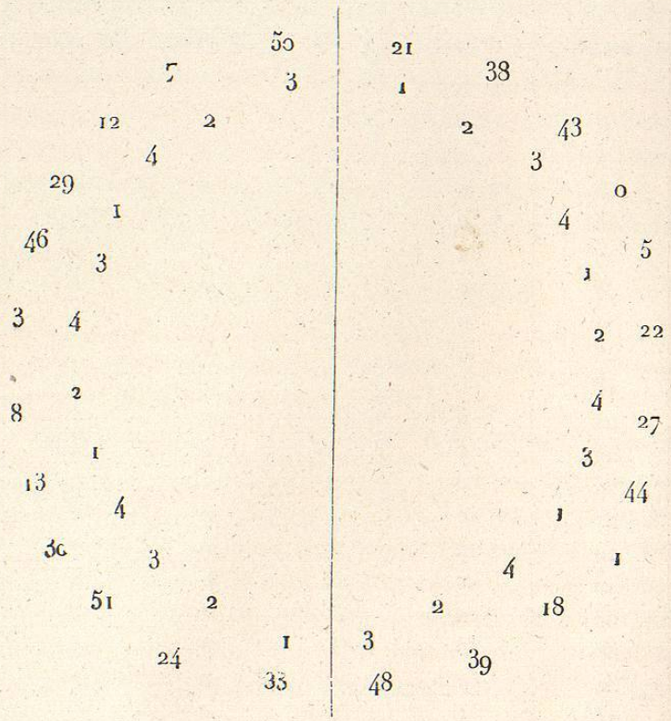
Il vaudrait mieux mettre 18 jetons sur la table, pour avoir comme précédemment les restes 1, 2, 3, 5, 6, 7.]

Bachet s'occupe ensuite du même problème pour 4 personnes et 4 objets, ce qu'aucun auteur, dit-il, n'avait fait avant lui. Il désigne les quatre objets par *a, e, i, o* ; il donne aux quatre personnes respectivement 1, 2, 3, 4 jetons, et il en met 78 sur la table ; la personne qui a le premier objet prend sur la table autant de jetons qu'elle en a, la personne qui a le second objet prend 4 fois autant de jetons qu'elle en a, et la personne qui a le troisième objet prend 16 fois autant de jetons qu'elle en a ; il n'y a pas à s'occuper de la personne qui a pris le quatrième objet, elle sera connue quand on connaîtra les personnes qui ont pris les trois premiers objets. Ces trois objets peuvent être pris par les personnes 1, 2, 3 de 6 manières différentes ; également par les personnes 1, 2, 4, par les personnes 1, 3, 4 et par les personnes

2, 3, 4 ; ce qui offre 24 combinaisons. Faisant le calcul dans les différents cas, on trouve 24 restes différents ; donc, le problème peut être résolu par la connaissance des restes. Voici le tableau des solutions :

RESTES.	1re PERS.	2e PERS.	3e PERS.	4e PERS.
0	*o*	*a*	*e*	*i*
1	*a*	*o*	*e*	*i*
3	*o*	*e*	*a*	*i*
5	*a*	*e*	*o*	*i*
7	*e*	*o*	*a*	*i*
8	*e*	*a*	*o*	*i*
12	*o*	*a*	*i*	*e*
13	*a*	*o*	*i*	*e*
18	*o*	*e*	*i*	*a*
21	*a*	*e*	*i*	*o*
22	*e*	*o*	*i*	*a*
24	*e*	*a*	*i*	*o*
27	*o*	*i*	*a*	*e*
29	*a*	*i*	*o*	*e*
30	*o*	*i*	*e*	*a*
33	*a*	*i*	*e*	*o*
38	*e*	*i*	*o*	*a*
39	*e*	*i*	*a*	*o*
43	*i*	*o*	*a*	*e*
44	*i*	*a*	*o*	*e*
46	*i*	*o*	*e*	*a*
50	*i*	*e*	*o*	*a*
51	*i*	*e*	*a*	*o*

On pourra aussi se servir facilement de ces mêmes nombres disposés en cercles, contenant au-dedans les quatre nombres 1, 2, 3, 4, signifiant les quatre objets : car sachant le reste des jetons, il faut chercher ce reste sur le cercle extérieur, et prendre sur le



cercle intérieur le nombre qui lui correspond, avec les deux nombres qui suivent, en avançant vers le bas du cercle : ces trois nombres indiquent les objets pris respectivement par les trois premières personnes. Par exemple, si le reste des jetons est 43, on

prendra ce nombre sur le cercle extérieur ; on trouvera 3 au même rang sur le cercle intérieur, et les deux nombres qui suivent sont 4 et 1 : ces trois nombres 3, 4, 1 ainsi disposés signifient que la première personne a le troisième objet, la seconde le quatrième, et la troisième le premier, d'où l'on conclut que la quatrième a le second.

Sur le demi-cercle de gauche si l'on prend le reste 8, on trouve vis-à-vis, sur le cercle intérieur, le nombre 2, et les nombres suivants sont 1 et 4 ; donc les personnes ont pris respectivement les objets *e, a, o, i*. Pour le reste 39 on prendrait les nombres 2, 3, 1, tandis que pour le reste 24 on prendrait les nombres 2, 1, 3.

ADDITION

La solution que vient de donner Bachet se trouve démontrée par notre proposition XII. Nous voyons en même temps que le problème de 3 objets et de 3 personnes peut se résoudre de la même manière en laissant 12 jetons sur la table, et en demandant que la personne qui a le premier objet prenne autant de jetons qu'elle en a, tandis que la personne qui a le deuxième objet en prendra 3 fois autant qu'elle en a. On a dans ce cas le tableau suivant :

RESTES.	1re PERS.	2e PERS.	3e PERS.
1		*a*	*e*
2	*a*		*e*
3		*e*	*a*
5	*a*	*e*	
6	*e*		*a*
7	*e*	*a*	

On peut résoudre mnémoniquement le problème en employant les paroles suivantes :

Il a jadis brillé dans ce petit État,

et en appliquant les syllabes deux par deux successivement aux restes 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mais la proposition XII nous donne la solution d'un problème plus général, en ce qu'elle nous permet de considérer un nombre quelconque d'objets inférieur au nombre des personnes. Ainsi que 3 objets doivent être pris par 3 personnes non désignées dans une société de 5 personnes. Après avoir fait ranger les personnes et leur avoir donné respectivement 1, 2, 3, 4, 5 jetons, vous demanderez que la personne qui a le premier objet prenne sur la table autant de jetons qu'elle en a, que la personne qui a le deuxième objet en prenne 5 fois autant qu'elle en a, et que la personne qui a le troisième objet en prenne 25 fois autant qu'elle en a ; et comme elles peuvent avoir besoin pour cela de $5 \times 25 + 4 \times 5 + 3 \times 1$ (prop. XI) ou 148 jetons, vous en mettrez 149 sur la table, et il vous sera facile, d'après le reste des jetons, de deviner les personnes qui ont pris les trois objets ; vous en aurez dressé le tableau comme dans les cas précédents, et il doit présenter $5 \times 4 \times 3$ ou 60 cas différents. Comme la quantité de jetons à employer serait assez incommode, on la remplacera par un calcul sur le nombre 149 inscrit sur un papier, et effectué par les personnes qui auront pris les trois objets.

Nous ferons remarquer qu'avant Bachet, Diego Palomino avait examiné la question de 4 objets avec 4 personnes ; il en donne une solution fort ingénieuse dans le même ouvrage où il traite des carrés magiques.

S'ENSUIVENT

QUELQUES AUTRES

PETITES SUBTILITÉS DES NOMBRES

QU'ON PROPOSE ORDINAIREMENT

I

Je demande un nombre qui étant divisé par 2 il reste 1, étant divisé par 3 il reste 1, et semblablement étant divisé par 4 ou par 5 ou par 6, il reste toujours 1, mais étant divisé par 7 il ne reste rien.

Cette question se propose ainsi ordinairement :

Une pauvre femme portant un panier d'œufs pour vendre au marché vient à être heurtée par un certain qui fait tomber le panier et casser tous les œufs, qui pourtant désirant de satisfaire à la pauvre femme s'enquiert du nombre de ses œufs; elle répond qu'elle ne le sait pas certainement, mais qu'elle a bien souvenance que les ôtant 2 à 2 il en restait 1, et semblablement les ôtant 3 à 3, ou 4 à 4, ou 5 à 5, ou 6 à 6 il restait toujours 1, et les comptant 7 à 7 il ne restait rien. On demande comme de là on peut conjecturer le nombre des œufs.

Le plus petit commun multiple des nombres 2, 3, 4, 5, 6 étant 60, il s'agit de trouver un multiple de 7 qui surpasse de