On peut résoudre mnémoniquement le problème en employant les paroles suivantes :

Il a jadis brillé dans ce petit État,

et en appliquant les syllabes deux par deux successivement aux restes 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mais la proposition XII nous donne la solution d'un problème plus général, en ce qu'elle nous permet de considérer un nombre quelconque d'objets inférieur au nombre des personnes. Ainsi que 3 objets doivent être pris par 3 personnes non désignées dans une société de 5 personnes. Après avoir fait ranger les personnes et leur avoir donné respectivement 1, 2, 3, 4, 5 jetons, vous demanderez que la personne qui a le premier objet prenne sur la table autant de jetons qu'elle en a, que la personne qui a le deuxième objet en prenne 5 fois autant qu'elle en a, et que la personne qui a le troisième objet en prenne 25 fois autant qu'elle en a ; et comme elles peuvent avoir besoin pour cela de $5 \times 25 + 4 \times 5 + 3 \times 1$ (prop. XI) ou 148 jetons, vous en mettrez 149 sur la table, et il vous sera facile, d'après le reste des jetons, de deviner les personnes qui ont pris les trois objets ; vous en aurez dressé le tableau comme dans les cas précédents, et il doit présenter $5 \times 4 \times 3$ ou 60 cas différents. Comme la quantité de jetons à employer serait assez incommode, on la remplacera par un calcul sur le nombre 149 inscrit sur un papier, et effectué par les personnes qui auront pris les trois objets.

Nous ferons remarquer qu'avant Bachet, Diego Palomino avait examiné la question de 4 objets avec 4 personnes ; il en donne une solution fort ingénieuse dans le même ouvrage où il traite des carrés magiques.

S'ENSUIVENT

QUELQUES AUTRES

PETITES SUBTILITÉS DES NOMBRES

QU'ON PROPOSE ORDINAIREMENT

I

Je demande un nombre qui étant divisé par 2 il reste 1, étant divisé par 3 il reste 1, et semblablement étant divisé par 4 ou par 5 ou par 6, il reste toujours 1, mais étant divisé par 7 il ne reste rien.

Cette question se propose ainsi ordinairement :

Une pauvre femme portant un panier d'œufs pour vendre au marché vient à être heurtée par un certain qui fait tomber le panier et casser tous les œufs, qui pourtant désirant de satisfaire à la pauvre femme s'enquiert du nombre de ses œufs; elle répond qu'elle ne le sait pas certainement, mais qu'elle a bien souvenance que les ôtant 2 à 2 il en restait 1, et semblablement les ôtant 3 à 3, ou 4 à 4, ou 5 à 5, ou 6 à 6 il restait toujours 1, et les comptant 7 à 7 il ne restait rien. On demande comme de là on peut conjecturer le nombre des œufs.

Le plus petit commun multiple des nombres 2, 3, 4, 5, 6 étant 60, il s'agit de trouver un multiple de 7 qui surpasse de

l'unité un multiple de 60. On le trouve rapidement par essais successifs : 60 divisé par 7 donne pour reste 4 ; donc 2.60 donnera pour reste 8 ou 1 ; on a donc

$$2.60 = 7 + 1;$$

par conséquent $7.60 - 2.60 + 1 = \dot{7}$,

c'est-à-dire $5.60 + 1 = \dot{7}$. (Voir note II.)

Ainsi le plus petit nombre résolvant la question est 301.

On résoudrait le problème de la même manière pour un reste différent de 1, par exemple si l'on demandait un multiple de 19 qui divisé par chacun des nombres 8, 12 et 15 donnât pour reste 7.

II

Trouver un nombre qui étant divisé par 2 laisse 1, et divisé par 3 laisse 2, et divisé par 4 laisse 3, et divisé par 5 laisse 4, et divisé par 6 laisse 5, mais qui divisé par 7 ne laisse rien.

Cette question rentre dans la précédente, car un multiple de 6 plus 5 est un multiple de 6 moins 1, et ainsi des autres nombres ; par conséquent, il faut satisfaire à l'égalité

$$\dot{7} = \dot{6}0 - 1,$$

qui revient à $\dot{6}0 = \dot{7} + 1$.

Le nombre 120 est le premier nombre qui résout la question (voir note II).

Le problème se résoudrait de la même manière si la différence entre chaque diviseur et le reste était un nombre différent de 1.

III

Deux bons compagnons ont 8 pintes de vin à partager entre eux également, lesquelles sont dans un vase contenant justement 8 pintes, et pour faire leur partage ils n'ont que deux autres vases dont l'un contient 5 pintes et l'autre 3. On demande comment ils pourront partager justement leur vin, ne se servant que de ces trois vases.

On peut soudre cette question (et toutes celles du même genre) en deux façons :

Premièrement, du vase contenant 8, qui est plein, on versera 5 pintes dans le vase contenant 5, et d'icelui on en versera 3 dans le vase contenant 3, et il en restera 2 dans le 5; on versera puis les 3 pintes qui sont dans le 3 dedans le 8, et on mettra dans le 3 les deux qui sont dans le 5; en après de ce qui est dans le 8 on remplira derechef le 5, et du 5 on versera une pinte dans le 3, ce qui lui manquait pour le remplir. Partant il restera justement 4 pintes dans le vase de 5, et 4 pintes dans les deux autres.

Secondement, on versera du vase de 8 3 pintes dans le 3, lesquelles on mettra puis dans le vase de 5; et derechef du vase de 8 on versera 3 pintes dans le 3, dont on mettra 2 dans le 5 pour le remplir, et lors il n'en restera qu'une dans le 3; en après on videra le 5 dans le 8, et on mettra dans le 5 la pinte qui est dans

le 3; et des 7 pintes qui se trouvent dans le 8 on en versera 3 dans le 3. Partant il en restera 4 justement dans le 8, et 4 dans les deux autres vases.

Ces solutions peuvent être représentées en tableaux de la manière suivante :

1re *Solution.*

VASES.		
8	5	3
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

2e *Solution.*

VASES.		
8	5	3
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Or, bien qu'il semble que cette question ne se puisse soudre par règle certaine, et qu'il y faille nécessairement procéder à tâtons, toutefois on peut par un discours certain et infaillible parvenir à la solution d icelle, ou discourir son impossibilité, si par hasard on la proposait impossible; et de fait sur la question proposée on peut ainsi discourir :

Puisque pour partager 8 pintes également il faut qu'il y en ait 4 d'un côté et 4 de l'autre, et il est certain qu'il n'en peut avoir 4 que dans le 5 ou dans le 8, il nous faut procurer l'un ou l'autre : voilà donc que je peux prendre deux différentes voies; et suivant la première je ferai ce discours : Pour faire que dans le vase de 5 il

reste 4 pintes justement, il faut, ledit vase étant plein, en ôter une seulement : cela ne se peut faire qu'en versant icelle pinte dans l'un des deux autres à qui il ne faille qu'une pinte pour être plein ; cela ne peut arriver au 8 (car si le 5 étant plein il ne manquait qu'une pinte au 8 pour être plein, il s'ensuivrait qu'en tout il y aurait 12 pintes contre l'hypothèse) ; il faut donc que ce soit le vase de 3 à qui il ne faille qu'une pinte pour être plein, et partant il faut que dans icelui il y ait seulement 2. Or cela se peut imaginer en deux façons : la première si le 3 étant plein on peut ôter une pinte d'icelui, la seconde si le 3 étant vide on y apporte d'un autre vase lesdites 2 pintes. La première façon ne peut réussir, car il faudrait que le 3 étant plein il ne manquât qu'une pinte à l'un des autres vases pour être plein, ce qui ne peut arriver au 5 (car il faudrait qu'il n'y eût que 4 pintes dans icelui, qui serait supposer ce que l'on cherche) ; il ne peut arriver au 8 (car il faudrait qu'il y eût 7 pintes en icelui qui jointes avec les autres 3 feraient en tout 10 pintes contre l'hypothèse) ; donc il faut suivre la seconde façon, et apporter d'ailleurs 2 pintes dans le 3. Mais cela ne peut venir du 8 (car si le 3 étant vide il n'y avait que 2 pintes dans le 8, quoique le 5 fût plein, tout le nombre des pintes ne serait que de 7 contre l'hypothèse) ; il faut donc que les deux pintes viennent du 5. Or, pour faire qu'il n'y ait que 2 pintes dans le 5, il faut en ôter 3 quand il est plein, ce qui est bien aisé, à cause que nous avons un vase contenant 3. Partant, si l'on rebrousse chemin, et si l'on reprend le fil du discours depuis la fin jusques au commencement, on trouvera la première façon de soudre la question.

Suivant l'autre route je ferai ce discours : Pour faire demeurer 4 pintes dans le 8, il faut en ôter 4. Cela se peut imaginer en 3

façons. Premièrement, ôtant les 4 pintes d'un coup, ce qui est impossible (car il n'y a point de vase contenant 4) ; secondement, ôtant 2 pintes et puis 2 autres, ce qui est aussi impossible (car bien qu'on puisse ôter 2 pintes, comme j'ai montré en l'autre discours, où l'on fait venir 2 pintes dans le 5, toutefois, cela fait, il est impossible d'en ôter 2 autres, comme on peut recueillir du même discours) ; troisièmement, ôtant 1 pinte et puis 3, et cette façon est fort vraisemblable, car si l'on peut mettre une pinte dans le 5 il sera aisé d'en mettre 3 dans le 3.

Or, pour faire venir une pinte dans le 5, il faut ou que l'on ôte 4 dudit 5 lorsqu'il est plein, ou que l'on y apporte d'ailleurs ladite pinte. Le premier moyen est impossible, car du 5 on ne peut vider 4 pintes dans le 3 qui n'en est pas capable ; on ne les peut aussi vider dans le 8 (car il faudrait que dans le 8 il y eût déjà 4 pintes, et partant tout le nombre des pintes serait 9 contre l'hypothèse) ; il faut donc embrasser le second moyen, et apporter d'ailleurs une pinte dans le 5. Cela ne peut venir du 8 (car le 5 étant vide, s'il n'y avait qu'une pinte dans le 8, quoique le 3 fût plein, tout le nombre des pintes ne serait que 4) ; il faut donc qu'il vienne du 3. Or, pour faire que dans le 3 il n'y ait qu'une pinte, il faut en ôter 2 quand il est plein.

Donc il faut qu'à l'un des deux autres vases il ne manque que 2 pour être plein. Cela ne peut arriver au 8 (car autrement tout le nombre des pintes serait 9) ; donc il faut qu'il arrive au 5 ; et partant il faut que dans le 5 il n'y ait que 3 pintes, ce qui se procure aisément versant le 3 quand il est plein dedans le 5.

Donc, reprenant tout ce discours depuis la fin jusques au commencement, on trouvera la seconde façon que j'ai donnée pour soudre cette question.

Voici des exemples variés de ce genre de problèmes :

Premier exemple, avec des vases 16, 9 et 7.

1re SOLUTION.

16,	9,	7
16,	0,	0
7,	9,	0
7,	2,	7
14,	2,	0
14,	0,	2
5,	9,	2
5,	4,	7
12,	4,	0
12,	0,	4
3,	9,	4
3,	6,	7
10,	6,	0
10,	0,	6
1,	9,	6
1,	8,	7
8,	8,	0

2e SOLUTION.

16,	9,	7
16,	0,	0
9,	0,	7
9,	7,	0
2,	7,	7
2,	9,	5
11,	0,	5
11,	5,	0
4,	5,	7
4,	9,	3
13,	0,	3
13,	3,	0
6,	3,	7
6,	9,	1
15,	0,	1
15,	1,	0
8,	1,	7
8.	8,	0

Deuxième exemple, avec des vases 16, 11 et 6.

1re SOLUTION.

16,	11,	6
16,	0,	0
5,	11,	0
5,	5,	6
11,	5,	0
11,	0,	5
0,	11,	5
0,	10,	6
6,	10,	0
6,	4,	6
12,	4,	0
12,	0,	4
1,	11,	4
1,	9,	6
7,	9,	0
7,	3,	6
13,	3,	0
13,	0,	3
2,	11,	3
2,	8,	6
8,	8	0

2e SOLUTION.

16,	11,	6
16,	0,	0
10,	0,	6
10,	6,	0
4,	6,	6
4,	11,	1
15,	0,	1
15,	1,	0
9,	1,	6
9,	7,	0
3,	7,	6
3,	11,	2
14,	0,	2
14,	2,	0
8,	2,	6
8,	8,	0

Troisième exemple, avec des vases 42, 27 et 12.

1re SOLUTION.			2e SOLUTION.		
42,	27,	12	42,	27,	12
42,	0,	0	42,	0,	0
15,	27,	0	30,	0,	12
15,	15,	12	30,	12,	0
27,	15,	0	18,	12,	12
27,	3,	12	18,	24,	0
39,	3,	0	6,	24,	12
39,	0,	3	6,	27,	9
12,	27,	3	33,	0,	9
12,	18,	12	33,	9,	0
24,	18,	0	21,	9,	12
24,	6,	12	21,	21,	0
36,	6,	0			
36,	0,	6			
9,	27,	6			
9,	21,	12			
21,	21,	0			

Pour démontrer la résolution de son problème, Bachet a fait un raisonnement fort ingénieux qu'il faudrait imiter sur chaque exemple particulier pour savoir s'il y a une solution, ce qui souvent serait fort difficile, vu la longueur et la délicatesse du raisonnement.

Nous avons donc repris la question, et nous avons été assez heureux pour lever la difficulté. Examinons d'abord la première solution, et désignons les vases par A, B, C.

On remplit B de A, puis on remplit C de B, et à chaque fois que C est plein, on le verse dans A. Pendant cette opération, il reste à chaque fois dans B une quantité de liquide exprimée par

$$B - \dot{C}.$$

Si cette quantité n'a pas été égale à $\frac{A}{2}$, on la verse dans C, lorsqu'elle est moindre que C.

On remplit de nouveau B avec A, puis on achève de remplir C qu'on verse dans A; et l'on continue de remplir C et de le verser dans A; la quantité de liquide restant à chaque instant dans B est alors exprimée par

$$2\,B - \dot{C}.$$

On voit que, cette opération étant continuée, la quantité de liquide contenue dans B, à un moment quelconque, peut être représentée par

$$\dot{B} - \dot{C};$$

donc, pour qu'elle devienne égale à $\frac{A}{2}$, il faut qu'on puisse avoir

$$\dot{B} = \dot{C} + \frac{A}{2},$$

condition à laquelle on peut toujours satisfaire, si B et C sont premiers entre eux, ou si $\frac{A}{2}$ contient les facteurs communs à B et C.

Cette condition est suffisante, *s'il y a toujours dans* A *assez de liquide pour remplir* B; car l'égalité

$$m\,B = n\,C + \frac{A}{2}$$

montre qu'après avoir rempli m fois B de A et versé n fois C dans A, le vase B contiendra la quantité $\frac{A}{2}$.

Quand la capacité de A n'est pas inférieure à la somme des capacités des autres vases, il y a toujours dans A assez de liquide pour remplir B. Mais il pourrait n'en être plus de même si l'on avait $A < B + C$; c'est ce qui arrive, par exemple, avec des vases dont les capacités sont 20, 13 et 9, ou 16, 12 et 7. Dans ce cas, le problème peut être possible (1er exemple), ou impossible (2e exemple); mais on n'en sait rien *à priori*.

Considérons maintenant la seconde manière de résoudre le problème.

On remplit C de A et on le verse dans B; on remplit encore C et on le verse dans B, et ainsi de suite jusqu'à ce que B soit plein ou contienne la quantité $\frac{A}{2}$, ce qui n'arrivera que si C est un sous-multiple de $\frac{A}{2}$.

Quand B est plein, on le verse dans A, et il reste dans C une quantité de liquide exprimée par $\dot{C} - B$. On verse cette quantité dans B.

On remplit de nouveau C avec A, puis on verse C dans B, jusqu'à ce que B soit plein. Tant que B n'est pas plein, il contient une quantité de liquide exprimée par $\dot{C} - B$, car à la quantité qu'il contenait précédemment on n'a fait qu'ajouter un multiple de C. Quand B est plein, on le verse dans A, et il reste dans C une quantité de liquide exprimée par $\dot{C} - 2B$, qu'on verse dans B et à laquelle on ajoute ensuite un multiple de C.

On voit que, cette opération étant continuée, la quantité de

liquide contenue dans B, à un moment quelconque, lorsqu'il n'est pas plein, peut être représentée par

$$\dot{C} - \dot{B};$$

donc, pour qu'elle devienne égale à $\frac{A}{2}$, il faut qu'on puisse avoir

$$\dot{C} = \dot{B} + \frac{A}{2},$$

condition à laquelle on peut toujours satisfaire si B et C sont premiers entre eux, ou si $\frac{A}{2}$ contient les facteurs communs à B et C.

Cette condition est suffisante, *s'il y a toujours dans* A *assez de liquide pour remplir* C; car si l'on a

$$nC = mB + \frac{A}{2},$$

il en résulte $$A - nC + mB = \frac{A}{2},$$

égalité qui montre qu'après avoir rempli n fois C de A et versé m fois B dans A, ce dernier vase contiendra la quantité $\frac{A}{2}$.

Le cas exceptionnel de $A < B + C$ existe ici comme dans le cas précédent.