IV

Trois maris jaloux se trouvent de nuit avec leurs femmes au passage d'une rivière où ils ne rencontrent qu'un petit bateau sans batelier, si étroit qu'il n'est capable que de deux personnes, on demande comment ces six personnes passeront deux à deux, tellement que jamais aucune femme ne demeure en compagnie d'un ou de deux hommes si son mari n'est présent.

Il faut qu'ils passent en six fois en cette sorte.

Premièrement, deux femmes passent, puis l'une ramène le bateau et repasse avec la troisième femme. Cela fait, l'une des trois femmes ramène le bateau, et se mettant en terre avec son mari, laisse passer les deux autres hommes qui vont treuver leurs femmes. Alors un desdits hommes avec sa femme ramène le bateau, et, mettant sa femme en terre, prend l'autre homme et repasse avec lui. Finalement la femme qui se treuve passée avec les trois hommes entre dans le bateau, et en deux fois va quérir les deux autres femmes : par ainsi en six fois tous passent.

Il semble que cette question ne soit fondée en aucune raison; mais toutefois la condition apposée qu'il ne faut point qu'aucune femme demeure accompagnée d'aucun des hommes si son mari n'est présent, nous peut guider pour trouver la solution d'icelle par un discours infaillible. Car il est certain que pour passer

deux à deux il faut ou que deux hommes passent ensemble, ou deux femmes, ou un homme avec sa femme. Or, au premier passage, on ne peut faire passer deux hommes (car alors un homme seul demeurerait avec les trois femmes contre la condition); donc il est nécessaire que deux femmes passent, ou qu'il passe un homme avec sa femme ; mais ces deux façons reviennent à une, d'autant que si deux femmes passent, il faut que l'une ramène le bateau; partant une seule se treuve en l'autre rive; et si un homme passe avec sa femme, le même adviendra, d'autant que l'homme doit ramener le bateau (car si la femme le ramenait elle se treuverait avec les deux autres hommes sans son mari). Au second passage, deux hommes ne peuvent passer (car l'un deux lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme); un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car étant passé il se treuverait seul avec deux femmes); il est donc nécessaire que les deux femmes passent : ainsi les trois femmes étant passées, il faut que l'une d'icelles ramène le bateau. Quoi fait, au troisième passage, où restent à passer les trois hommes et une femme, on voit bien que deux femmes ne peuvent passer, puisqu'il n'y en a qu'une; un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car étant passé il se treuverait seul avec les trois femmes); donc il faut que deux hommes passent, et allent vers leurs deux femmes, laissant l'autre homme avec sa femme. Or qui ramènera le bateau? Un homme ne le peut faire (car il lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme) : une femme ne peut aussi (car elle irait vers un autre homme laissant son mari); que si les deux hommes le ramenaient, ce serait ne rien faire, car ils retourneraient là d'où ils sont venus. Partant, ne restant autre moyen, il faut qu'un homme avec sa femme ramène le bateau. Au qua-

trième passage, où restent à passer deux hommes avec leurs deux femmes, il est certain qu'un homme avec sa femme ne doit passer (car ce serait ne rien faire) ; les deux femmes aussi ne peuvent passer (car alors les trois femmes seraient avec un seul homme); donc il faut que les deux hommes passent. Alors pour ramener le bateau deux hommes ne peuvent être employés (car ce serait retourner là d'où ils sont venus); un homme seul aussi ne peut (car, cela fait, il se treuverait seul avec deux femmes), donc il faut que ce soit la femme qui en deux fois aille quérir les deux autres femmes qui restent à passer, et voilà le cinquième et sixième passage. Partant, en six fois ils sont tous passés sans enfreindre la condition.

Résoudre le même problème pour quatre maris et leurs femmes.

Tartaglia a cru pouvoir résoudre ce problème en faisant passer les personnes deux à deux; mais il s'est trompé, comme le montre Bachet, qui reconnaît d'ailleurs que la chose est impossible, sans en donner la démonstration. On peut s'en assurer de la manière suivante :

On remarque d'abord que d'un passage à un autre le nombre des personnes passées ne peut augmenter que d'une unité. Or admettons qu'on en ait passé 2, puis 3, puis 4, suivant les conditions, et voyons si 5 peuvent se trouver passées. Ces 5 personnes seront 4 femmes et 1 homme, ou 3 femmes et 2 hommes, ou 2 femmes et 3 hommes, ou enfin 1 femme et 4 hommes.

Or le premier ni le second cas ne peuvent avoir lieu, car il y aurait quelque femme qui se trouverait avec un homme sans

son mari; le troisième ne peut non plus avoir lieu, car l'un des hommes aurait sa femme sur l'autre rive en compagnie d'un autre homme.

Quant au dernier cas, s'il a lieu, c'est que le dernier passage a amené 2 hommes, ou un homme et une femme. Or il n'a pu amener 2 hommes, car alors il y aurait eu ensemble de l'autre côté 2 hommes et 3 femmes, ce que nous avons vu être impossible; il n'a pas non plus amené 1 homme et 1 femme, car il y aurait eu de l'autre côté 1 homme et 4 femmes, ce qui est encore contraire aux conditions du problème.

Donc il est impossible que 5 personnes passent aux conditions imposées par l'énoncé.

Il n'en est plus de même en les faisant passer trois à trois.

Désignons les maris par A, B, C, D, et leurs femmes par *a*, *b*, *c*, *d*.

	A PASSER.	PASSÉS.
Trois femmes passent d'abord,	A, B, C, D, *d*,	*a*, *b*, *c*,
Deux reviennent et emmènent la quatrième,	A, B, C, D,	*a*, *b*, *c*, *d*,
Une femme revient, reste avec son mari, et les trois autres hommes passent,	A, *a*,	B, C, D, *b*, *c*, *d*,
Un mari revient avec sa femme, et emmène l'autre mari,	*a*,	A, B, C, D, *b*, *c*, *d*,
Enfin, deux femmes reviennent, et passent celle qui est restée.		A, B, C, D, *a*, *b*, *c*, *d*.

Il est facile de généraliser le problème. Soient n maris A, B,... L, M, et leurs n femmes a, b,... l, m, chaque passage devant contenir $n - 1$ personnes.

	A PASSER.	PASSÉS.
D'abord $n - 1$ femmes passent,	A, B,... L, M, m,	a, b,... l,
$n - 2$ femmes reviennent chercher la dernière,	A, B,... L, M,	a, b,... l, m,
Une femme revient, reste avec son mari, et les $n - 1$ autres maris passent,	A, a,	B,... L, M, b,... l, m,
Ici deux cas se présentent : n est impair ou il est pair; si n est impair, représentons-le par $2n' + 1$; alors $(n' - 1)$ couples repassent la rivière, et ramènent le couple restant, ce qui achève le problème; et il y a eu quatre passages,		A, B ...L, M, a, b, . l, m,
Mais il y a exception pour $n = 3$, parce qu'alors $n' - 1 = 0$; dans ce cas, un couple revient, la femme reste, les deux maris passent; et il faut encore qu'une femme fasse deux voyages pour ramener les deux autres femmes, ce qui fait six passages pour ce cas exceptionnel,	A, a,	B, C, b, c,
	a, b,	A, B, C, c,
	a,	A, B, C, b, c,
		A, B. C, a, b, c,

	A PASSER.	PASSÉS.
Si n est pair et égal à $2n'$, il y a encore $n' - 1$ couples qui repassent la rivière, mais ils ne ramènent que le mari qui était resté, et il faut encore un voyage de $n - 2$ femmes pour passer celle qui reste.	A, a,	B...L, M, b,... l, m,
	a,	A, B,... L, M, b,... l, m,
		A, B,...L. M, a; b,... l, m.

Il y a ainsi cinq voyages.

Le cas de $n = 2$ fait aussi exception, et ne peut être soumis à la condition de ne passer que $n - 1$ personnes à la fois; mais en en passant deux, il se résout facilement.

V

Étant donnée telle quantité qu'on voudra pesant un nombre de livres depuis 1 jusques à 40 inclusivement (sans toutefois admettre les fractions), on demande combien de poids pour le moins il faudrait employer à cet effet.

L'ÉNONCÉ du problème tel que le donne Bachet n'a de précision qu'à l'égard du nombre 40 qu'il a choisi; si l'on prenait un autre nombre, on pourrait souvent trouver différents systèmes de poids contenant chacun le moins de poids possible, et avec lesquels on pourrait faire toutes les pesées depuis 1 jusqu'au nombre assigné. Voici la vraie forme sous laquelle le problème doit être énoncé :

Trouver une série de poids avec lesquels on puisse faire toutes les pesées en nombres entiers depuis 1 jusqu'à la somme des poids employés, cette somme étant la plus grande possible relativement au nombre de ces poids.

Ne prenons d'abord que 2 poids. L'unité doit être le premier poids, sans quoi, le second étant a, on ne pourrait pas faire la pesée $a + 1$ qui se trouverait avant la somme des deux nombres.

Si l'on prend 1 et 2, on pourra peser jusqu'à $1 + 2$ ou 3. Si l'on prend 1 et 3, on pourra peser 2 ou $3 - 1$, en mettant 3 dans l'un des plateaux de la balance et 1 dans l'autre; puis on pourra faire

la pesée $1 + 3$ ou 4 plus grande qu'avec les poids 1 et 2. Si l'on prend 4 pour second poids, on ne pourra pas faire la pesée 2, et il en sera de même avec tout poids plus grand que 3 : donc les deux premiers poids sont 1 et 3.

Prenons un nouveau poids. On pourrait prendre 5, puisqu'on a pesé jusqu'à 4; mais on peut aussi prendre 6, car 5 se pèsera par $6 - 1$; par la même raison, on peut prendre 7, 5 se pesant par $7 - 2$ ou $7 - 3 + 1$ et 6 se pesant par $7 - 1$; on pourrait de même prendre 8; et enfin on peut prendre 9, car avec les quatre premiers nombres déjà formés on en formera quatre autres en les retranchant de 9, et ces nombres seront 5, 6, 7, 8; mais on ne peut pas prendre un nombre plus grand que 9, car il y aurait quelque pesée intermédiaire qu'on ne pourrait pas faire. En ajoutant à 9 chacune des quatre premières pesées, on aura toutes les pesées de 1 à 13. Les trois premiers poids sont donc 1, 3, 9.

En raisonnant de la même manière avec ces 13 pesées, on verra que le plus grand poids qu'on puisse prendre à la suite est 2 fois 13 plus 1 ou 27, ce qui permettra de faire toutes les pesées jusqu'à 40. Puis on prendra un nouveau poids égal à 2 fois 40 plus 1, ce qui étendra toutes les pesées jusqu'à 121, et ainsi de suite.

Ainsi, le premier poids étant 1,

le second $= 1.2 + 1$ ou 3,
le troisième $= (1 + 3)\,2 + 1$ ou 9,
le quatrième $= (1 + 3 + 9)\,2 + 1$ ou 27,
le cinquième $= (1 + 3 + 9 + 27)\,2 + 1$ ou 81, etc.

Or c'est la propriété de la progression

$$1,\ 3,\ 3^2, \ldots 3^{n-1},\ 3^n;$$

car si l'on fait la somme S des n premiers termes, on a :

$$S = \frac{3^n - 1}{2},$$

d'où $3^n = 2S + 1$.

Donc les poids qui jouissent de la propriété énoncée sont ceux de la progression

$$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \ldots$$

ou

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots.$$

VI

Souvent on requiert qu'on réduise une plus haute monnaie en des plus basses de différente valeur, tellement qu'il y ait égal nombre des unes et des autres, comme si l'on demande qu'on réduise un écu en sous et en liards, tellement qu'il y ait autant de sous que de liards.

Le sou valant quatre liards, la valeur des liards répondant à la question vaudra quatre fois moins que la valeur des sous qui seront en même nombre que les liards; nous partagerons donc 60 sous, valeur de l'écu, en deux parties qui soient proportionnelles à 4 et 1 ; et ces parties qui sont 48 sous, et 12 sous ou 48 liards, répondent à la question.

Si l'on voulait faire le partage en liards et deniers, comme le liard vaut 3 deniers, on partagerait 240 liards, valeur de l'écu, en parties proportionnelles à 3 et 1 ; et ces parties qui sont 180 liards et 60 liards ou 180 deniers répondraient à la question.

On peut de même faire la réduction en plus de deux espèces de monnaies. Soit, par exemple, à réduire l'écu en liards, doubles et deniers, de manière qu'il y ait autant des uns que des autres. Comme le double vaut deux deniers et le liard trois deniers, on partage 240 liards, valeur de l'écu, en parties proportionnelles aux nombres 3, 2 et 1 ; et ces parties qui sont 120 liards, 80 liards ou 120 doubles, et 40 liards ou 120 deniers, résolvent le problème.