X

Il y a 41 personnes en un banquet tant hommes que femmes et enfants qui en tout dépendent 40 sous, mais chaque homme paye 4 sous, chaque femme 3 sous, chaque enfant 4 deniers. Je demande combien il y a d'hommes, combien de femmes, combien d'enfants.

Supposons d'abord un problème où il n'y ait que deux espèces de personnes : soit 42 personnes, hommes et femmes, ayant dépensé 160 sous, chaque homme ayant payé 5 sous et chaque femme 3 sous.

On peut raisonner ainsi : s'il n'y avait eu que des femmes, elles auraient dépensé 42×3 ou 126 sous, dont la différence avec 160 est 34; il faut donc remplacer un certain nombre de femmes par le même nombre d'hommes, de manière que la dépense augmente de 34 sous. Or, chaque homme substitué à une femme augmente la dépense de l'excès de 5 sous sur 3 sous ou de 2 sous; donc, autant de fois 2 est contenu dans 34, autant d'hommes il faut mettre à la place du même nombre de femmes. Il y avait donc 17 hommes, et par suite 25 femmes.

Les anciens arithméticiens ont étendu ce raisonnement au cas de trois espèces de personnes. Ainsi pour le problème rapporté par Bachet, ils disaient : S'il n'y avait eu que des enfants, ils au-

raient dépensé $\frac{41}{3}$ de sous, dont la différence avec 40 sous est $\frac{120}{3}$ moins $\frac{41}{3}$ ou $\frac{79}{3}$ de sous; il faut donc remplacer un certain nombre d'enfants par le même nombre d'hommes et de femmes, de manière que la dépense augmente de $\frac{79}{3}$ de sous. Or, chaque homme substitué à un enfant augmente la dépense de $4 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{11}{3}$ de sous, et chaque femme substituée à un enfant augmente la dépense de $3 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{8}{3}$ de sous; donc il faut partager $\frac{79}{3}$ en deux nombres dont l'un soit multiple de $\frac{11}{3}$ et l'autre de $\frac{8}{3}$, ou plus simplement partager 79 en deux nombres dont l'un soit multiple de 11, et l'autre de 8. En retranchant de 79 la somme $11 + 8$ ou 19 une ou plusieurs fois, jusqu'à ce qu'il reste un multiple de 11 ou un multiple de 8, on en déduira une solution. Dans le cas actuel, ayant retranché de 79 3 fois 19, il reste 22; d'où l'on conclut que 79 contient 5 fois 11 et 3 fois 8 : donc, il y avait 5 hommes, 3 femmes, et, par suite, 33 enfants.

Voici maintenant comment Bachet résout la question. Soit x le nombre des hommes, lesquels dépenseront $3x$ sous; le nombre des femmes et des enfants sera exprimé par $41 - x$, et leur dépense par $40 - 4x$; or ce dernier nombre doit contenir 3 fois le nombre des femmes et le tiers du nombre des enfants; donc, en le multipliant par 3, le produit $120 - 12x$ contiendra 9 fois le nombre des femmes et 1 fois le nombre des enfants; par conséquent, si l'on en retranche $41 - x$, qui représente 1 fois chacun de ces

nombres, il restera 8 fois le nombre des femmes : ce reste est $79 - 11x$; donc le nombre des femmes est $\frac{79 - 11x}{8}$; par suite le nombre des enfants est $41 - x - \frac{79 - 11x}{8}$ ou $\frac{240 + 3x}{8}$.

D'après l'expression du nombre des femmes, on voit qu'on doit avoir $11x < 79$ ou $x < 7\frac{2}{11}$,

L'expression du nombre des enfants revient à $31 + \frac{1 + 3x}{8}$; pour que ce nombre soit entier, il faut que $1 + 3x$ soit multiple de 8 : on cherchera donc un multiple de 8 qui surpasse de 1 un multiple de 3, et si ce multiple de 3 ne surpasse pas 7 fois 3, puisque x ne peut pas surpasser 7, on aura résolu la question. On trouve que 16 répond à la question ; donc il y avait $31 + \frac{16}{8}$ ou 33 enfants, 5 hommes (5 étant la valeur de x dans l'égalité $1 + 3x = 16$) et 3 femmes.

Soit encore 20 personnes ayant dépensé 20 sous, les hommes payant 4 sous, les femmes $\frac{1}{2}$ sou et les enfants $\frac{1}{4}$ de sou.

Le nombre des hommes étant désigné par x, leur dépense sera $4x$; le nombre des femmes et des enfants sera donc $20 - x$, et leur dépense $20 - 4x$: ce dernier nombre contient la moitié du nombre des femmes et le quart du nombre des enfants ; donc, son produit par 4, ou $80 - 16x$, contient 2 fois le nombre des femmes et une fois le nombre des enfants ; donc, si on en retranche $20 - x$, qui représente une fois chacun de ces nombre, le reste $60 - 15x$ sera le nombre des femmes, et par suite l'excès de $20 - x$ sur $60 - 15x$ ou $14x - 40$ sera le nombre des enfants. Le nombre

des femmes, $60 - 15x$, nous montre qu'on doit avoir $15x < 60$ ou $x < 4$; et le nombre $14x - 40$ des enfants exige qu'on ait $14x > 40$ ou $x > 2\frac{6}{7}$; or, entre $2\frac{6}{7}$ et 4, il n'y a que le nombre entier 3 ; donc, il y avait 3 hommes et, par suite, 15 femmes et 2 enfants.

Bachet, qui est l'inventeur de cette première méthode d'analyse indéterminée, termine en disant :

J'ajouterai ici, pour conclusion de ce livre, ce que j'ai trouvé en examinant les deux dernières questions du livre XVII de la première partie de l'Arithmétique de Tartaglia.

En la première, il propose de diviser le nombre 100 en quatre nombres entiers, tellement que, multipliant le premier par 3, le second par 1, le troisième par $\frac{1}{3}$, le quatrième par $\frac{1}{2}$, la somme des produits soit aussi 100, et il donne une seule solution, mettant le premier nombre 19, le second 22, le troisième 51, le quatrième 8, ajoutant encore qu'il ne sait point soudre de semblables questions qu'en y procédant à tâtons. Je treuve par un discours infaillible et fondé en bonne démonstration que cette question ainsi proposée peut recevoir infinies solutions en admettant les fractions, à cause qu'on peut mettre pour le premier nombre tout nombre moindre que 25 ; mais en nombres entiers, elle reçoit 226 solutions, à cause qu'on peut mettre pour le premier nombre tout nombre plus grand que l'unité et qui ne surpasse pas 24, et mettant pour le premier nombre 24, on peut donner 3 solutions ; le mettant 23, on en peut donner 7 ; le mettant 22, il y a 11 solutions ; le mettant 21, il y en a 15 ; le mettant 20, il y en a 19 ; le mettant 19, il y en a 18 ; le mettant 18, il y en a 17 ; et ainsi con-

sécutivement diminuant toujours d'une, jusques au nombre 2, lequel étant mis pour le premier nombre ne donne qu'une solution.

J'aurais crainte d'ennuyer le lecteur, et encore plus l'imprimeur, si je voulais ici coucher par ordre toutes les susdites 226 solutions; mais pour ne point frustrer entièrement les plus curieux de leur attente, je rapporterai seulement les 18 qui se treuvent mettant le premier nombre 19.

19	19	19	19	19	19	19	19	19
23	22	21	20	19	18	17	16	15
54	51	48	45	42	39	36	33	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36
19	19	19	19	19	19	19	19	19
14	13	12	11	10	9	8	7	6
27	24	21	18	15	12	9	6	3
40	44	48	52	56	60	64	68	72

Voici comment Bachet résout les questions de ce genre dans son commentaire sur la proposition 41 du livre IV de Diophante.

Soit x le premier nombre; son produit par 3 est $3x$; la somme des autres nombres est donc $100 - x$, et la somme de leurs produits par $1, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ est $100 - 3x$, qui doit évidemment être plus grande que $(100 - x) \times \frac{1}{3}$; donc $100 - x$ doit être plus petit que $300 - 9x$, d'où l'on conclut $8x < 200$ ou $x < 25$.

Prenons $x = 24$; la somme des autres nombres sera 76, et la

somme de leurs produits par $1, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera 28. Si donc y est le second nombre, la somme des autres sera $76 - y$, et la somme de leurs produits par $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera $28 - y$; cette dernière somme contient par conséquent $\frac{1}{3}$ du troisième nombre et $\frac{1}{2}$ du quatrième; donc, son produit par 6 ou $168 - 6y$ contiendra 2 fois le troisième nombre et 3 fois le quatrième; mais $76 - y$ étant multiplié par 2 donne 2 fois le troisième nombre et 2 fois le quatrième; donc, l'excès de $168 - 6y$ sur $2(76 - y)$, lequel est $16 - 4y$, vaut une fois le quatrième nombre, et par suite l'excès de $76 - y$ sur $16 - 4y$, c'est-à-dire $60 + 3y$, représente une fois le troisième nombre.

Puisque le quatrième nombre est exprimé par $16 - 4y$, il faut qu'on ait $4y < 16$ ou $y < 4$; donc le premier étant 24, le second est 1, 2 ou 3; alors on trouve que le troisième est 63, 66 ou 69, et que le quatrième est 12, 8 ou 4.

On trouvera de même les solutions pour $x = 23$, pour $x = 22$, pour $x = 21$, etc.

Soit encore $x = 19$, dont le produit par 3 est 57. La somme des autres nombres sera 81, et la somme de leurs produits par $1, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera 43. Si donc y est le second nombre, la somme des autres sera $81 - y$, et la somme de leurs produits par $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sera $43 - y$. En opérant sur ces deux sommes comme dans le cas précédent, on trouve que le quatrième nombre est exprimé par $96 - 4y$, et le troisième par $3y - 15$. On doit donc avoir $4y < 96$ ou $y < 24$, et $3y > 15$ ou $y > 5$; ainsi y peut rece-

voir toutes les valeurs entières de 6 à 23, ce qui fait 18 solutions. On calculera au moyen des expressions $3y - 15$ et $96 - 4y$ les valeurs correspondantes du troisième et du quatrième nombre

La seconde question de Tartaglia est : diviser 200 en cinq nombres entiers tellement que, multipliant le premier par 12, le second par 5, le troisième par 1, le quatrième par $\frac{1}{2}$, le cinquième par $\frac{1}{3}$, la somme des produits soit aussi 200; et ledit auteur se tient bien glorieux d'avoir pu trouver une solution, à savoir: mettant le premier 6, le second 12, le troisième 34, le quatrième 52, le cinquième 96. Mais je veux que le lecteur s'étonne quand il verra que j'assure que cette question reçoit 6639 solutions, toutes par nombres entiers, d'autant qu'on peut mettre pour le premier nombre tout nombre moindre que $11\frac{3}{7}$; et mettant ledit premier nombre 11, il y a 3 solutions; le mettant 10, il y en a 60; le mettant 9, il y en a 200; le mettant 8, il y en a 388; le mettant 7, il y en a 571; le mettant 6, il y en a 704; le mettant 5, il y en a 832; le mettant 4, il y en a 914; le mettant 3, il y en a 977; le mettant 2, il y en a 985; le mettant 1, il y en a 1005. Que s'il me fallait rapporter ici toutes lesdites solutions en particulier, elles rempliraient plus d'une vingtaine de pages, ce qui serait ennuyeux. C'est pourquoi je me contenterai de coucher ici toutes celles qui se treuvent en mettant le premier nombre 6 et le second 12, comme fait Tartaglia, lesquelles solutions sont en tout 44, comme l'on peut voir:

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
132	129	126	123	120	117	114	111	108	105	102
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
99	96	93	90	87	84	81	78	75	72	69
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132
66	63	60	57	54	51	48	45	42	39	36
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176
33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3