PROBLÈME IX

Une personne ayant pensé un nombre, dites-lui d'en penser un second plus grand que le premier, et de prendre le quotient complet de la différence des deux nombres par leur produit augmenté de 1 ; *qu'elle retranche ensuite ce quotient du plus grand nombre pensé, et qu'elle triple le reste obtenu, ce qui lui fera un certain nombre* A ; *puis qu'elle multiplie ce même quotient par le plus grand nombre pensé et qu'elle double le produit augmenté de* 1, *ce qui lui fera un nombre* B ; *enfin qu'elle divise le nombre* A *par le nombre* B. *Si elle vous dit le quotient qu'elle obtient alors, comment en déduirez-vous le premier nombre pensé?*

Si l'on désigne le premier nombre pensé par b et l'autre par a, les calculs exécutés seront représentés par

$$\frac{3\left(a-\frac{a-b}{ab+1}\right)}{2\left(\frac{a-b}{ab+1}a+1\right)}.$$

En simplifiant cette expression, on trouve qu'elle se réduit à $\frac{3b}{2}$; donc on aura le premier nombre pensé en prenant les $\frac{2}{3}$ du résultat obtenu.

Soient, par exemple, 5 le nombre pensé et 7 le nombre choisi supérieur à 5 ; leur différence est 2, et leur produit augmenté de 1 est 36 ; le quotient de 2 par 36 est $\frac{2}{36}$ ou $\frac{1}{18}$; ce nombre étant retranché de 7, on a $6\frac{17}{18}$, et son produit par 7 est $\frac{7}{18}$, auquel on ajoute 1, ce qui fait $\frac{25}{18}$; enfin on divise $\left(6\frac{17}{18}\right)\times 3$ par $\frac{25}{18}\times 2$, ce qui donne $\frac{15}{2}$, dont les $\frac{2}{3}$ sont le nombre pensé 5.

PROBLÈME X

Inscrire les cent premiers nombres sur différents cartons de manière que, connaissant les cartons où se trouve un nombre, on puisse deviner ce nombre immédiatement.

Tout nombre entier est une puissance de 2 ou la somme de plusieurs puissances différentes de 2, plus 1 s'il est impair. Car un nombre quelconque étant écrit dans le système de numération dont la base est 2, où les chiffres sont 0 et 1, il sera la somme des valeurs des chiffres significatifs 1 qui entrent dans son écriture, lesquels, à partir du second ordre, expriment des puissances de la base 2, toutes différentes les unes des autres.

Ainsi $110010 = 2^5 + 2^4 + 2$,

et $100111 = 2^5 + 2^2 + 2 + 1$.

Si donc on écrit d'abord sur autant de cartons séparés les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,... puis qu'on inscrive chacun des autres nombres dans chacun des cartons qui contiennent les puissances de 2 dont il est la somme, par exemple 3 dans les cartons qui contiennent 1 et 2, 5 dans ceux qui contiennent 1 et 4, 6 dans ceux qui contiennent 2 et 4, 7 dans ceux qui contiennent 1, 2 et 4, et ainsi de suite, il suffira, pour deviner un nombre qu'une personne a pensé, de lui présenter les cartons, l'un après l'autre, en

lui demandant si le carton contient le nombre pensé, et de faire la somme des puissances de 2 inscrites dans les cartons où elle a dit que le nombre se trouve (le nombre 1 est regardé comme une puissance de 2).

Pour varier le jeu, on pourra deviner des noms au lieu de deviner des nombres; il suffira d'affecter un nom à chacun des nombres précédemment écrits, comme Adolphe, Adèle, Émile, Irma, etc., et d'écrire le nom dans chaque carton à côté du nombre qui lui est assigné. La connaissance des cartons où se trouve le nom fera connaître le nombre qui lui est assigné (comme on l'a expliqué précédemment), et, par suite, il suffira de regarder dans l'un de ces cartons quel est le nom qui se trouve à côté de ce nombre.

On pourrait faire un jeu semblable avec les puissances de 3, mais il serait un peu moins simple.

PROBLÈME XI

On demande de disposer en carré les quatre quatrièmes majeures d'un jeu de cartes de manière que dans chaque bande horizontale, verticale et diagonale, on trouve, dans un ordre quelconque, un as, un roi, une dame et un valet, et en même temps un cœur, un carreau, un pique et un trèfle.

Désignons par A, B, C, D les noms des cartes, abstraction faite de la couleur, et par *a*, *b*, *c*, *d* les noms des couleurs. Le problème revient à faire un carré magique de 16 cases tel, que les lettres A, B, C, D se trouvent toutes les quatre dans chaque ligne horizontale, verticale et diagonale, qu'il en soit de même des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, et que les petites lettres y soient combinées de toutes les manières possibles avec les grandes lettres.

Commençons par disposer les grandes lettres, ce qui n'offre aucune difficulté : mettons-les par ordre dans la première horizontale, et remplissons la diagonale qui descend de gauche à droite, ce qui peut se faire de deux manières, par A, C, D, B, ou par A, D, B, C; en adoptant la première manière, et achevant de remplir le carré, ce qui ne peut se faire que d'une seule façon, nous aurons le carré suivant :

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Pour placer les petites lettres, nous les mettrons d'abord à côté des lettres de même nom dans la diagonale A, C, D, B, qui deviendra A *a*, C *c*, D *d*, B *b*; puis, prenant deux à deux les cases également distantes de cette diagonale et placées parallèlement à l'autre diagonale, nous mettrons à côté de chaque lettre la petite lettre de même nom que l'autre grande lettre : ainsi pour les deux lettres B et D, nous aurons B *d* et D *b*, et ainsi des autres. Il en résultera le carré magique suivant :

A*a*	B*d*	C*b*	D*c*
D*b*	C*c*	B*a*	A*d*
B*c*	A*b*	D*d*	C*a*
C*d*	D*a*	A*c*	B*b*

Si l'on remplace alors A, B, C, D par *as*, *roi*, *dame*, *valet*, dans un ordre quelconque, et *a*, *b*, *c*, *d* par *cœur*, *carreau*, *pique*, *trèfle*, aussi dans un ordre quelconque, pourvu que la même lettre ait toujours la même signification dans tout le carré, on aura une solution de la question. Par exemple, si nous donnons aux

lettres les significations successives écrites précédemment, nous aurons la solution suivante :

AS DE CŒUR	ROI DE TRÈFLE	DAME DE CARREAU	VALET DE PIQUE
VALET DE CARREAU	DAME DE PIQUE	ROI DE CŒUR	AS DE TRÈFLE
ROI DE PIQUE	AS DE CARREAU	VALET DE TRÈFLE	DAME DE CŒUR
DAME DE TRÈFLE	VALET DE CŒUR	AS DE PIQUE	ROI DE CARREAU

On peut remplacer les grandes lettres par *as, roi, dame, valet*, de 24 manières différentes; et il en est de même des petites lettres, par *cœur, carreau, pique, trèfle;* donc, le carré des lettres pourra fournir 24×24 ou 576 solutions de la question. Il en sera de même si l'on veut faire un carré magique en nombres.

PROBLÈME XII

Une personne prend 27 cartes dont elle fait trois tas en les mettant une à une et successivement dans les trois tas dont chacun contient ainsi 9 cartes. (Les cartes ont la face tournée vers le bas quand elles sont dans la main de la personne, et celle-ci les retourne en les distribuant en trois tas.) Pendant cette répartition, une autre personne choisit par la pensée une carte dans l'un des tas; cette carte s'appelle la carte pensée. La première personne ramasse ensuite les tas après qu'on lui a fait connaître celui qui contient la carte pensée.

Elle distribue de nouveau et de la même manière les cartes en trois tas; puis elle ramasse les tas sans déranger l'ordre des cartes de chaque tas, et après qu'on lui a fait connaître celui qui contient alors la carte pensée.

Elle distribue une troisième fois et de la même manière les cartes en trois tas, et elle les ramasse de même après qu'on lui a fait connaître celui qui contient la carte pensée.

On demande comment elle doit placer à chaque fois le tas qui contient la carte pensée pour qu'à la fin cette carte occupe dans le jeu un rang assigné.

Désignons par a, b, c les rangs auxquels on met successivement le tas qui contient la carte pensée. Il y a d'abord $a-1$ tas de 9 cartes à distribuer avant celui qui contient

la carte pensée; ils fournissent $3(a-1)$ cartes à chaque tas, puis celui qui contient la carte pensée en fournit 3, en sorte que, dans le tas qui la contient, cette carte est dans les 3 dernières des $3(a-1)+3$ premières cartes.

On fait ensuite précéder ce tas de $b-1$ autres, ce qui fait

$$9(b-1)+3(a-1)+3$$

cartes à distribuer d'abord; chaque tas en reçoit

$$3(b-1)+(a-1)+1,$$

et la carte pensée est la dernière de ces cartes. On les fait ensuite précéder de $c-1$ tas, ce qui donne

$$9(c-1)+3(b-1)+(a-1)+1$$

pour le rang R de la carte pensée dans le jeu.

On a donc la formule

$$R=9(c-1)+3(b-1)+a.$$

Cette formule sert immédiatement à trouver R quand on connaît a, b, c Connaissant R, on trouvera a, b, c par la règle suivante :

Divisez le rang assigné R successivement par 3 et par 3, et de manière que la première division ne donne pas un reste nul; ce reste sera a et indiquera à quel rang il faut mettre la première fois le tas qui contient la carte pensée; le second reste augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la seconde fois, et le second quotient augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la troisième fois.

Exemple I. — On veut que la carte pensée sorte la onzième :

11	3	
2	3	3
	0	1

Il faudra mettre le tas qui la contient la première fois au second rang, la seconde fois au premier, et la troisième fois au second.

Exemple II. — On veut que la carte pensée sorte la neuvième :

9	3	
3	2	3
	2	0

Il faudra mettre le tas qui la contient la première fois au troisième rang, la seconde fois au troisième rang, et la troisième fois au premier rang.

Remarque. — Lorsqu'on exécute ce tour plusieurs fois de suite, il est bon d'y apporter quelque variété : par exemple, on peut une première fois chercher dans le jeu la carte pensée, les mains derrière, et la poser ensuite sur la table. On peut une seconde fois annoncer, avant même que la carte soit pensée, le rang qu'elle occupera dans le jeu; ou bien on demande à l'un des spectateurs de désigner le rang qu'il veut qu'elle y occupe. Enfin on peut faire tenir les cartes par l'un des spectateurs, qui ramassera les tas comme il voudra; il suffira de remarquer à chaque fois le rang qu'il donne au tas qui contient la carte pensée, et d'appliquer la formule.

Il serait facile de généraliser la question pour un nombre quelconque n^m de cartes; mais on n'en pourrait tirer une nouvelle récréation, vu le nombre limité de cartes dont un jeu se compose. Voyez pourtant *Annales de Mathématiques de Gergonne*, t. IV.

PROBLÈME XIII

Faire le même jeu avec 48 cartes que l'on distribuera trois fois de suite en quatre tas.

Soient a le rang assigné au tas qui contient la carte pensée la première fois qu'on ramasse les tas, b le rang qu'on lui assigne la seconde fois, et c le rang qu'on lui assigne la troisième fois.

Lorsqu'on a mis au rang b le tas qui contenait la carte pensée, on a fait précéder ce tas de $12(b-1)$ cartes qui, réparties ensuite entre les quatre tas, ont donné d'abord $3(b-1)$ cartes dans chaque tas; donc, la carte pensée se trouve dans son tas à la suite de ces $3(b-1)$ cartes, et si nous appelons r le rang qu'elle occupe après ces cartes-là, nous aurons $3(b-1)+r$ pour le rang de la carte dans le tas qui la contient. Nous ramassons les tas et nous mettons $12(c-1)$ cartes avant le tas qui contient la carte pensée; donc, en désignant par R le rang qu'occupe alors la carte dans le jeu, nous aurons

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + r.$$

Il s'agit maintenant de savoir d'où vient la quantité r.

La première fois qu'on a ramassé les tas, on a fait précéder de $12(a-1)$ cartes celui qui contenait la carte pensée; en faisant

alors la distribution des cartes, on a d'abord mis dans chaque tas $3(a-1)$ cartes, puis 3 cartes du tas contenant la carte pensée ; et à la ditribution suivante on a réparti ces $3(a-1)+3$ cartes dans les quatre tas après les $3(b-1)$ cartes qu'on a mises d'abord dans chacun : c'est cette distribution qui a donné le rang r. Or, si $a=1$, on a seulement à distribuer les 3 cartes où se trouve la carte pensée; elle se trouvera donc au premier rang après les $3(b-1)$ cartes, et l'on a :

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 1 \qquad (1).$$

Si $a=4$, la quantité $3(a-1)+3$ devient égale à 12; ces 12 cartes étant distribuées fournissent 3 cartes à chaque tas, et comme la carte pensée est parmi les trois dernières, elle se trouvera la troisième après les $3(b-1)$ cartes, comme le montre cette figure, où x désigne la carte pensée :

1er tas.	2e tas.	3e tas.	4e tas.
c,	c,	c,	c,
c,	c,	c,	c,
c,	x,	x,	x.

On a donc dans ce cas :

$$R = 12(c-1) + 3(b-1) + 3 \qquad (2).$$

Si $a=3$, la quantité $3(a-1)+3$ devient égale à 9, et la distribution de ces 9 cartes à la suite des $3(b-1)$ cartes qui sont déjà placées se fait de la manière suivante :

1er tas.	2e tas.	3e tas.	4e tas.
c,	c,	c,	c
c,	c,	x,	x,
x.			

Donc, si la carte pensée n'est pas dans le premier tas, elle se trouve la seconde du tas après les 3 $(b-1)$ premières cartes, et l'on a :

$$R = 12\,(c-1) + 3\,(b-1) + 2 \qquad (3).$$

Mais si la carte pensée se trouve dans le premier tas, on aura :

$$R = 12\,(c-1) + 3\,(b-1) + 3 \qquad (4).$$

Quand cette circontance se présentera, il suffira, après avoir ramassé les tas, de faire passer sous le jeu la première carte de dessus pour que l'égalité (4) soit remplacée par l'égalité (3).

Ainsi le problème est résolu par les équations (1), (2), (3) ; il en résulte la règle suivante :

Divisez le rang assigné R successivement par 3 et par 4 et de manière que la première division ne donne pas un reste nul : si ce reste est 1, vous mettrez la première fois sur le jeu le tas qui contient la carte pensée ; si ce reste est 3, vous le mettrez sous le jeu ; et si ce reste est 2, vous le mettrez au troisième rang ; le second reste augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la seconde fois, et le second quotient augmenté de 1 vous donnera le rang où vous devez le mettre la troisième fois ; mais si la première fois le tas de la carte pensée a été mis le troisième, et que la troisième fois cette carte se trouve dans le premier des quatre tas, il faudra, après avoir ramassé les tas, faire passer sous le jeu la première carte du dessus.

Exemple I. — On veut que la carte pensée sorte la 37e.

37	3
1	12
	0

La première fois le tas de la carte pensée sera mis le premier, la seconde fois le premier, et la troisième fois le quatrième.

Exemple II. — On veut que la carte pensée sorte la 20e.

20	3
2	6
	2

La première fois le tas de la carte pensée sera mis le troisième, la seconde fois le troisième, et la troisième fois le second.

Exemple III. — On veut que la carte pensée sorte la 24e.

24	3
3	7
	3

Le tas de la carte pensée sera mis la première fois le quatrième, la seconde fois le quatrième, et la troisième fois le second.