PROBLÈME XIV

Disposer les cartes d'un jeu de piquet les unes à côté des autres, sur quatre rangées, dans un ordre qui permette de les retrouver l'une après l'autre.

Pour expliquer ce jeu, nous nommerons les cartes par leurs valeurs, qui sont 7, 8, 9, 10 pour les plus basses, 11 pour le valet, 12 pour la dame, 13 pour le roi et 14 pour l'as.

On dispose d'abord à découvert les quatre *sept* dans une première colonne; puis à la droite de chaque *sept* on place, également à découvert, les cartes de sa couleur les unes à la suite des autres dans l'ordre suivant :

7, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, pour le premier;
7, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 14, pour le second;
7, 12, 11, 10, 9, 8, 14, 13, pour le troisième;
7, 11, 10, 9, 8, 14, 13, 12, pour le quatrième.

On ramasse ensuite les cartes par colonne, les quatre *sept* exceptés, à partir de la gauche, en mettant, dans la première colonne, 14 sur 13, ces deux cartes sur 12, et ces trois cartes sur 11; on porte ces quatre cartes sur 13 de la seconde colonne, ces cinq cartes sur 12 de la même colonne, ces six cartes sur 11, puis celles-ci sur 10, et l'on passe de la même manière à la troisième colonne et à

chacune des suivantes, jusqu'à ce que les 28 cartes soient relevées.

On retourne alors le jeu, et, commençant par la carte du dessus, on met les 7 premières cartes en rangée à la droite du premier *sept*, les 7 suivantes à la droite du second *sept*, et ainsi de suite pour le troisième et le quatrième *sept*.

Il s'agit de trouver parmi ces 28 cartes cachées toute carte qui sera demandée par l'un des spectateurs.

Commençons par voir ce que sont devenues les cartes qui étaient primitivement dans la première rangée.

En considérant la manière dont on a ramassé les cartes et faisant attention qu'on a ensuite retourné le jeu, on voit facilement que les cartes en question se trouvent alors dans leur ordre naturel :

8, 9, 10, valet, dame, roi, as,

et qu'elles occupent dans le jeu les rangs :

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.

Si donc on demande l'une de ces cartes, la dame par exemple on comptera les cartes de 4 en 4, à partir de la quatrième, comme si les quatre rangées étaient les unes au bout des autres, en disant successivement 8, 9, 10, valet, dame, et la carte sur laquelle on aura prononcé le mot *dame* sera la carte demandée.

Quant aux cartes qui étaient dans la seconde rangée, on voit de la même manière que les premières :

8, 9, 10, valet, dame, roi,

se succèdent dans le jeu de 4 en 4, la première y occupant le 7e rang, en sorte que leurs rangs sont :

7, 11, 15, 19, 23, 27.

Quant à l'as, il occupe le 3e rang; mais cela revient à dire qu'il occupe le 31e rang, si après 27 on continue à compter 4 cartes en revenant à la première rangée lorsqu'on a compté la 28e carte. Ainsi, pour retrouver dans l'ordre naturel les cartes qui occupaient primitivement la seconde rangée, il suffit de compter les cartes de 4 en 4 à partir de la 7e, comme si toutes les rangées étaient les unes au bout des autres, et en revenant à la première rangée quand on est obligé de compter au delà de la 28e carte.

Le même examen fera voir qu'on retrouve dans leur ordre naturel les cartes qui occupaient primitivement la troisième et la quatrième rangée, en comptant aussi les cartes de 4 en 4, à partir de la 10e pour celles de la troisième rangée primitive, et à partir de la 13e pour celles de la quatrième rangée, en revenant toujours à la première rangée quand on est obligé de compter au delà de la 28e carte.

Les quatre *sept* qui restent à découvert pendant tout le temps que dure le jeu servent à rappeler constamment quelles étaient les cartes qui occupaient primitivement chaque rangée.

En général, si l'on désigne par n la valeur d'une carte qui était primitivement dans la rangée r, son rang R sera donné par la formule

$$R = 4(n-7) + 3(r-1).$$

Réciproquement, étant donné le rang R, on pourra nommer la carte.

Si R est multiple de 4, on aura

$$R = 4(n-7), \text{ d'où } n = \frac{R}{4} + 7,$$

et ce sera une carte qui était primitivement dans la première rangée.

Si R est multiple de 4 plus 3, on aura

$$R = 4(n-7) + 3, \text{ d'où } n = \frac{R-3}{4} + 7,$$

et ce sera une carte qui était primitivement dans la seconde rangée.

On voit de même que $\frac{R-6}{4} + 7$ et $\frac{R-9}{4} + 7$ donneront les cartes qui étaient primitivement dans la troisième et dans la quatrième rangée.

Quand on aura pour R l'un des nombres 1, 2, 3, 5, 6, 9, on y ajoutera 28 avant de faire le calcul

PROBLÈME XV

Une personne ayant choisi une carte, puis l'ayant remise dans le jeu, on se propose de faire sortir cette carte à tel rang qu'on voudra, après avoir mêlé les cartes plusieurs fois.

Il y a plusieurs manières de faire ce jeu; mais dans toutes on mêle les cartes de la même façon, et tout le secret du jeu consiste dans ce mélange; toutefois on le présente aux spectateurs comme ayant pour objet de mieux mêler les cartes, puisqu'en effet il les dispose à chaque fois de manière que deux cartes qui étaient ensemble se trouvent ensuite séparées.

Ce mélange consiste à placer la seconde carte sur la première, puis la troisième dessous, la quatrième dessus, la cinquième dessous, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

Pour la commodité des explications qui vont suivre, nous représenterons ces divers mélanges en plaçant les cartes sur une même ligne, comme on le voit ci-dessous pour 12 cartes.

PREMIÈRE DISPOSITION.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

PREMIER MÉLANGE.

12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, 11.

DEUXIÈME MÉLANGE.

11, 7, 3, 2, 6, 10, 12, 8, 4, 1, 5, 9.

TROISIÈME MÉLANGE.

9, 1, 8, 10, 2, 7, 11, 3, 6, 12, 4, 5.

Et ainsi des autres.

Cette sorte de mélange jouit de plusieurs propriétés dont chacune peut donner naissance à une façon particulière de faire le jeu.

La plus simple consiste en ce que si l'on a pris un nombre impair de cartes, la dernière ne change pas de place, comme on le voit par les 9 cartes suivantes :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9.

Si donc on a fait mettre sous le jeu la carte tirée par la personne, on saura qu'elle est toujours à la fin de la rangée, quel que soit le nombre de mélanges opérés ; par conséquent, en faisant passer sous le jeu un certain nombre de cartes de dessus, on donnera à la carte tirée tel rang qu'on aura assigné ou qui l'aura été par l'un des spectateurs. Si m est le nombre des cartes et r le rang de la carte, on fera passer sous le jeu $m-r$ cartes.

Les autres cartes se plaçant indépendamment de la dernière quand il y a un nombre impair de cartes, nous supposerons dans tout ce qui va suivre qu'on opère avec un nombre pair.

Examinons d'abord comment se succèdent les cartes primitives dans les différentes colonnes des dispositions successives :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12;
12,	10,	8,	6,	4,	2,	1,	3,	5,	7,	9,	11;
11,	7,	3,	2,	6,	10,	12,	8,	4,	1,	5,	9;
9,	1,	8,	10,	2,	7,	11,	3,	6,	12,	4,	5;
5,	12,	3,	7,	10,	1,	9,	8,	2,	11,	6,	4;
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Dans le premier mélange, les cartes de rang impair sont à droite, et les cartes de rang pair à gauche; en sorte qu'en désignant par $2n$ le nombre des cartes employées, on voit que sous les cartes

$$1, \quad 2, \ldots (n-1), n, (n+1), (n+2), (n+3), \ldots 2n,$$

se trouvent placées les cartes

$$2n, 2(n-1), \ldots 4, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 5, \ldots (2n-1);$$

en général, sous la carte $n+k$ de la première disposition, se trouve la carte $1+2(k-1)$ ou $2k-1$ de la seconde disposition : et sous la carte $n-k$ de la première disposition se trouve la carte $2+2k$ ou $2(k+1)$ de la seconde disposition. Si $k=0$, la seconde carte est 2.

En second lieu, deux cartes qui occupent le même rang dans deux dispositions successives occupent toujours le même rang et dans le même ordre dans deux autres dispositions successives. Par exemple, la carte 10 et la carte 7 sont au dixième rang dans les deux premières dispositions, au second dans la seconde et la troisième, au sixième dans la troisième et la quatrième, etc. C'est qu'en effet, si la carte 10 de la première disposition est venue au second rang dans la seconde disposition, la carte 7 de celle-ci doit venir au second rang dans la troisième; et ainsi des autres.

On peut conclure de là :

1° Qu'une carte ne peut se reproduire au même rang dans deux dispositions successives que si elle se reproduit ainsi dès le commencement; car si b se trouve sous a dans la deuxième disposition, b se trouvera aussi sous a dans la troisième, puis dans la quatrième, etc. ; par conséquent, b ne se trouverait jamais sous b.

2° Que si plusieurs cartes se reproduisent périodiquement à un même rang, cette reproduction aura lieu à partir de la carte a qui occupe ce rang dans la première disposition. Car si b, c, d sont les cartes placées successivement au-dessous de cette carte a, comme chacune d'elles est pour ainsi dire enchaînée à celle qui la précède, d ne revient que quand c est revenu, c a dû être précédé de b, et b de a; donc la périodicité commence à la première carte.

On voit, par ces explications, qu'une même carte peut se reproduire au même rang dans toutes les dispositions : c'est la seconde propriété du mélange. Soit la carte dont le rang primitif est $n-k$; comme la carte qui est au-dessous dans la seconde disposition est marquée par $2(k+1)$, il faut qu'on ait

$$n-k=2(k+1),$$

d'où l'on tire $k=\frac{n-2}{3}$, égalité qui exige que $n-2$ soit multiple de 3.

Soit, par exemple, $n-2=12$, d'où $n=14$; il en résulte $k=4$ et $n-k=10$, c'est-à-dire qu'en employant 28 cartes la 10e restera constamment au 10e rang. Si donc on sait que la carte tirée a été mise au 10e rang, elle s'y trouvera constamment, et l'on pourra la faire sortir ensuite à tel autre rang qu'on voudra, en faisant passer sous le jeu ou dessus un certain nombre de cartes prises dessus ou dessous.

Si l'on employait 22 cartes, on trouverait que la 8e carte reste constamment au 8e rang.

Il n'y a jamais qu'une seule carte jouissant de cette propriété, car on n'en trouve pas pour $n+k$, à moins qu'on n'emploie un nombre impair de cartes.

La troisième propriété du mélange consiste en ce que deux ou plusieurs cartes peuvent se succéder au même rang dans les diverses dispositions.

Soient, par exemple, les cartes dont les rangs sont $n-k$ et $n+l$ dans la première disposition.

On sait que sous $n-k$ de la première disposition se trouve $2(k+1)$ dans la seconde, et que sous $n+l$ de la première se trouve $2l-1$ dans la seconde; donc, pour que les cartes $n-k$ et $n+l$ se succèdent, il faut qu'on ait

$$2(k+1)=n+l \text{ et } 2l-1=n-k;$$

on tire de ces équations

$$k=\frac{3(n-1)}{5} \text{ et } l=\frac{n+4}{5}.$$

On voit qu'il suffit que $n-1$ soit multiple de 5. Si, par exemple, $n-1=10$, on aura $n=11$, $k=6$, $l=3$, $n-k=5$, $n+l=14$, c'est-à-dire qu'en employant 22 cartes la 5e et la 14e se succéderont alternativement au 5e rang, et en ordre inverse au 14e rang.

Avec 32 cartes on trouve que la 7e et la 20e se succèdent alternativement.

Si donc la carte tirée a été mise à l'un de ces rangs, on saura où elle se trouve après un nombre quelconque de mélanges, et par conséquent on pourra, comme on l'a déjà expliqué, lui faire occuper le rang qui aura été assigné.

On pourrait poursuivre cette recherche par un plus grand nombre de cartes : on trouverait par exemple qu'en employant 22 cartes, il y a succession des trois cartes 3, 18 et 13, ainsi que des quatre cartes 2, 20, 17, 11 ; mais ce que nous en avons dit nous semble bien suffisant pour un amusement (*a*).

La quatrième propriété du mélange consiste en ce que, après un certain nombre de mélanges égal au plus au nombre de cartes employées, les cartes se retrouvent dans l'ordre primitif.

Supposons qu'on ait écrit l'ordre primitif et les mélanges successifs les uns sous les autres comme nous l'avons fait précédemment pour 12 cartes. Dans la première colonne verticale de gauche, on trouvera les cartes :

$$\begin{array}{l} 1, \\ 2n, \\ 2n-1, \\ 2n-3, \\ 2n-7, \text{ etc.,} \end{array}$$

qui sont chacune, à partir de la seconde, la dernière carte du mélange précédent. Comme après la carte 1, nous ne disposons que de $2n-1$ cartes; si nous faisons $2n$ mélanges, il faudra que l'une au moins des cartes se trouve deux fois dans cette première colonne; il y aura donc périodicité; mais nous savons que la périodicité commence toujours à la première carte de chaque colonne; donc la carte 1 sera revenue dans la première colonne. Si ce retour s'est fait avec le $(2n)^e$ mélange, il en sera de même dans chaque colonne, car toutes les cartes se trouvant dans la première verticale

(*a*) Voir, pour plus de détails, un mémoire de Monge, dans le Recueil des Mémoires de l'Académie des sciences (*Savants étrangers*, t. VII, année 1773).

avec un retour périodique de $2n$ en $2n$, chacune d'elles ramène dans les autres colonnes les mêmes cartes que dans la première, en vertu de la dépendance reconnue précédemment. Donc l'ordre primitif sera rétabli après $2n$ mélanges; c'est ce qui arrive, par exemple, avec 14 cartes.

S'il y a des périodes particulières dans les autres colonnes, les cartes qui forment ces périodes ne se trouvant pas dans la première verticale, celle-ci contient un nombre de cartes moindre que $2n$; mais il sera tel que chacune des autres périodes s'accomplira une ou plusieurs fois exactement pendant la période de la première verticale; ainsi avec 22 cartes il y a quatre périodes contenant respectivement 1, 2, 3 et 4 cartes, en sorte qu'il reste 12 cartes pour la première verticale; par conséquent, quand la carte 1 y sera revenue, ces quatre périodes recommenceront, et les cartes seront revenues dans l'ordre primitif.

Il suffit donc de calculer le retour de la carte 1 dans la première verticale pour savoir après combien de mélanges l'ordre primitif est rétabli, ce qui peut se faire au moyen des formules :

$$2(k+1) \text{ qui succède à } n-k,$$

et

$$2k-1 \text{ qui succède à } n+k.$$

Soit, par exemple, à trouver combien il faudra de mélanges pour amener 32 cartes dans l'ordre primitif.

On a :

$$\begin{aligned} 32 &= 16+16; & 2.16-1 &= 31; \\ 31 &= 16+15; & 2.15-1 &= 29; \\ 29 &= 16+13; & 2.13-1 &= 25; \\ 25 &= 16+9; & 2.9-1 &= 17; \\ 17 &= 16+1; & 2.1-1 &= 1; \end{aligned}$$

donc il faudra 6 mélanges.

Prenons encore 28 cartes :

On a

$$\begin{aligned} 28 &= 14+14; & 2.14-1 &= 27; \\ 27 &= 14+13; & 2.13-1 &= 25; \\ 25 &= 14+11; & 2.11-1 &= 21; \\ 21 &= 14+7; & 2.7-1 &= 13; \\ 13 &= 14-1; & 2(1+1) &= 4; \\ 4 &= 14-10; & 2(10+1) &= 22; \\ 22 &= 14+8; & 2.8-1 &= 15; \\ 15 &= 14+1; & 2.1-1 &= 1; \end{aligned}$$

ainsi il faudra 9 mélanges.

On peut aussi résoudre la question sans calcul, au moyen des deux premières dispositions; soient 12 cartes.

PREMIÈRE DISPOSITION.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

PREMIER MÉLANGE.

12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Au-dessous de 12 on a 11; au-dessous de 11, 9; au dessous de 9 on a 5; au-dessous de 5, 4; au-dessous de 4 on a 6; au-dessous de 6, 2; au-dessous de 2 on a 10; au-dessous de 10, 7; au-dessous de 7 on a 1. On a ainsi parcouru 10 nombres depuis 12 jusqu'à 1; donc il faudra 10 mélanges.

D'après cela, ayant fait tirer une carte dans un jeu de 32, par exemple, on la fait remettre dans le jeu, et l'on compte rapidement le rang où elle se trouve, ce qui peut se faire de diverses manières que chacun imaginera facilement, comme de présenter le jeu en éventail avec des cartes un peu saillantes de 8 en 8, de retarder d'une manière quelconque l'introduction de la carte pour se don-

ner le temps de compter, etc. D'ailleurs, si l'on n'a pas réussi dans cette préparation, on donnera le jeu à la personne en la priant de voir à quel rang se trouve la carte qu'elle a tirée, et d'en garder le souvenir.

On annonce alors le rang auquel on fera sortir la carte, et l'on fait les 6 mélanges. Si l'on n'a pas pu savoir le rang de la carte tirée, on le demandera à la personne après avoir fait deux ou trois mélanges; puis, après le sixième, on fera passer le nombre de cartes nécessaire pour que la carte tirée sorte au rang qu'on lui a assigné.

Si l'on trouve qu'il soit trop long de faire 6 mélanges de 32 cartes, on n'en prendra que 16, et 5 mélanges suffiront; on remarquera de plus que la 6e carte restera constamment au 6e rang.

NOTES

NOTE I

SUR LES MULTIPLES COMMUNS

1. *Le plus petit commun multiple de deux nombres* A *et* B *est égal à leur produit divisé par leur plus grand commun diviseur* D, *c'est-à-dire* $\frac{AB}{D}$.

Soient, en effet, A' et B' les quotients de A et B par leur plus grand commun diviseur D. Un multiple mA de A est égal à $mA'D$; pour qu'il soit aussi multiple de B ou $B'D$, il faut qu'il soit divisible successivement par D et par B', c'est-à-dire que mA' soit divisible par B'; et comme A' et B' sont premiers entre eux, il faut que m soit divisible par B'; d'ailleurs cette condition est suffisante; donc n étant le quotient de m par B', les multiples communs aux deux nombres A et B sont tous les nombres compris dans la formule

$$nA'B'D;$$

le plus petit est donc $A'B'D$, c'est-à-dire $A'B$ ou AB', ou encore $\frac{AB}{D}$. Les autres sont les multiples de ce plus petit commun multiple.

Si l'on a trois nombres A, B, C, on prendra le plus grand commun diviseur D' de AB' et C, et en désignant par C' le quotient $\frac{C}{D'}$, on aura $AB'C'$ pour le plus petit commun multiple des trois nombres A, B, C.