NOTE III

Trouver un nombre qui, divisé par des nombres donnés, laisse des restes assignés.

Supposons d'abord qu'il n'y ait que deux diviseurs a et b et que les restes doivent être p et q. Le nombre cherché est également représenté par $\dot{a}+p$ et par $\dot{b}+q$; on doit donc avoir $\dot{b}+q=\dot{a}+p$; et par suite

$$\dot{b}=\dot{a}+(p-q) \quad \text{ou} \quad \dot{b}=\dot{a}-(q-p),$$

suivant que p sera plus grand ou plus petit que q. Ainsi la question est ramenée à trouver un multiple de b égal à un multiple de a augmenté de $p-q$ ou diminué de $q-p$, problème résolu dans la Note II.

Soit, par exemple, à trouver un nombre qui, divisé par 117, donne pour reste 29, et qui, divisé par 83, donne pour reste 33

On doit avoir $\dot{\overline{83}}+33=\dot{\overline{117}}+29$ ou $\dot{\overline{83}}=\dot{\overline{117}}-4$.

Voici les calculs :

	1	2	2
117	83	34	15
34	15	4	

Comme l'opération amène le reste 4, il suffira d'employer les diviseurs 1, 2, 2 (Note II) :

1, 2, 2
5, 2, 1.

Ainsi $\quad 5.117=\dot{\overline{83}}+4$ ou $\dot{\overline{83}}=5.117-4$;

le nombre cherché est donc $5.117+29$ ou 614.

Considérons maintenant trois diviseurs a, b, c, les restes étant p, q, r. Nous chercherons d'abord le nombre qui satisfait à l'égalité

$$\dot{b}+q=\dot{a}+p,$$

comme dans le cas de deux diviseurs. Soit $ma+p$ ce nombre ; si étant divisé par c il ne donne pas le reste r, il faut le modifier de manière qu'il satisfasse à cette condition sans cesser de donner pour restes p et q quand on le divise par a et par b, c'est-à-dire qu'il faut l'augmenter d'un multiple commun de a et b : on prendra donc le plus petit commun multiple M de a et b, puis on fera les calculs nécessaires pour satisfaire à l'égalité

$$\dot{c}+r=\dot{M}+ma+p$$

ou

$$\dot{c}=\dot{M}+ma+p-r.$$

Soit, par exemple, à trouver le plus petit nombre qui, divisé par 67, 15 et 7, donne les restes 10, 13 et 5. Prenons d'abord l'égalité

$$\dot{\overline{15}}+13=\dot{\overline{67}}+10 \qquad (1)$$

ou

$$\dot{\overline{15}}=\dot{\overline{67}}-3$$

	4	2		
67	15	7	4,	2
7	1		2,	1

on a $\quad 2.67=\dot{\overline{15}}-1$;

donc $\quad 13.67=\dot{\overline{15}}+1$,

et $\quad 39.67=\dot{\overline{15}}+3$;

le plus petit commun multiple de 67 et 15 est 67×15 ou 1005, et l'on a $39=\dot{\overline{15}}+9$; donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$9.67=\dot{\overline{15}}+3;$$

et l'on en conclut que le premier nombre résultant de l'égalité (1) est $9.67+10$ ou 613 ; les autres sont compris dans la formule $\overline{1005}+613$.

Nous aurons donc, en prenant le troisième diviseur,

$$\dot{7}+5=\overline{1005}+613 \qquad (2)$$

ou

$$\dot{7}=\overline{1005}+608.$$

	143
1005	7
30	
25	
4	

La première division donnant le reste 4 qui divise 608, il est inutile d'aller plus loin

$$1005=\dot{7}+4;$$

donc

$$\dot{7}=6.1005+4$$

et

$$\dot{7}=152.6.1005+608;$$

le plus petit commun multiple de 1005 et 7 est 1005×7, et l'on a 152×6 ou $912=\dot{7}+2$; donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\dot{7}=2.1005+608,$$

et l'on en conclut que le nombre cherché est

$$2.1005+613 \text{ ou } 2623.$$

La même méthode s'appliquera évidemment, quel que soit le nombre des diviseurs.

Soit, par exemple, à trouver le plus petit nombre qui, divisé par 47, 102, 140 et 183, donne les restes 30, 63, 99 et 9.

Prenons d'abord les deux diviseurs 47 et 102 dont le plus petit commun multiple est 47×102 ou 4794. On doit avoir

$$\overline{47}+30=\overline{102}+63 \qquad (1)$$

ou

$$\overline{47}=\overline{102}+33.$$

	2	5	1			
102	47	8	7	2,	5,	1
8	7	1			6,	1, 1

Ainsi

$$6.102=\overline{47}+1;$$

donc

$$\overline{47}=41.102+1,$$

et

$$\overline{47}=33.41.102+33;$$

mais on a

$$33.41 \text{ ou } 1353=\overline{47}+37;$$

donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\overline{47}=37.102+33;$$

on en conclut que le premier nombre qui résulte de l'égalité (1) est $37.102+63$ ou 3837 ; les autres sont compris dans la formule

$$\overline{4794}+3837.$$

En prenant le troisième diviseur 140, on devra avoir

$$\overline{140}+99=\overline{4794}+3837 \qquad (2)$$

ou

$$\overline{140}=\overline{4794}+3738$$

	34	4	8			
4794	140	34	4	34,	4,	8
594	4	2			33,	8, 1
34						

Ainsi

$$33.4794=\overline{140}+2;$$

donc

$$\overline{140}=107.4794+2$$

et

$$\overline{140}=1869.107.4794+3738;$$

le plus petit commun multiple de 140 et 4794 est 70×4794 ou 335580, et l'on a

$$1869.107 \text{ ou } 199983=\overline{70}+63;$$

donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\overline{140}=63.4794+3738,$$

et l'on en conclut que le premier nombre résultant de l'égalité (2) est

$$63.4794 + 3837 \quad \text{ou} \quad 305859;$$

les autres sont compris dans la formule

$$\overline{335580}^{\cdot} + 305859.$$

On aura donc, en prenant le quatrième diviseur 183,

$$\overline{183}^{\cdot} + 9 = \overline{335580}^{\cdot} + 305859 \qquad (3)$$

ou

$$\overline{183}^{\cdot} = \overline{335580}^{\cdot} + 305850$$

	1833	1	3			
335580	183	141	42	1833,	1,	3,
1525	42	15			4,	3, 1,
618						
690						
141						

Ainsi $\quad 4.335580 = \overline{183}^{\cdot} + 15;$

donc $\quad \overline{183}^{\cdot} = 179.335580 + 15$

et $\quad \overline{183}^{\cdot} = 20390.179.335580 + 305850.$

Le plus petit commun multiple de 183 et 335580 est 61.335580; et l'on a

$$20390.179 \quad \text{ou} \quad 3649810 = \overline{61}^{\cdot} + 58;$$

donc la dernière égalité peut être remplacée par

$$\overline{183}^{\cdot} = 58.335580 + 305850;$$

d'où l'on conclut que le nombre cherché est

$$58.335580 + 305859 \quad \text{ou} \quad 19769499.$$

NOTE IV

1. *Si au-dessous des nombres* 1, 2, 3, *on écrit des nombres inégaux* a, b, c *de toutes les manières possibles*

1, 2, 3;	1, 2, 3;	1, 2, 3;
a, b, c;	a, c, b;	b, a, c;
1, 2, 3;	1, 2, 3;	1, 2, 3;
c, a, b;	b, c, a;	c, b, a;

puis qu'à chaque fois on fasse la somme des produits qu'on obtient en multipliant les nombres a, b, c *respectivement par les nombres placés au-dessus d'eux, les six sommes obtenues de cette manière*

$$\begin{aligned} &a + 2b + 3c,\\ &a + 2c + 3b,\\ &b + 2a + 3c,\\ &c + 2a + 3b,\\ &b + 2c + 3a,\\ &c + 2b + 3a, \end{aligned}$$

seront toutes différentes si le nombre moyen b *n'est pas égal à la demi-somme des deux autres.*

D'ABORD, si $b = \frac{a+c}{2}$, on constate que les deux sommes $a + 2c + 3b$ et $b + 2a + 3c$ sont égales, et qu'il en est de même des deux sommes

$$c + 2a + 3b \quad \text{et} \quad b + 2c + 3a.$$

On constate ensuite que si a est le plus petit nombre et c le plus

grand, les six sommes écrites précédemment sont décroissantes si l'on a $b > \frac{a+c}{2}$; mais que si l'on a $b < \frac{a+c}{2}$, les sommes se rangent dans l'ordre décroissant de cette autre manière :

$$\begin{aligned} &a + 2b + 3c, \\ &b + 2a + 3c, \\ &a + 2c + 3b, \\ &b + 2c + 3a, \\ &c + 2a + 3b, \\ &c + 2b + 3a. \end{aligned}$$

Remarque. En général, si l'on veut trouver quels nombres $m, n, p \ldots$ il faut placer sous des nombres $a, b, c, \ldots$ pour obtenir des sommes différentes :

$$\begin{aligned} &am + bn + cp + \ldots \\ &an + bm + cp + \ldots \\ &am + bp + cn + \ldots, \text{ etc.} \end{aligned}$$

lorsqu'on permute les nombres $m, n, p, \ldots$ de toutes les manières possibles sous les nombres $a, b, c, \ldots$, il faut former ces diverses sommes, puis les égaler deux à deux, ce qui fournit un certain nombre de relations entre $m, n, p, \ldots$, et choisir ensuite ces nombres de manière qu'ils ne satisfassent pas aux relations obtenues. Il y aura toujours un ou plusieurs des nombres $m, n, p, \ldots$ qui pourront recevoir des valeurs arbitraires.

Par exemple, si les nombres $a, b, c, \ldots$ sont 1, 2, 3, 4, et qu'on prenne 1, 2, p, q pour les nombres de la seconde série, on trouvera qu'il faut qu'on ait $p > 4$; et si l'on prend $p = 5$, les autres relations aboutiront à $q > 14$: on pourra donc prendre 1, 2, 5, 15 pour les nombres de la seconde série.

Tous ces calculs sont assez laborieux (*a*); mais il y a une solution générale qui dispense d'y avoir recours : elle est donnée par le théorème suivant :

(*a*) V. *Correspondance de l'École polytechnique*, t. III.

2. *Étant donnés les nombres*

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots l,$$

dont le plus grand est l, *si l'on place sous ces nombres des puissances différentes d'un nombre* N *égal ou supérieur à* 1,

$$N^p, \ldots N^q, \ldots N^r, \ldots N^s, \ldots$$

puis qu'on multiplie chacune d'elles par le nombre sous lequel elle est placée, et qu'on fasse la somme des produits, telle que

$$bN^p + dN^q + gN^r + iN^s + \ldots,$$

cette somme prendra des valeurs différentes pour toutes les dispositions que l'on pourra donner aux puissances de N *sous les nombres* 1, 2, 3, 4, ... l.

Soit une somme provenant d'une disposition différente de la précédente,

$$b'N^p + d'N^q + g'N^r + i'N^s + \ldots,$$

et pour fixer les idées, supposons que les exposants soient disposés dans l'ordre décroissant.

Si nous prenons la différence des deux sommes, nous aurons une expression de la forme

$$b''N^p \pm d''N^q \pm g''N^r \pm i''N^s \ldots;$$

si tous les termes qui suivent le premier sont précédés du signe —, elle est égale à

$$b''N^p - d''N^q - g''N^r - i''N^s - \ldots,$$

et dans le cas contraire elle est supérieure à cette dernière quantité. Or, je dis que cette quantité est positive.

En effet, l'ensemble des deux premiers termes revient à

$$(b''N^{p-q} - d'')\,N^q,$$

quantité positive, parce que d'', différence de deux coefficients d et d' dont le plus grand est au plus égal à l, est moindre que l et par suite moindre que N ; l'ensemble de ces deux premiers termes se réduit donc à une quantité positive δN^q. En y ajoutant le terme suivant $- g'' N^r$,

on prouvera de même que l'on a une quantité positive γN^r; et ainsi de suite pour tous les autres. La différence de deux sommes quelconques ne pouvant pas être nulle, on en conclut que toutes les sommes obtenues sont différentes les unes des autres.

Remarque. S'il y a m nombres 1, 2, 3,... et n puissances de N, on pourra placer celles-ci sous les premiers nombres, d'autant de manières qu'il y a d'arrangements de m objets pris de n à n; et s'il y a aussi m puissances de N, le nombre des dispositions sera égal au nombre des permutations de m objets.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

A M. le comte de Tournon 1
Sonnet à M. de Méziriac 3
Autre sonnet 5
Préface. Au lecteur 7
Préface de la troisième édition 11
Problèmes 15
S'ensuivent quelques autres petites subtilités des nombres qu'on propose ordinairement 135
Supplément aux problèmes plaisants et délectables 181
Notes 223

Paris. — Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.