aceleracion en Mexico, 9'786

PROBLÈMES

PROBLÈMES SUR LA PESANTEUR ET L'HYDROSTATIQUE

I. *On a laissé tomber une pierre au fond d'un puits, et l'on a entendu le bruit de la chute au bout de 4 secondes et demie. Quelle est la profondeur du puits? — On supposera que le son se propage d'un mouvement uniforme, avec une vitesse de 340 mètres par seconde.*

Solution. — Représentons par T le temps écoulé entre le départ de la pierre et le moment où le bruit de la chute est parvenu à l'oreille : soit t la durée de la chute, et x la profondeur inconnue du puits. En désignant par g l'intensité de la pesanteur, on aura

$$x = \frac{1}{2} g t^2. \tag{1}$$

D'autre part, le bruit de la chute a mis, pour parvenir à l'oreille, un temps $T - t$; donc, si v est la vitesse de propagation du son, on a

$$x = v(T - t); \qquad \text{d'où} \qquad t = T - \frac{x}{v};$$

en substituant cette valeur de t dans l'équation (1), on arrive à l'équation du second degré

$$x^2 - 2\left(vT + \frac{v^2}{g}\right)x + v^2T^2 = 0;$$

d'où l'on tirera, réductions faites,

$$x = vT + \frac{v^2}{g} \pm \sqrt{\left(2vT + \frac{v^2}{g}\right)\frac{v^2}{g}}.$$

Or, remarquons que la hauteur x du puits doit être inférieure au produit vT, qui exprimerait l'espace parcouru par le son dans le temps T : donc la valeur de x qui correspond au signe négatif du radical est la seule qui convienne au problème actuel. En remplaçant les lettres par leurs valeurs numériques, on trouve $x = 88^m,2$.

II. *Un corps étant placé dans l'un des plateaux d'une balance, on constate qu'il faut, pour lui faire équilibre, placer dans l'autre plateau un poids de 3 kilogrammes. Le même corps étant placé dans l'autre plateau, on trouve qu'il faut, pour lui faire équilibre, placer dans le premier plateau un poids de 3600 grammes. On demande quel est le poids du corps, et quel est le rapport qui existe entre les longueurs des deux bras de la balance.*

Solution. — Soit x le poids du corps en kilogrammes, a la longueur du bras à l'extrémité duquel il a été placé dans le premier équilibre, b la longueur de l'autre bras : on aura, en considérant successivement les deux équilibres,

$$\frac{x}{3} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{x}{3,6} = \frac{a}{b}$$

En multipliant ces équations membre à membre, il vient

$$\frac{x^2}{3\times 3{,}6}=1;\quad \text{d'où}\quad x=\sqrt{3\times 3{,}6}=3^{\text{kil}},286.$$

En divisant membre à membre l'équation (2) par l'équation (1), on trouve

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{3{,}6};\quad \text{d'où}\quad \frac{a}{b}=0{,}913.$$

III. *Le petit piston d'une presse hydraulique a une section de 15 centimètres carrés; la pression qu'on exerce sur lui est de 40 kilogrammes. On demande : 1° quelle pression exercera le gros piston, quand il cessera de pouvoir s'élever, en supposant que sa section soit de 3 décimètres carrés; 2° quelle section on devrait donner au gros piston, pour qu'il pût exercer une pression de 2000 kilogrammes.*

Solution. — 1° La pression exercée par le petit piston sur chaque centimètre carré est $\frac{40^{\text{kil}}}{15}$; donc la pression transmise à la surface inférieure du gros piston sera $\frac{40^{\text{kil}}}{15}\times 300$, ou 800 kilogrammes; ce sera aussi la pression que ce piston pourra exercer sur le corps soumis à son action.

2° Pour que le gros piston pût exercer une pression de 2000 kilogrammes, il faudrait que sa section contînt autant de centimètres carrés que 2000 kilogrammes contiennent de fois $\frac{40^{\text{kil}}}{15}$, c'est-à-dire que sa section fût égale à $2000:\frac{40}{15}$, ou 750 centimètres carrés.

IV. *On a un tonneau auquel on a adapté, comme le représente la figure 58, un tube dont la hauteur est de 4 mètres et le rayon de 5 millimètres. Ce tonneau est formé de deux cônes tronqués, réunis par leur grande base : le rayon de la grande base est de 30 centimètres; le rayon de l'autre est de 23 centimètres. La hauteur totale du tonneau est de 50 centimètres. L'appareil est rempli d'eau jusqu'à l'extrémité supérieure du tube. Calculer : 1° la pression supportée par la base inférieure du tonneau; 2° la pression supportée par sa base supérieure; 3° le poids de l'eau contenue dans l'appareil.*

Solution. — Nous nous contenterons d'indiquer les résultats, qui sont faciles à obtenir d'après les principes connus (72 à 77). 1° La pression supportée par la base inférieure est $747^{\text{kil}},864$; 2° la pression supportée par la base supérieure est $664^{\text{kil}},448$; 3° le poids total de l'eau contenue dans l'appareil est $110^{\text{kil}},958$.

V. *Un seau de bois, du poids de 6 kilogrammes, et d'une capacité de 20 litres, est rempli d'une pâte liquide, formée de kaolin (terre à porcelaine) et d'eau. Il pèse alors $36^{\text{kil}},4$. On demande le poids du kaolin et celui de l'eau, sachant que la densité du kaolin sec est 2,3.*

Solution. — Si le seau était rempli uniquement de kaolin sec, comme sa capacité est de 20 litres, son poids serait

$$6^{\text{kil}}+2^{\text{kil}},3\times 20,\qquad \text{c'est-à-dire } 52^{\text{kil}}.$$

Si l'on enlevait 1 litre de kaolin, pour le remplacer par 1 litre d'eau, ce poids de 52 kilogrammes subirait une diminution de $2^{\text{kil}},3-1^{\text{kil}}$, ou de $1^{\text{kil}},3$. Or, l'excès de 52 kilogrammes sur $36^{\text{kil}},4$ est $15^{\text{kil}},6$; donc, autant de fois ce nombre contiendra $1^{\text{kil}},3$, autant il y aura de litres d'eau dans la pâte. Le quotient de 15,6 par 1,3 est 12; le seau contient donc 12 litres ou 12 kilogrammes d'eau. Le volume du kaolin étant de 20 — 12 ou de 8 litres, le poids de cette matière est $2^{\text{kil}},3\times 8$, c'est-à-dire $18^{\text{kil}},4$.

VI. *On a un cylindre d'acier, de 22 centimètres de longueur, qu'on voudrait lester avec un cylindre de platine de même diamètre, de manière qu'il se tînt verticalement flottant dans du mercure, la partie non plongée du cylindre d'acier n'étant que de 2 centimètres. Quelle longueur faut-il donner au cylindre de platine?* (Baccalauréat, Paris.)

Solution. — Désignons par d la densité du platine, par d' celle de l'acier et par d'' celle du mercure; appelons x la longueur du cylindre de platine. Exprimons que le poids du corps plongé et le poids du mercure déplacé sont égaux entre eux; nous aurons

$$dx+22d'=(20+x)d'';$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{20d''-22d'}{d-d''};$$

et il suffira de remplacer d, d' et d'' par leurs valeurs, pour avoir la valeur numérique de x.

VII. *Quel est le rapport des poids* x *et* y *de deux cylindres de fer et de platine qu'il faudrait fixer l'un à l'autre, pour que le système pût se maintenir en équilibre au milieu du mercure? — Densité du fer, 7,8; densité du platine, 21; densité du mercure, 13,6.*

Solution. — Les poids des cylindres étant x et y, leurs volumes seront respectivement $\frac{x}{7{,}8}$ et $\frac{y}{21}$. Le volume du mercure déplacé sera égal à la somme de ces volumes, et le poids du mercure déplacé sera $\left(\frac{x}{7{,}8}+\frac{y}{21}\right)13{,}6$. Ce poids devant être égal à la somme des poids des deux cylindres, on aura :

$$\left(\frac{x}{7{,}8}+\frac{y}{21}\right)13{,}6=x+y;$$

d'où

$$x\left(\frac{13{,}6}{7{,}8}-1\right)=y\left(1-\frac{13{,}6}{21}\right),$$

ce qui donne

$$\frac{x}{y}=0{,}474.$$

VIII. *Un morceau de platine et une boule de cire se font équilibre dans les plateaux d'une balance parfaitement juste. Calculer le rapport des poids de ces deux corps, en tenant compte de la poussée qu'ils éprouvent de la part de l'air. — Poids spécifique du platine, 21; poids spécifique de la cire, 0,96; poids spécifique de l'air, 0,0013.*

Solution. — Soit p le poids du platine; son volume, exprimé en unités correspondantes, est $\frac{p}{21}$, et par suite le poids de l'air qu'il déplace est $\frac{p}{21}\times 0{,}0013$. De même, p' étant le poids de la cire, le poids de l'air qu'elle déplace est $\frac{p'}{0{,}96}\times 0{,}0013$. Or, les poids apparents de ces deux corps dans l'air étant égaux, on a

$$p-\frac{p}{21}\times 0{,}0013=p'-\frac{p'}{0{,}96}\times 0{,}0013;$$

d'où l'on déduira facilement

$$\frac{p}{p'}=\frac{21\,(0{,}96-0{,}0013)}{0{,}96\,(21-0{,}0013)}=\frac{20{,}132700}{20{,}158752}=0{,}9987.$$

IX. *Une sphère de platine et un cylindre de cuivre, ayant même diamètre, sont suspendus aux deux extrémités d'une balance parfaitement juste, et plongent, la première, dans du mercure; le second, dans l'eau. Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que le fléau se tienne horizontal? — Poids spécifique du platine, 22; poids spécifique du cuivre, 8,8; poids spécifique du mercure, 13,6.*

Solution. — Soit d le diamètre commun de la sphère et du cylindre, h la hauteur inconnue du cylindre; on verra facilement que le poids apparent de la sphère de platine dans le mercure est $\frac{1}{6}\pi d^3(22-13,6)$; le poids apparent du cylindre de cuivre dans l'eau est $\frac{1}{4}\pi d^2 h(8,8-1)$. En égalant ces deux expressions, supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}\pi d^2$, et effectuant les calculs, on arrive à l'équation

$$h \times 3,9 = d \times 2,8; \quad \text{d'où} \quad h = d \times 0,718.$$

L'équilibre aura lieu, pour une valeur quelconque du diamètre commun de la sphère et du cylindre, si la hauteur du cylindre est égale aux 0,718 de ce diamètre.

X. *Un cylindre de bois de sapin, de 2 centimètres carrés de base sur 30 centimètres de hauteur, flotte sur l'eau, ses arêtes étant verticales. On demande : 1° quelle est la longueur de la partie immergée? 2° quel devrait être le diamètre d'une sphère de plomb qu'on suspendrait au-dessous du cylindre, et qui le ferait plonger de 25 centimètres? — On sait que la densité du bois de sapin est* 0,66, *et celle du plomb* 11,35.

Solution. — 1° Le poids du cylindre de sapin, exprimé en grammes, est de $2 \times 30 \times 0,66$ ou de $39^{gr},6$: d'après le principe des corps flottants (89), ce nombre exprime aussi le poids de l'eau déplacée. Mais, si l'on connaissait la longueur de la portion immergée, le poids de l'eau déplacée pourrait s'obtenir aussi en multipliant cette longueur par la base du cylindre, c'est-à-dire par 2 : si donc on divise 39,6 par 2, le quotient 19,8 sera, en centimètres, la longueur cherchée.

2° Pour trouver le diamètre d de la sphère de plomb qui ferait plonger le cylindre de 25 centimètres, nous exprimerons que le poids du cylindre, augmenté de celui de la sphère, est égal au poids de l'eau déplacée par la portion immergée, plus le poids de l'eau déplacée par la sphère. Nous aurons ainsi :

$$39,6 + \frac{1}{6}\pi d^3 \times 11,35 = 2 \times 25 + \frac{1}{6}\pi d^3.$$

En simplifiant cette équation, et calculant d par logarithmes, on trouve

$$d = 1^c,24.$$

XI. *Un morceau de fer plongé dans un vase plein d'eau en a fait sortir 10 grammes. Mis dans un vase plein de mercure, il y flotte en déplaçant 78 centimètres cubes de ce dernier liquide. On demande le poids, le volume et la densité du morceau de fer.* (Baccalauréat, Paris.)

On trouvera facilement que le volume est 10 centimètres cubes; le poids est $106^{gr},002$; la densité est 10,6.

XII. *Un aréomètre de Baumé, destiné aux liquides plus denses que l'eau, marque 66 degrés dans l'acide sulfurique concentré. Quel est la densité de cet acide, sachant que la densité de la solution saline qui a servi à marquer le 15° degré de l'instrument est* 1,1136?

Solution. — Soit l'aréomètre représenté par la figure 92; appelons V le volume de liquide, exprimé en centimètres cubes, qu'il déplace quand il affleure au zéro, et v le volume de liquide que déplace une division de l'instrument. Quand l'aréomètre flotte dans l'eau, il affleure au zéro; le volume de l'eau déplacée est donc V centimètres cubes, et le poids de cette eau est V grammes; ce nombre exprime aussi le poids du corps flottant (89). Quand l'aréomètre flotte dans l'acide sulfurique, il affleure au 66° degré; le volume de l'acide déplacé est donc $V-66v$, et le poids de cet acide, exprimé en grammes, est $(V-66v)\,x$, x désignant la densité cherchée : ce nombre $(V-66v)x$ exprime aussi le poids du corps flottant. Enfin, quand l'aréomètre flotte dans la solution saline dont la densité est 1,1136, et qu'il affleure au

15° degré, le poids du liquide déplacé est $(V-15v)\,1,1136$; c'est encore une expression du poids du corps flottant.

Si l'on égale successivement la première de ces expressions du poids de l'aréomètre à chacune des deux autres, on aura deux équations, savoir :

$$V = (V-66v)x,$$
$$V = (V-15v)1,1136.$$

Chaque terme de ces équations renfermant soit V, soit v, nous n'avons en réalité que deux inconnues, x et $\frac{v}{V}$; en posant $\frac{v}{V} = r$ et divisant les deux membres de chaque équation par V, nous aurons

$$1 = (1-66r)x,$$
$$1 = (1-15r)\,1,1136.$$

La seconde donne $r = \frac{0,1136}{16,7040}$ ou $r = \frac{1136}{167040}$; en substituant dans la première, et résolvant par rapport à x, il vient

$$x = \frac{167040}{92064} = \frac{5220}{2877} = 1,814.$$

La densité cherchée est donc 1,814.

XIII. *Un aréomètre de Baumé, destiné aux liquides moins denses que l'eau (fig. 93), est plongé dans l'alcool absolu ayant pour densité* 0,804. *A quel degré affleure-t-il dans ce liquide, sachant que la densité de la solution qui a servi à marquer le zéro est* 1,0855?

Solution. — Ce problème se traitera comme celui qui précède. — L'aréomètre, plongé dans l'alcool absolu, marque 30°,9.

XIV. *Un cylindre vertical* R *contenant du mercure (fig. 125) communique par sa base, au moyen d'un tube latéral, avec un long tube vertical* S, *ouvert à sa partie supérieure : au-dessus du mercure, dans le cylindre, est une couche d'eau ayant 40 centimètres de hauteur, et sur laquelle on exerce une pression au moyen d'un piston* P *ayant 25 centimètres carrés de surface. Quelle devra être la valeur de cette pression, en kilogrammes, pour que le mercure s'élève dans le tube vertical* S *à 8 mètres au-dessus de la surface* ab *de ce même liquide dans le cylindre?*

Solution. — La pression exercée en ab, sur une surface déterminée, doit être égale à la pression exercée par le mercure sur une surface égale, prise dans le tube S, sur le même plan horizontal. Or, la pression exercée par le mercure, dans le tube S, sur 1 centimètre carré pris au niveau de ab, sera exprimée, en grammes, par le produit $800 \times 13,6$, ou 10 880 grammes. D'autre part, au-dessus de ab, dans le cylindre, est une colonne d'eau dont la hauteur est 40 centimètres, et qui exerce, par son poids seul, une pression sur 1 centimètre carré égale à 40 grammes. Donc la pression exercée par le piston sur 1 centimètre carré devra être $10\,880 - 40$, ou 10 840 grammes, et la pression exercée sur le piston tout entier devra être $10\,840 \times 25 = 271\,000$ grammes ou 271 kilogrammes.

XV. *Un ballon contenant de l'air à la pression de 770 millimètres de mercure est ajusté, au moyen d'une monture à robinet, à la partie supérieure d'un baromètre à cuvette, dont le tube a une section de 2 centimètres carrés et une longueur de 90 centimètres au-dessus du niveau du mercure dans la cuvette. La pression extérieure étant de 760 millimètres, on ouvre le robinet; le mercure s'abaisse dans le tube, de telle sorte que sa surface ne se trouve plus qu'à 10 centimètres au-dessus du niveau dans la cuvette. On demande d'en déduire la capacité du récipient, en supposant que la température soit restée invariable pendant l'expérience.*

Solution. — Soit x le volume du récipient, exprimé en centimètres cubes. Avant l'ouverture du robinet, le volume d'air contenu dans l'appareil est x, sa pression est 770 millimètres; quand le robinet est ouvert, le volume de cet air devient $x+2(90-10)$, ou $x+160$, et sa pression est 760—100 millimètres, ou 660 millimètres. D'après la loi de Mariotte, le produit de chacun de ces volumes par la pression correspondante étant constant (141), on a :

$$x \times 770 = (x+160)660;$$

d'où l'on tirera $x = 960^{cc}$.

XVI. *On a construit un baromètre à cuvette sans se préoccuper d'en chasser complètement l'air, de sorte que la chambre barométrique contient une quantité inconnue de ce gaz. On fait une première observation, dans laquelle on mesure successivement la hauteur de la colonne de mercure, qui est 748 millimètres, et la longueur de la chambre barométrique, qui est 122 millimètres. On soulève alors un peu le tube, et l'on constate que la hauteur du liquide devient 750 millimètres, la chambre barométrique acquérant une longueur de 141 millimètres. Quelle est la pression atmosphérique au moment de l'expérience, en supposant que le tube soit bien cylindrique, au moins dans sa partie supérieure ?* (*)

Solution. — Soit x la pression atmosphérique inconnue. Dans la première observation, le volume de l'air, représenté par la longueur qu'il occupe dans le tube, est 122; sa force élastique est $x-748$. Dans la seconde observation, le volume de cet air est 141; sa force élastique est $x-750$. On a donc ;

$$(x-748)122 = (x-750)141;$$

d'où l'on tirera $x = 762^{mm},8$.

XVII. *Un cylindre ayant une capacité de 3 litres, et contenant de l'air, est muni de deux tubes horizontaux A et B, adaptés au voisinage de sa partie supérieure et garnis de robinets. Le premier tube A communique avec un long tube vertical descendant, dont l'extrémité ouverte plonge dans une cuvette à mercure : le robinet de A étant seul ouvert, on constate que le liquide s'élève dans ce tube vertical à 250 millimètres au-dessus de son niveau extérieur. Le tube B communique de même avec un petit tube vertical, qui est plongé tout entier dans une solution saline ayant pour densité 1,15 et contenue dans un vase ouvert. Après avoir fermé le robinet de A, on ouvre celui de B : quel est le poids de la solution saline qui entrera dans le cylindre ? — Le baromètre marque 752 millimètres au moment de l'expérience.*

Solution. — Avant l'ouverture du robinet du tube B, le volume de l'air contenu dans le cylindre est 3 litres, et sa force élastique est 752 — 250, ou 502 millimètres. Quand on ouvre le robinet de B, la solution saline entre dans le cylindre, et comprime l'air jusqu'à ce que sa force élastique devienne égale à la pression extérieure, qui est de 752 millimètres ; si donc on désigne par v le volume auquel est réduit l'air, exprimé en centimètres cubes, on doit avoir (141):

$$v = \frac{3000 \times 502}{752} = 2002^{cc},66.$$

Le volume de liquide qui entre dans le cylindre est donc $3000 - 2002,66 = 997^{cc},34$; par suite, son poids exprimé en grammes est $997,34 \times 1,15 = 1146^{gr},941$.

XVIII. *Un gros tube cylindrique vertical* M, *ouvert à sa partie supérieure, et un petit tube cylindrique vertical* m, *fermé à sa partie supérieure, communiquent entre eux, par leurs parties inférieures, au moyen d'un tube de jonction; le premier*

(*) Cette méthode est applicable à la construction de baromètres dont on pourrait enlever le liquide, en voyage, pour éviter les chances de rupture, et qu'on remplirait seulement au moment de l'observation, sans se préoccuper d'en expulser complètement l'air : le tube pourrait être complètement métallique, en fer par exemple, sauf la partie supérieure, qui serait formée par un tube de verre assez court et parfaitement cylindrique. (ARAGO, *Astronomie populaire*.)

M, *a une section de 50 centimètres carrés; le second,* m, *une section quelconque. On a versé du mercure dans l'appareil, et l'on a enfermé ainsi dans le tube* m *un certain volume d'air qui y occupe une longueur de* $2^{m},15$, *les niveaux du liquide dans les deux branches étant dans le même plan horizontal. Quelle pression, en kilogrammes, devrait-on exercer sur le liquide du tube M, à l'aide d'un piston qui s'adapterait exactement dans ce tube, pour que l'air n'occupât plus, dans le tube* m, *qu'une longueur de* $0^{m},52$? — *Le tube* m *est supposé assez étroit, par rapport à* M, *pour que le niveau du mercure n'ait pas sensiblement baissé dans* M ; *la température reste invariable pendant l'expérience, et la pression barométrique est de 760 millimètres.*

Solution. — Menons un plan horizontal par la face inférieure du piston, quand l'air du tube m est réduit au volume indiqué dans l'énoncé : deux surfaces égales, prises dans ce plan, et situées l'une dans le cylindre M, l'autre dans le tube m, doivent supporter des pressions égales. Or, une surface de 1 centimètre carré, prise à ce niveau dans le tube, supporte : 1° la pression due au poids du mercure dont la hauteur est $2^{m},15 - 0^{m},52$, ou 163^{c} ; 2° la pression exercée par l'air comprimé, qui équivaut au poids d'une colonne de mercure ayant pour hauteur $76^{c} \times \frac{215}{52}$. Cette surface supporte donc une pression totale exprimée par le poids d'une colonne de mercure ayant pour base 1 centimètre carré, et pour hauteur $163 + 76 \times \frac{215}{52}$, ou $\frac{24816^{c}}{52}$. La valeur de cette pression, en grammes, est donc $\frac{24816 \times 13,6}{52}$ ou $\frac{337497^{gr},6}{52}$. Donc enfin, le piston du tube M, qui a une surface de 50 centimètres carrés, supportera une pression de $\frac{337497^{gr},6 \times 50}{52}$, ou approximativement de $324^{kil},5$.

XIX. *Un corps de pompe cylindrique, auquel on veut donner une hauteur de 90 centimètres, est terminé inférieurement par un tuyau d'aspiration cylindrique, dont le diamètre intérieur est 35 millimètres, et dont la hauteur est* $4^{m},80$ *au-dessus du niveau de l'eau dans laquelle il plonge; quel diamètre devra-t-on donner à ce corps de pompe, pour que l'eau s'élève, au premier coup de piston, jusqu'au sommet du tuyau d'aspiration? — On supposera la pression atmosphérique égale à 10 mètres d'eau.*

Solution. — Soit x le diamètre du corps de pompe : supposons qu'il satisfasse à la condition exprimée dans l'énoncé ; l'air qui, avant le premier coup de piston, occupait le volume du tuyau d'aspiration et avait une force élastique représentée par une colonne d'eau de 10 mètres, occupera, quand le piston sera en haut de sa course, le volume du corps de pompe, et aura une force élastique représentée par une colonne d'eau de $10^{m} - 4^{m},8$. Si l'on exprime que le produit de chacun de ces volumes de l'air par la pression correspondante est constant (141), on a

$$(10-4,8)\frac{\pi x^2}{4} \times 90 = 10\frac{\pi(3,5)^2}{4} \times 480\,;$$

d'où l'on tire, en supprimant les facteurs communs, et effectuant les calculs :

$$x = \sqrt{\frac{(3,5)^2 \times 480 \times 10}{(10-4,8) \times 90}} = 11^{c},2.$$

XX. *Une fontaine de compression (fig. 157), de forme cylindrique, ayant une base de 5 décimètres carrés et une hauteur de 50 centimètres, contient de l'eau jusqu'à la moitié de sa hauteur ; on y adapte, pour y comprimer de l'air, une pompe à main dont le corps de pompe a une section de 12 centimètres carrés et une hauteur de 40 centimètres. On a donné 20 coups de piston ; trouver : 1° à quelle hauteur l'eau s'élèverait dans un tube étroit, ouvert à sa partie supérieure, qu'on substituerait à la pompe ; 2° quelle pression en kilogrammes on devrait exercer sur une soupape placée à la partie supérieure du cylindre et ayant une surface de 15 centimètres carrés, pour la maintenir fermée.*

Solution. — 1° Le volume de la partie du cylindre qui est comprise au-dessus de l'eau et occupée par l'air est, en centimètres cubes, 500×25 ou 12 500. Le volume du corps de pompe de la pompe à main est, en centimètres cubes, 12×40, et puisqu'on a donné 20 coups de piston, on a introduit dans le cylindre une quantité d'air qui occuperait, sous la pression atmosphérique, un volume de $12 \times 40 \times 20$ ou 9600 centimètres cubes. Cet air acquiert, dans le cylindre, une force élastique représentée par une hauteur H de mercure qui est

$$H = 760 \times \frac{9600}{12500} = \frac{72960}{125}.$$

Cette force élastique s'ajoute, dans le cylindre, à la pression de l'air qui s'y trouvait d'abord (151), pression qui est égale à la pression atmosphérique ; mais, quand on ouvre le robinet pour laisser l'eau s'élever dans le tube adapté à l'appareil, la pression atmosphérique s'exerce aussi sur la surface du liquide dans ce tube : on peut donc considérer la colonne d'eau comme faisant simplement équilibre à la force élastique de l'air introduit dans le cylindre par la pompe à main. De là résulte que la hauteur de cette colonne sera

$$\frac{72960}{125} \times 13{,}6 = 7938^{mm}, \text{ ou } 7^{m},938.$$

2° Sur une soupape ayant une surface de 15 centimètres carrés, l'excès de la pression intérieure sur la pression extérieure est exprimé, en kilogrammes, par

$$79{,}38 \times 0{,}15 = 11^{kil},907.$$

Telle sera aussi la pression qu'on devra exercer sur la soupape, pour la maintenir fermée.

XXI. *Sous le récipient d'une machine pneumatique contenant de l'air sec à 0° et à la pression de 760 millimètres, on place un fléau de balance dont les bras sont égaux, et aux deux extrémités duquel sont suspendus deux cubes : l'un a 3 centimètres de côté et pèse dans l'air $26^{gr},5240$, et l'autre, qui a 5 centimètres de côté, pèse dans l'air $26^{gr},2597$; par suite de cette inégalité de poids, le fléau n'est pas horizontal. On raréfie l'air dans l'appareil et on demande quelle sera la pression sous le récipient quand l'horizontalité sera établie. — La température sera supposée égale à 0° pendant toute l'expérience.*

Solution. — Soit x la pression cherchée. Pour obtenir le poids apparent du premier cube, au moment où l'horizontalité sera établie, il suffira de déterminer d'abord son poids dans le vide, et d'en retrancher le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient ; or, le poids spécifique de l'air par rapport à l'eau, à 0° et sous la pression de 760 millimètres, est 0,0013 ; le poids du premier cube dans le vide est donc $26^{gr},5240 + 3^3 \times 0{,}0013$; le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient à la fin de l'expérience est $3^3 \times \frac{0{,}0013 \times x}{760}$: son poids apparent sous le récipient est donc définitivement

$$26^{gr},5240 + 3^3 \times 0{,}0013\left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

De même, le poids apparent du second cube, sous le récipient, est

$$26^{gr},2597 + 5^3 \times 0{,}0013\left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions, on trouve $x = 376^{mm}$.

PROBLÈMES SUR LA CHALEUR

XXII. *Évaluer en degrés de l'échelle de Fahrenheit les températures suivantes, données en degrés de l'échelle centigrade :* 108° C., — 15° C., — 40° C. (Voir 210.)

Solution. — La température de 108° C. correspond, dans l'échelle de Fahrenheit, à $\frac{108 \times 18}{10} + 32$, ou 226°,4 F.

La température de — 15° C. correspond à $32 - \frac{15 \times 18}{10} = 5°$ F.

La température de — 40° C. correspond à une température inférieure au zéro Fahrenheit, de $\frac{40 \times 18}{10} - 32 = 40$, c'est-à-dire à — 40° F. (A cette température, il y concordance entre les deux échelles).

XXIII. *Évaluer en degrés de l'échelle centigrade les températures suivantes, données en degrés de l'échelle de Fahrenheit :* 240° F., 12° F., — 8° F.

Solution. — La température de 240° F. correspond, dans l'échelle centigrade, à $(240 - 32) \times \frac{10}{18}$ ou 115°,55.

La température de 12° F. correspond à une température inférieure au zéro centigrade, de $(32 - 12) \times \frac{10}{18}$, c'est-à-dire à — 11°,11 C.

La température de — 8° F. correspond à une température inférieure au zéro centigrade, de $(32 + 8) \times \frac{10}{18}$, c'est-à-dire à — 22°,22 C.

XXIV. *Une barre de métal ayant, à la température de 0°, une longueur de $1^{m},28$, est placée dans un four dont on veut déterminer la température : le coefficient de dilatation du métal est 0,000017. On constate que la longueur de la barre devient $1^{m},2915$; quelle est la température du four ?*

Solution. — On a, entre la longueur l_0 d'une barre à zéro, et sa longueur l à la température t, la relation $l = l_0\,(1 + \delta t)$, dans laquelle δ est le coefficient de dilatation linéaire ; si l'on résout cette équation par rapport à t, on aura :

$$t = \frac{l - l_0}{l_0 \delta} = \frac{1{,}2915 - 1{,}28}{1{,}28 \times 0{,}000017} = 528°,5.$$

XXV. *Quelle est à 100° la longueur d'une barre de platine dont la longueur à 10° est 3 mètres ? — Le coefficient de dilatation linéaire du platine est $\frac{1}{116100}$.* (Baccalauréat, Paris.)

En appliquant la formule approchée qui a été donnée (Note, page 179), on trouvera pour la longueur cherchée $3^{m},002$.

XXVI. *Le poids spécifique du cuivre est à 0° de 8,8. Son coefficient de dilatation linéaire est $\frac{1}{58100}$. On demande quelle sera à 30° la longueur d'un paquet de fils de ce métal pesant 15 kilogrammes et ayant à 10° une section de 4 millimètres carrés.* (Baccalauréat, Paris.)

Solution. — Le volume à 0° du fil de cuivre est, en millimètres cubes, $\frac{150000000}{88}$; par suite, si l'on considère le coefficient de dilatation cubique comme égal au triple du coefficient de dilatation linéaire, le volume à 30° est $\frac{150000000}{88}\left(1 + \frac{3 \times 30}{58100}\right)$, ou bien $\frac{150000000 \times 5819}{88 \times 5810}$.

On trouvera facilement que la section à 30° est $\frac{4\times 2907}{2905}$. Donc, si l'on désigne par x la longueur en millimètres du fil à 30°, on aura

$$\frac{4\times 2907\times x}{2905}=\frac{150000000\times 5819}{88\times 5810}.$$

Le calcul effectué par logarithmes donne $x=426^{m},503$.

XXVII. *Une sphère de platine, pesée dans le mercure, a perdu de son poids 50 grammes à zéro, et 49*^{gr}*,5415 à 60°. On demande de trouver, d'après ces données, le coefficient de dilatation cubique du platine, sachant que la densité du mercure à zéro est 13,6, et que le coefficient de dilatation absolue de ce liquide est* $\frac{1}{5550}$.

Solution. — Désignons par V le volume de la sphère de platine à zéro, et par x le coefficient de dilatation cubique du métal ; le poids du mercure à zéro que cette sphère déplace étant 50 grammes, on a

$$V\times 13,6=50.$$

A 60 degrés, le volume de la sphère est devenu $V(1+60\,x)$; d'autre part, la densité du mercure est devenue

$$\frac{13,6}{1+60\times\frac{1}{5550}},\quad\text{ou}\quad\frac{13,6\times 185}{187};$$

et comme la perte de poids est maintenant de 49^{gr},5415, il vient

$$V(1+60x)\,\frac{13,6\times 185}{187}=49,5415.$$

En remplaçant, dans cette équation, $V\times 13,6$ par 50, et tirant la valeur de x, on aura

$$x=\frac{49,5415\times 187-50\times 185}{50\times 185\times 60}=\frac{14,2605}{555000}=0,00002569.$$

XXVIII. *Un baromètre a été observé à deux époques différentes, et a donné 770 millimètres à 25 degrés, et 760 millimètres à 5 degrés. On demande le rapport entre les deux hauteurs corrigées. — Le coefficient de dilatation du mercure est* $\frac{1}{5550}$.

Solution. — La première hauteur corrigée a pour expression

$$\frac{770}{1+\frac{25}{5550}}.$$

La seconde hauteur corrigée a pour expression

$$\frac{760}{1+\frac{5}{5550}}.$$

le rapport de ces deux hauteurs, calculé par logarithmes, est

$$x=1,0095.$$

XXIX. *Quel est le rapport des poids x et y de mercure et de platine qu'il faut introduire, à la température de zéro degré, dans un vase de fer, pour que, dans ce*

vase, la dilatation apparente soit nulle, de zéro à une température quelconque t, cette dernière température étant inférieure à 100 degrés? — Densité du mercure, 13,6. Densité du platine, 21. Coefficient de dilatation cubique de mercure, entre zéro et 100 degrés, 0,0001815. Coefficient de dilatation cubique du platine, 0,0000257. Coefficient de dilatation cubique du fer, 0,0000366.

Solution. — Le volume de mercure est $\frac{x}{13,6}$; sa dilatation, de 0° à la température t, est donc $\frac{x}{13,6}\times 0,0001815\,t$. De même, la dilatation du platine, de zéro degré à t, est $\frac{y}{21}\times 0,0000257\,t$. Enfin, le volume du vase de fer, occupé par le platine et le mercure, est égal à la somme $\frac{x}{13,6}+\frac{y}{21}$; la dilatation de ce volume, de 0 degré à t, est donc $\left(\frac{x}{13,6}+\frac{y}{21}\right)\times 0,0000366\,t$. — La différence entre la somme des deux premières dilatations et la dernière devra être nulle ; on a donc

$$\frac{x}{1,56}\times 0,0001815\,t+\frac{y}{21}\times 0,0000257\,t-\left(\frac{x}{1,56}+\frac{y}{21}\right)\times 0,0000366\,t=0.$$

Dans cette équation, t disparaît comme facteur commun, ainsi qu'on pouvait le prévoir, et on en tire finalement

$$\frac{x}{y}=0,0487.$$

XXX. *Un tube de verre, ayant à l'intérieur la forme d'un cylindre droit à base circulaire, a un diamètre intérieur de 2 millimètres à 0°, et renferme une colonne de mercure, dont la longueur, à cette température de 0°, est de 2 décimètres. On demande quelle serait, à la température de 20°, la nouvelle longueur de la colonne liquide. Le coefficient de dilatation cubique du mercure est* $\frac{1}{5550}$, *celui du verre est* $\frac{1}{38700}$. (Baccalauréat, Paris.)

Le calcul, effectué par logarithmes, donne pour la hauteur demandée $200^{mm},65$.

XXXI. *On demande quel est à 0° le volume intérieur d'une ampoule de verre qui, à 25°, est exactement remplie par 53*^{gr} *de mercure. Le coefficient de dilatation cubique du verre est* $\frac{1}{38700}$, *celui du mercure* $\frac{1}{5550}$; *le poids spécifique du mercure à 0° est* 13,59 (Baccalauréat, Paris.)

On trouvera pour volume intérieur de l'ampoule à zéro $3^{cc},915$.

XXXII. *Un thermomètre est plongé, jusqu'au 20° degré de son échelle, dans un liquide chaud ; le mercure s'élève dans la tige jusqu'au 130° degré. Cette indication ne donnant pas la température exacte du liquide, puisque la portion de la colonne mercurielle comprise entre les divisions 20 et 130 n'est pas plongée dans le bain, on demande de calculer la correction qu'elle devra subir, en supposant que la température de la portion extérieure de la colonne mercurielle soit égale à celle de l'atmosphère environnante, savoir 15 degrés ; on prendra pour coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre le nombre* $\frac{1}{6480}$.

Solution. — Désignons par x la température réelle du bain, c'est-à-dire celle que marquerait le thermomètre si toute la tige était plongée ; x se compose évidemment de 130 degrés, plus la dilatation *apparente* qu'éprouvent 130 — 20 ou 110 divisions de mercure, lorsque leur température s'élève de 15 degrés à x degrés. Donc

$$x=130+110(x-15)\frac{1}{6480};$$

d'où l'on tire

$$637x = 84075,$$

ou

$$x = 131^{\mathrm{s}},99.$$

XXXIII. *On demande quelle perte de poids éprouvent, par le seul fait de la poussée de l'air, 100 kilogrammes de bois, dont le poids spécifique rapporté à l'eau est 0,6. Le litre d'air, dans les conditions de l'expérience, pèse* 1gr,293. (Baccalauréat, Paris.)

On trouvera que la perte de poids est 215gr,5.

XXXIV. *On demande quelle différence il y a entre le poids de 10 litres d'air sec à la température de 10° et à la pression de* 0m,76, *et le poids de 10 litres d'air également sec à la température de* 15° *et à la pression de* 0m,75. — *Le litre d'air sec à 0° et à la pression* 0m,76 *pèse* 1gr,293. *Le coefficient de dilatation de l'air est de* 0,00367. (Baccalauréat, Paris.)

En appliquant les formules données pour les questions de ce genre (251), on trouvera pour la différence cherchée 0gr,378.

XXXV. *Trouver quel rapport on doit établir entre la hauteur du mercure et la longueur de la tige, dans le pendule de Graham (fig. 211), pour que la compensation ait lieu. — On considérera le poids de la tige et celui du cylindre de verre comme négligeables par rapport au poids du mercure.*

Solution. — Représentons par l_0 la longueur à zéro de la tige du pendule, augmentée de la hauteur de l'étrier, et par h_0 la hauteur du mercure à zéro qu'il faut introduire dans l'éprouvette, pour que la distance du point de suspension au centre de gravité du liquide soit la même à zéro et à une température déterminée t. L'expression de cette distance, ou la *longueur* du pendule à zéro, est évidemment $l_0 - \frac{h_0}{2}$, en négligeant l'épaisseur du fond de l'éprouvette.

Soit γ le coefficient de dilatation linéaire de l'acier, y la hauteur encore inconnue du mercure dans l'éprouvette, à la température de t degrés. La longueur du pendule à cette température sera $l_0(1+\gamma t) - \frac{y}{2}$; pour qu'elle soit égale à la longueur à zéro, il faut et il suffit que l'on ait

$$l_0 - \frac{h_0}{2} = l_0(1+\gamma t) - \frac{y}{2}. \tag{1}$$

Cette équation renferme deux inconnues, savoir h_0 et y: nous allons chercher à exprimer la seconde en fonction de la première et des coefficients de dilatation du verre et du mercure. Soit r le rayon de la section intérieure de l'éprouvette à zéro; $\pi r^2 h_0$ est le volume du mercure à cette température; il devient $\pi r^2 h_0(1+\alpha t)$ à t degrés, α étant le coefficient de dilatation absolue du mercure. Soit δ le coefficient de dilatation linéaire du verre; en passant de zéro à t degrés, le rayon r devient $r(1+\delta t)$, et la section πr^2 devient $\pi r^2(1+\delta t)^2$ ou $\pi r^2(1+2\delta t+\delta^2 t^2)$. On peut ici négliger $\delta^2 t^2$ à côté de $2\delta t$, à cause de l'extrême petitesse de δ, et prendre simplement $\pi r^2(1+2\delta t)$ pour l'expression de la section intérieure de l'éprouvette à t degrés. Mais, à cette température, la hauteur du mercure est y; le volume du liquide est donc $\pi r^2(1+2\delta t)y$. — Nous avons ainsi deux expressions du volume du mercure à t degrés; en les égalant, nous obtiendrons une équation qui permettra de déterminer y. Cette équation est

$$\pi r^2 h_0(1+\alpha t) = \pi r^2(1+2\delta t)y;$$

on en tire immédiatement

$$y = h_0\frac{1+\alpha t}{1+2\delta t}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on a :

$$l_0 - \frac{h_0}{2} = l_0(1+\gamma t) - \frac{h_0}{2}\,\frac{1+\alpha t}{1+2\delta t}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, qu'on fasse toutes les réductions, et qu'on néglige tous les termes qui renferment le produit des deux coefficients de dilatation, on arrive à la relation bien plus simple :

$$\frac{h_0}{l_0} = \frac{2\gamma}{\alpha - 2\delta}.$$

Ce résultat est indépendant de la température particulière t, pour laquelle nous avons mis le problème en équation. Donc la compensation aura lieu *pour toute température*, pourvu que, à zéro, le rapport entre la hauteur du mercure et la longueur de la tige, augmentée de celle de l'étrier, soit égal à la fraction $\frac{2\gamma}{\alpha - 2\delta}$, fraction dont la valeur est environ $\frac{1}{6}$.

XXXVI. *On a rempli d'acide carbonique un ballon de verre, dont la capacité est 5 litres à la température de 0°; la température du gaz est 0 degré et sa pression est 760 millimètres. On chauffe le ballon à 100 degrés, en laissant sortir librement le gaz qui tend à s'échapper par suite de cette élévation de température; la pression extérieure est 750 millimètres à la fin de l'expérience. On demande quel est le poids d'acide carbonique qui sortira du ballon. — Coefficient de dilatation cubique du verre,* 0,0000276; *poids de 1 litre d'air à 0° et à la pression de 760 millimètres* 1gr,293; *densité de l'acide carbonique par rapport à l'air*, 1,529; *coefficient de dilatation de l'acide carbonique*, 0,00371.

Solution. — Le volume du ballon devient, à 100 degrés,

$$5^{\mathrm{lit}} \times (1+0{,}00276) = 5^{\mathrm{lit}},0138;$$

le volume du gaz à 100 degrés, et sous la pression de 750 millimètres, deviendrait :

$$5^{\mathrm{lit}} \times (1+0{,}371)\,\frac{760}{750} = 6^{\mathrm{lit}},9464.$$

De là résulte que le volume du gaz qui sort du ballon sera, à 100 degrés, et sous la pression de 750 millimètres,

$$6^{\mathrm{lit}},9464 - 5^{\mathrm{lit}},0138 = 1^{\mathrm{lit}},9326.$$

Le poids du gaz sorti sera donc, en grammes,

$$1{,}9326 \times 1{,}293 \times 1{,}529 \times \frac{1}{1+0{,}371}\,\frac{750}{760} = 2^{\mathrm{gr}},750.$$

XXXVII. *On a renfermé de l'air sec dans un tube horizontal, à l'aide d'un index de mercure. A la température de 0°, sous 75 centimètres de pression, l'air occupe 720 divisions du tube, divisé en parties d'égale capacité. A une température et sous une pression inconnues, ce même air a occupé 960 divisions. Le tube ayant été mis dans la glace fondante sous la dernière pression, l'air n'y occupe plus que 750 divisions. On demande la température et la pression.* (Baccalauréat, Poitiers.)

Solution. — On trouvera pour valeur de la pression 72 centimètres, et pour température 76°,2.

XXXVIII. *A quelle température l'oxygène, sous la pression de 20 centimètres, aurait-il la même densité que l'hydrogène à 0°, sous la pression de 160 centimètres?* (Baccalauréat, Poitiers.)