Solution. — Soit t la température demandée, D la densité de l'oxygène, d la densité de l'hydrogène, l'une et l'autre étant considérées à 0° et sous la pression de 760 millimètres. Représentons par D_t la densité de l'oxygène à la température cherchée et sous la pression de 20 centimètres, et par d_h la densité de l'hydrogène à zéro et sous la pression de 160 centimètres. On aura

$$D_t = \frac{20\,D}{76\,(1 + \alpha t)},$$

$$d_h = \frac{160d}{76}.$$

D'après l'énoncé, ces deux densités doivent être égales entre elles. Donc la valeur t s'obtiendra au moyen de l'équation

$$1 + \alpha t = \frac{20D}{160d} = \frac{D}{8d};$$

dans laquelle $\alpha = 0{,}00367$, $d = 0{,}0693$ et $D = 1{,}1056$.

Le second membre de l'équation est sensiblement égal à 2. Donc

$$\alpha t = 1;$$

on trouve alors $t = 272°$.

XXXIX. *Quel doit être le rayon d'un ballon sphérique, formé d'un taffetas qui pèse 250 grammes le mètre carré, pour que, plein d'hydrogène sec à 20 degrés et à la pression de 750 millimètres, il ait une force ascensionnelle nulle, lorsqu'il se trouve dans l'air sec à la même température et à la même pression? — Poids du litre d'air sec à zéro et sous la pression de 760 millimètres,* $1^{gr},293$; *densité de l'hydrogène par rapport à l'air*, 0,0693.

Solution. — Désignons par r le rayon du ballon exprimé en mètres; la surface de l'enveloppe étant $4\pi r^2$, le poids de l'enveloppe en grammes sera $250 \times 4\pi r^2$. Le poids de l'hydrogène, en grammes, dans les conditions données par l'énoncé, sera, d'après la formule précédemment établie (251):

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times 1293 \times 0{,}0693 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1 + 0{,}00367 \times 20}.$$

Enfin le poids de l'air déplacé sera, en grammes,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times 1293 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1 + 0{,}00367 \times 20}.$$

Si maintenant on exprime que la somme des poids de l'enveloppe et de l'hydrogène, diminuée du poids de l'air, donne un résultat nul, on obtient l'équation

$$250 - \frac{1}{3} r \times 1293 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1{,}0734}(1 - 0{,}0693) = 0;$$

d'où l'on tirera $r = 0^m,678$.

XL. *La densité de l'éther liquide à 0 degré est* 0,915; *celle de l'éther gazeux, par rapport à l'air, est* 2,5. *Ceci posé, on demande quelle épaisseur doit avoir à 0 degré une couche cylindrique d'éther, pour que, transformée en vapeur à 38 degrés, dans un tube de même section et de 1 mètre de long, elle donne une vapeur ayant une pression égale de* $0^m,70$. *Le poids du litre d'air dans les conditions normales est* $1^{gr},293$, *le coefficient de dilatation des gaz est* 0,00367. *On sait qu'à la pression normale l'éther bout à 36 degrés.* (Baccalauréat, Paris.)

Solution. — Supposons que la section du tube soit 1 décimètre carré; le volume sera 10 litres. Le poids de 10 litres de vapeur d'éther, à la pression $0^m,70$ et à 38°, a pour expression, en grammes,

$$10 \times 1{,}293 \times \frac{1}{1 + 38\alpha} \times \frac{70}{76} \times 2{,}5$$

(α désigne le coefficient de dilatation 0,00367).

D'autre part, le poids de l'éther liquide, si l'on appelle x l'épaisseur de la couche en centimètres, est, en grammes,

$$100x \times 0{,}915.$$

En égalant ces deux poids, et tirant de l'équation ainsi obtenue la valeur de x, on trouve

$$x = \frac{1293 \times 250 \times 70}{1159 \times 715 \times 76},$$

ou, en calculant x par logarithmes, $x = 0^c,36$.

XLI. *Dans une cloche graduée en centimètres cubes à 0 degré, pleine de mercure, et placée sur une cuvette à mercure, on a introduit* $0^{gr},75$ *d'éther: la température de la cloche étant portée à 80 degrés, on constate que tout le liquide s'est réduit en vapeur et que le volume occupé par cette vapeur est* $366^{cc},48$; *le mercure s'élève à une hauteur de* $152^{mm},16$; *la pression barométrique, ramenée à 0 degré, est* 750^{mm}. *Quelle est, à cette température, la densité de la vapeur d'éther par rapport à l'air? — Le coefficient de dilatation du mercure est* $\frac{1}{5550}$; *le coefficient de dilatation cubique du verre est* 0,0000276.

Solution. — La pression barométrique étant ramenée à 0°, ramenons de même à 0° la colonne de mercure qui s'élève dans la cloche, et dont la température est 80 degrés: la valeur de cette colonne deviendra

$$152^{mm},16 \times \frac{1}{1 + \frac{80}{5550}} = 150^{mm}.$$

Donc la force élastique de la vapeur d'éther, évaluée par la hauteur d'une colonne de mercure qui serait à 0 degré, est $750^{mm} - 150^{mm} = 600$ millimètres. — Le volume de cette vapeur qui occupe, à 80 degrés, un nombre de divisions égal à 366,48 est, en centimètres cubes, $366{,}48\,(1 + 0{,}0000276 \times 80)$; le poids du même volume d'air, dans les mêmes conditions de température et de pression, est

$$366{,}48\,(1 + 0{,}0000276 \times 80) \times 0{,}0013 \times \frac{600}{760} \times \frac{1}{1 + 0{,}00367 \times 80}.$$

La densité de la vapeur par rapport à l'air est donc

$$\frac{0{,}75}{366{,}48\,(1 + 0{,}0000276 \times 80) \times 0{,}0013} \times \frac{760}{600} \times (1 + 0{,}00367 \times 80) = 2{,}573.$$

XLII. *Dans un mètre cube d'air à 20 degrés, on a trouvé* $11^{gr},56$ *de vapeur d'eau. Quel est l'état hygrométrique de cet air? — On sait que, à 20 degrés, le maximum de tension de la vapeur d'eau est* $17^{mm},4$; *1 litre d'air à 0 degré pèse* $1^{gr},3$ *sous la pression* $0^m,76$; *la densité de la vapeur est les* $\frac{5}{8}$ *de celle de l'air.*

On trouvera que l'état hygrométrique est sensiblement 0,7.

XLIII. *Trouver le poids de la vapeur d'eau contenue dans un mètre cube d'air humide, dont la température est 20 degrés et l'état hygrométrique* 0,5. — *Trouver aussi* *le poids de cet air humide lui-même, sachant que sa force élastique totale est 756 millimètres.*

Solution. — 1° Le poids p de la vapeur est donné par la formule générale

$$p = V \times 1^{gr},293 \times 0,622 \times \frac{f}{760} \times \frac{1}{1+\alpha t},$$

dans laquelle V désigne le volume exprimé en litres, et f la tension de la vapeur. Or, à 20 degrés, la force élastique maximum est $17^{mm},39$; et, comme l'état hygrométrique de l'air est 0,5, on a

$$\frac{f}{17,39} = 0,5 ;$$

d'où

$$f = 17,39 \times 0.5 = 5,217.$$

Si l'on remplace V et f par leurs valeurs, α par 0,0367, et t par 20, la formule devient

$$p = 1000 \times 1^{gr},293 \times 0,622 \times \frac{5,217}{760} \times \frac{1}{1+20\times 0,00367},$$

ou

$$= \frac{1^{gr},293 \times 622 \times 5,217}{760 \times 1,0734} = 5^{gr},143.$$

2° Le poids de l'air humide est

$$P = V \times 1^{gr},293 \times \frac{H - 0,378f}{760} \times \frac{1}{1+\alpha t}.$$

En remplaçant encore V, f, α et t par leurs valeurs connues, H par 756^{mm}, il vient

$$P = 1000 \times 1^{gr},293 \times \frac{756 - 0,378 \times 5,217}{760} \times \frac{1}{1+20\times 0,00367},$$

ou

$$P = \frac{1293^{gr} \times 754,027974}{760 \times 1,0734} = 1159^{gr},117.$$

Ainsi le poids de la vapeur est $5^{gr},143$; celui de l'air humide, $1159^{gr},117$.

XLIV. *Un espace de 1 mètre cube de capacité, entretenu à la température de 20 degrés, renferme de l'air humide dont l'état hygrométrique est $\frac{3}{4}$. La température venant à s'abaisser jusqu'à zéro, on demande de trouver le poids de la vapeur qui devra se liquéfier. — On prendra pour poids du mètre cube d'air, dans les conditions normales de température et de pression, $1^{kil},293$; pour poids spécifique de la vapeur, 0,622; on sait, d'ailleurs, que la tension maximum de la vapeur est, à 20 degrés, de $17^{mm},391$; à zéro de $4^{mm},6$.*

Solution. — Le poids de la vapeur qui devra se liquéfier s'obtiendra en retranchant, du poids de la vapeur contenue à 20 degrés dans l'espace donné, le poids de la vapeur que ce même espace contient à zéro quand il est saturé. — Or, à 20 degrés, l'état hygrométrique étant $\frac{3}{4}$, la force élastique de la vapeur est $\frac{3}{4} \times 17^{mm},391$, c'est-à-dire $13^{mm},04325$; le poids de cette vapeur est donc

$$0,622 \times 1^{kil},293 \times \frac{1}{1+0,00367\times 20} \times \frac{13,04325}{760} ;$$

d'autre part, le poids de la vapeur contenue dans 1 mètre cube d'air saturé à zéro est

$$0,622 \times 1^{kil},293 \times \frac{4,6}{760} ;$$

en retranchant l'une de l'autre ces deux quantités, et ayant égard aux facteurs communs, on trouve, pour le poids cherché,

$$\frac{0,622 \times 1^{kil},293}{760}\left(\frac{13,04325}{1,0734} - 4,6\right),$$

expression qui se réduit à

$$\frac{0,622 \times 1^{kil},293 \times 8,10561}{760 \times 1,0734}.$$

En calculant cette expression par logarithmes, on trouve que le poids de la vapeur qui devra se liquéfier à zéro est de $0^{kil},007991$, ou de $7^{gr},991$.

XLV. *A un moment déterminé, le baromètre marque 758 millimètres, le thermomètre 20 degrés centigrades, et l'hygromètre de Saussure 70 degrés. A quelle température faudrait-il amener de l'air parfaitement sec, pour que, sous la même pression, sa densité fût égale à celle de l'air humide au moment des observations? — On connait la force élastique maximum de la vapeur d'eau, pour la température de 20 degrés, savoir $17^{mm},4$, et la fraction de saturation correspondante au 70e degré de l'hygromètre, savoir 0,472.*

Solution. — La force élastique maximum de la vapeur d'eau à la température de l'expérience étant $17^{mm},4$ et la fraction de saturation étant 0,472, la force élastique de la vapeur d'eau dans l'air, au moment de l'observation, est $17^{mm},4 \times 0,472 = 8^{mm},2128$. Soit d la densité de l'air, par rapport à l'eau, à 0 degré et sous la pression de 760 millimètres; la densité de l'air contenu dans le mélange et supposé sec est, au moment de l'expérience,

$$d \times \frac{758 - 8,2128}{760} \times \frac{1}{1+0,00367\times 20},$$

et la densité de la vapeur d'eau est

$$0,622d \times \frac{8,2128}{760} \times \frac{1}{1+0,00367\times 20} ;$$

d'autre part, la densité de l'air sec à la pression de 758 millimètres et à la température x serait

$$d \times \frac{758}{760} \times \frac{1}{1+0,00367\times x}.$$

En égalant cette expression à la somme des deux précédentes, et supprimant les facteurs communs, il vient

$$\frac{758 - 8,2128\,(1-0,622)}{1+0,00367\times 20} = \frac{758}{1+0,00367x} ;$$

d'où l'on tire $x = 21°,20$.

XLVI. *A la température de 20 degrés et sous la pression de 760 millimètres, on a introduit, dans un récipient, de l'air sec et du gaz hydrogène saturé d'humidité. On a fait passer ensuite une portion de ce mélange dans l'eudiomètre à eau, où elle s'est saturée de vapeur : l'analyse a montré que cette portion renfermait des volumes égaux d'air et d'hydrogène. Trouver, d'après ce résultat, quelle était la force élastique de la vapeur dans le récipient. — On supposera que l'analyse eudiométrique ait été faite sous la pression barométrique de 760 millimètres et à la température de 20 degrés; on prendra $17^{mm},4$ pour la tension maximum de la vapeur à cette température.*

Solution. — Désignons par V le volume qu'occuperait, sous la pression de 760 millimètres, l'air sec contenu dans le récipient, et par V' le volume qu'occuperait l'hydrogène saturé, sous la même pression; $V + V'$ représentera la capacité du récipient. Soit f la tension de la vapeur renfermée dans cette capacité; si, du volume $V + V'$ sous lequel sa tension est f, on réduisait la vapeur au volume V', elle atteindrait son point de saturation; sa tension serait alors $17^{mm},4$. Or on a, d'après la loi de Mariotte,

$$(1) \qquad \frac{f}{17^{mm},4} = \frac{V'}{V + V'};$$

cherchons donc, d'après les données de l'analyse, à déterminer $\frac{V'}{V + V'}$; il sera facile d'en déduire f.

Soit 1 le volume du mélange saturé, dans l'eudiomètre; la tension de la vapeur étant de $17^{mm},4$, on peut regarder ce mélange comme contenant le volume 1 de gaz sec, sous la pression de $760^{mm} - 17^{mm},4$; sous la pression de 760 millimètres, ce volume deviendrait $\frac{760 - 17,4}{760}$; et si l'on en prend la moitié, on aura, pour la pression de 760 millimètres, le volume d'air, supposé sec, que contient l'eudiomètre. En résumé, on peut dire que, dans l'eudiomètre, et sous la pression de 760 millimètres,

Le volume de l'air sec était........ $\frac{1}{2}\,\frac{760 - 17,4}{760}$,

Le volume de l'hydrogène était.... $\frac{1}{2}$.

Le rapport de ces deux quantités est évidemment égal à $\frac{V}{V'}$; donc :

$$\frac{V}{V'} = \frac{760}{760 - 17,4};$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{V'}{V + V'} \quad \text{ou} \quad \frac{f}{17^{mm},4} = \frac{760}{760 \times 2 - 17,4},$$

et enfi

$$f = 17^{mm},4 \times \frac{760}{760 \times 2 - 17,4} = 8^{mm},80.$$

XLVII. *L'enveloppe d'un ballon de baudruche pèse 200 grammes; la pression atmosphérique étant de 760 millimètres, et la température de 20 degrés, on a introduit dans ce ballon 500 litres d'hydrogène saturé de vapeur d'eau, à la même température et sous la même pression. Quelle est la force ascensionnelle de ce ballon, en supposant que la fraction de saturation de l'air extérieur soit $\frac{1}{2}$? — Densité de l'hydrogène par rapport à l'air, 0,069; densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air, 0,622. Force élastique maximum de la vapeur d'eau à 20 degrés, $17^{mm},4$.*

Solution. — La force élastique maximum de la vapeur d'eau à 20 degrés étant $17^{mm},4$ et l'hydrogène étant saturé de vapeur, la force élastique du gaz, supposé sec, est $760 - 17,4 = 742^{mm},6$: donc, en observant que le poids d'un litre d'air, à 0 degré et sous la pression de 760 millimètres, est $1^{gr},293$, on a pour le poids de l'hydrogène sec,

$$1^{gr},293 \times 0,69 \times 500 \times \frac{742,6}{760} \times \frac{1}{1 + 0,00367 \times 20},$$

en prenant pour coefficient de dilatation du gaz le nombre 0,00367. De même, le poids de la vapeur d'eau qui sature le gaz, et dont la pression est $17^{mm},4$, est

$$1^{gr},293 \times 0,622 \times 500 \times \frac{17,4}{760} \times \frac{1}{1 + 0,00367 \times 20}.$$

La somme de ces deux poids et du poids de l'enveloppe donnera le poids total du ballon.

Pour obtenir le poids de l'air déplacé, on remarquera que, la fraction de saturation de l'air extérieur étant $\frac{1}{2}$, la tension de la vapeur d'eau est $\frac{17^{mm},4}{2}$ ou $8^{mm},7$: la force élastique de l'air lui-même est donc $760 - 8,7 = 751^{mm},3$. De là résulte que le poids de l'air déplacé, supposé sec, est

$$1^{gr},293 \times 500 \times \frac{751,3}{760} \times \frac{1}{1 + 0,00367 \times 20}.$$

De même, le poids de la vapeur d'eau contenue dans l'air déplacé sera

$$1^{gr},293 \times 0,622 \times 500 \times \frac{8,7}{760} \times \frac{1}{1 + 0,00367 \times 20}.$$

La somme de ces deux poids donnera la poussée éprouvée par le ballon dans l'air.

En retranchant maintenant le poids total du ballon de la poussée qu'il éprouve, on obtiendra la valeur de la force ascensionnelle. On trouvera :

$$350^{gr},542.$$

XLVIII. *Une masse d'air qui occupe 50 mètres cubes, à la température de 5 degrés, et dont la fraction de saturation est 0,572, se mélange à une autre masse d'air dont le volume est 75 mètres cubes, la température 15 degrés, et la fraction de saturation 0,480; le volume du mélange est 125 mètres cubes, et sa température est 11 degrés. Quelle sera la fraction de saturation du mélange? — Les valeurs de la force élastique maximum de la vapeur d'eau à 5 degrés, 15 degrés, 11 degrés, sont respectivement $6^{mm},53$; $12^{mm},70$; $9^{mm},79$.*

Solution. — Dans la première masse d'air, avant le mélange, la force élastique de la vapeur d'eau est, d'après les conditions de l'énoncé, $6,53 \times 0,572$. Donc, lorsque le mélange sera effectué, c'est-à-dire lorsque cette vapeur se sera échauffée de 5 degrés à 11 degrés, et qu'elle aura acquis, au lieu du volume de 50 mètres cubes, un volume de 125 mètres cubes, sa force élastique sera

$$6,53 \times 0,572 \left[1 + 0,00367\ (11 - 5)\right] \frac{50}{125} = 1^{mm},527.$$

De même la force élastique de la vapeur contenue dans la seconde masse d'air deviendra, lorsque le mélange sera effectué,

$$12,7 \times 0,48 \left[1 + 0,00367\ (15 - 11)\right] \frac{75}{125} = 5^{mm},711.$$

En faisant la somme de ces deux forces élastiques, on obtient la force élastique totale de la vapeur d'eau dans le mélange, savoir : $5^{mm},238$. Puisque la force élastique maximum à cette température est $9^{mm},79$, la fraction de saturation est

$$\frac{5,238}{9,79} = 0,535.$$

XLIX. *La terre étant couverte d'une couche de neige à zéro, de 2 centimètres d'épaisseur, quelle est l'épaisseur de la couche de pluie tombant à $12°,5$ qui serait nécessaire pour en déterminer la fusion? — Densité de la neige par rapport à l'eau de pluie, 0,78; chaleur de fusion de la neige, 79,25.*

Solution. — Si la densité de la neige était égale à celle de l'eau, une couche de neige de 1 centimètre d'épaisseur exigerait, pour se fondre, une couche de pluie à 1 degré ayant $79^{cent},25$ d'épaisseur : donc 2 centimètres de neige exigeraient $79^{cent},25 \times 2$ de pluie à 1 degré, ou $\frac{79^{cent},25 \times 2}{12,5}$ de pluie à $12°,5$. Mais la neige ne pesant, à volume égal, que les 0,78 de ce que pèse la pluie, on voit en définitive que, pour fondre la même couche, il suffira d'une quantité de pluie à 12°,5 représentée par

$$0,78 \times \frac{79^{\text{cent}},25 \times 2}{12,5} = 9^{\text{cent}},89.$$

L. *Une couche de neige à zéro, de 1 centimètre d'épaisseur, étant donnée, combien devra-t elle recevoir de chaleur du soleil, par mètre carré de superficie, pour se répandre dans l'air sous forme de vapeur saturante à 10 degrés? — Densité de la neige,* 0,78 ; *chaleur de vaporisation à 10 degrés,* 600.

Solution. — Une couche de neige de 1 centimètre d'épaisseur et de 1 mètre carré de superficie, ayant pour densité 0,78, pèse $7^{\text{k}},8$: pour la fondre à zéro, il faut lui donner $79^{\text{calor}},25 \times 7,8$. Pour échauffer, de zéro à 10 degrés, l'eau provenant de la fusion, il faut $10^{\text{cal}} \times 7,8$; enfin, pour convertir cette eau en vapeur, il faut encore $600^{\text{cal}} \times 7,8$. En ajoutant ces trois nombres, on obtient la quantité de chaleur demandée, savoir :

$$(79,25 + 10 + 600)\ 7,8 \text{ ou } 567^{\text{calor}},15.$$

LI. *Un litre d'alcool (mesuré à 0°), chauffé dans un vase de laiton du poids de 10 grammes, et introduit dans 1 kilogramme d'eau à 10° contenue dans un vase de laiton du poids de 200 grammes, a élevé de 10° à 27° la température de cette eau. Quelle est la chaleur spécifique de l'alcool, sachant que la densité de l'alcool est 0,8 et que la chaleur spécifique du laiton est 0,01?* (Baccalauréat, Paris.)

Solution. — En appliquant les formules données dans le texte (347), on trouvera pour la chaleur spécifique cherchée 0,64.

LII. *Deux morceaux de fer, qui pèsent $231^{\text{gr}},5$ et $249^{\text{gr}},1$, ayant été chauffés à une température* x, *on les a plongés dans des masses d'eau dont les poids respectifs sont 360 grammes et 450 grammes, et les températures 10 degrés et 12 degrés. Les températures finales des mélanges ont été 17°,5 et 18°,4. On demande la température initiale* x *du fer et sa chaleur spécifique.*

Solution.— On exprimera que la quantité de chaleur perdue par chaque morceau de fer est égale à la quantité de chaleur gagnée par l'eau dans laquelle on l'a plongé. En désignant par c la chaleur spécifique du fer, on a donc les deux équations suivantes :

$$231,5 \times c\,(x - 17,5) = 360 \times 7,5; \quad (1)$$
$$249,1 \times c\,(x - 18,4) = 450 \times 6,4. \quad (2)$$

Pour éliminer c, il suffit de diviser membre à membre ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{x - 17,5}{x - 18,4} = \frac{360 \times 7,5 \times 2491}{450 \times 6,4 \times 2315},$$

d'où l'on tirera

$$x = 120°,97.$$

En reportant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$231,5 \times c \times 103,47 = 360 \times 7,5, \qquad \text{d'où } c = 0,1127.$$

La température initiale du fer était donc de 120°,97, et la chaleur spécifique de ce métal est 0,1127.

PROBLÈMES SUR L'ACOUSTIQUE

LIII. *Une corde tendue par un poids de 4 kil., rend un son qui correspond à 200 vibrations par seconde. On demande : 1° les nombres de vibrations que rendront les* $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ *et* $\frac{1}{2}$ *de la corde; 2° les nombres de vibrations que donnerait la corde*

entière, tendue successivement par 9 kil., 16 kil., 25 kil.; 3° les nombres de vibrations de deux autres cordes de même longueur et de même diamètre, dont les densités seraient, pour l'une 4 fois, et pour l'autre 25 fois plus considérables. (Baccalauréat, Poitiers.)

Solution. 1° Les nombres de vibrations d'une corde sont, toutes les autres conditions étant égales d'ailleurs, inversement proportionnels aux longueurs de la partie vibrante ; on a donc

$$\frac{4}{5}x = \frac{2}{3}y = \frac{1}{2}z = 200 \times 1;$$

d'où l'on déduit :

$$x = 250, \quad y = 300, \quad z = 400.$$

2° Les nombres de vibrations d'une même corde sont directement proportionnels aux racines carrées des poids tenseurs ; on a donc :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{200}{2},$$

d'où l'on déduit:

$$x = 300, \quad y = 400, \quad z = 500.$$

3° Les nombres de vibrations de plusieurs cordes sont, toutes circonstances égales d'ailleurs, inversement proportionnels aux racines carrées des densités ; on a donc

$$2x = 5y = 200 \times 1,$$

d'où l'on déduit

$$x = 100, \quad y = 40.$$

LIV. *Le poids spécifique du platine étant pris égal à 22 et celui du fer à 7,8, on demande quel rapport il doit y avoir entre les longueurs de deux cordes, l'une en platine, l'autre en fer, et toutes les deux de même section, pour qu'elles soient à l'unisson quand on les tend également.* (Baccalauréat, Paris.)

Solution. — Le nombre de vibrations que rend la première corde peut être représenté par $\frac{K}{l\sqrt{22}}$, le nombre de vibrations que rend la seconde par $\frac{K}{l'\sqrt{7,8}}$. Dans ces deux expressions, la constante K est la même.

Divisons la seconde par la première : il vient

$$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{7,8}{22}} = \frac{\sqrt{7,8 \times 22}}{22}.$$

On trouve pour valeur approchée de ce rapport 0,5954.

LV. *Trouver la longueur du tuyau ouvert dont le son fondamental est à l'unisson avec le diapason normal.*

Solution. — Le diapason normal exécutant 435 vibrations par seconde, et la vitesse de propagation du son dans l'air, supposé à zéro, étant, comme on l'a vu, $330^{\text{m}},5$ par seconde, la longueur de l'onde produite par ce diapason dans l'air est $\frac{330^{\text{m}},5}{435}$. Telle est aussi, par suite, la longueur d'onde du son fondamental que rend le tuyau; et comme elle est double de la longueur L du tuyau lui-même (664,2°), on a

$$L = \frac{330^{\text{m}},5}{435 \times 2} = 0,380.$$

LVI. *Un tuyau fermé, de $0^{\text{m}},50$ de longueur, donne l'harmonique 3; quel est le rang de cet harmonique dans l'échelle musicale?*

Solution. — Quand le tuyau proposé donne le son fondamental, la longueur de l'onde sonore est 0m,50 × 4 ou 2 mètres (664,1°) et le nombre de vibrations exécutées dans une seconde est de $\frac{330,5}{2}$ ou de 165,25; pour l'harmonique 3, le nombre de vibrations est triple du précédent : il est donc égal à 495,75. Or si, partant du nombre de vibrations connu de la_3, savoir 435, on calcule les nombres de vibrations de si_3 et de ut_4, on trouve que la note cherchée est comprise entre ces deux notes.

PROBLÈMES D'OPTIQUE

LVII. *Deux miroirs plans* AB *et* CD (*fig.* 726), *inclinés l'un sur l'autre, ont leurs faces réfléchissantes en regard; un rayon lumineux* SI *se réfléchit d'abord sur* AB *suivant* IH, *puis sur* CD *suivant* HR. *Démontrer que l'angle δ, formé par la direction du rayon incident avec celle du rayon deux fois réfléchi, est toujours double de l'angle α des deux miroirs.*

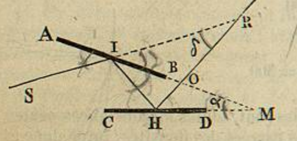

Fig. 726.

Solution. — Les triangles IOR et HOM ont leurs angles en O égaux comme opposés par le sommet ; donc :

$$OIR + \delta = OHM + \alpha.$$

Mais OHM est égal à IHC, à cause de la réflexion sur le miroir CD; IHC est égal à la somme des angles intérieurs α et HIM; enfin ce dernier angle, à cause de la réflexion sur le miroir AB, est égal à SIA, qui lui-même est égal à OIR. On voit donc que

$$OHM = \alpha + OIR;$$

en ajoutant membre à membre ces deux égalités, et supprimant les parties communes, il vient enfin

$$\delta = 2\alpha.$$

LVIII. *Un point lumineux* P (*fig.* 600) *est situé sur l'axe d'un miroir concave* MON, *dont le rayon* CO *est égal à* 1 *mètre; la distance* PO *est de* 2 *mètres. On demande de déterminer la distance* P'O *de l'image au miroir.*

Solution. — La formule générale qui a été établie (721) fournit immédiatement la solution : il suffit de remplacer, dans l'équation (1), p par 2, et R par 1, ce qui donne $p' = \frac{2}{3} = 0^m,666$. — On peut aussi trouver ce résultat directement, par des considérations géométriques.

LIX. *Une ligne droite lumineuse* AB, *de* 0m,24 *de longueur, est placée perpendiculairement à l'axe d'un miroir concave* MON (*fig.* 604). *Le rayon du miroir est de* 1 *mètre, et la distance* PO *est de* 2 *mètres. Déterminer la longueur de l'image* A'B'.

Solution. — Les formules générales qui ont été établies (724) fournissent immédiatement la solution : car la relation (2) donne, en désignant par p' la distance de l'image au miroir,

$$A'B' = 0^m,24 \times \frac{p'}{2};$$

et en déterminant la valeur de p' comme dans le problème précédent, savoir $p' = \frac{2}{3}$, il vient

$$A'B' = 0^m,24 \times \frac{1}{3} = 0^m,08,$$

résultat que l'on peut encore trouver directement, par des considérations géométriques.

LX. *Devant un miroir sphérique concave de* 2 *mètres de rayon, on place une flèche lumineuse de* 1 *décimètre de longueur, perpendiculairement à l'axe principal et à* 5 *mètres du miroir. Où se forme l'image, et quelle en est la grandeur?*

On met ensuite un petit miroir plan au foyer principal du miroir sphérique, incliné de 45° sur l'axe principal, et la face réfléchissante tournée vers ce miroir. Quelle image formeront les rayons réfléchis par le grand miroir sphérique, en tombant sur le petit miroir plan? Quelles en seront la grandeur et la situation? Où placer un écran pour la recevoir, ou bien une loupe pour l'observer et pour l'agrandir? (Baccalauréat, Paris.)

Solution. — En appliquant la formule générale (1) qui a été donnée (721), on trouve que l'image se forme à 1m,25 du miroir, ou à 0m,75 du centre. D'autre part, si l'on remarque que l'objet est placé à 3 mètres du centre, on voit que la grandeur de l'image s'obtiendra à l'aide de la proportion

$$\frac{x}{0,1} = \frac{0,75}{3} = 0,25.$$

Donc la grandeur de l'image est de

$$0^m,025.$$

Plaçons maintenant le petit miroir plan au foyer F. L'image, au lieu de se former dans une position perpendiculaire à l'axe principal du miroir sphérique, à 0m,25 au delà du foyer, sera renvoyée, par le miroir plan, dans une position symétrique de la première par rapport à ce miroir. Au point F, menons la perpendiculaire à l'axe du miroir sphérique ; l'image se trouvera à 0m,25 du point F sur cette perpendiculaire ; elle sera parallèle à l'axe, et sa grandeur sera toujours 0m,025.

Pour la recevoir sur un écran, il suffit de placer cet écran à l'endroit où cette image est renvoyée par le miroir plan, c'est-à-dire parallèlement à l'axe du miroir sphérique, à 0m,25 du foyer F.

Pour la grossir avec une loupe, il faut disposer cette loupe de façon que l'image soit placée entre la lentille et son foyer principal ; cette dernière opération est facile, dès que l'on a déterminé la position de l'image renvoyée par le miroir plan.

LXI. *Deux miroirs concaves* MN *et* M'N' (*fig.* 727), *dont les rayons sont respectivement de* 1 *mètre et de* 1m,05, *sont disposés en regard l'un de l'autre, de manière que leurs axes coïncident. La distance* OO' *est de* 3 *mètres. En quel point de l'axe commun devra-t-on placer un objet lumineux, pour que les images réelles de cet objet données par les deux miroirs soient égales?*

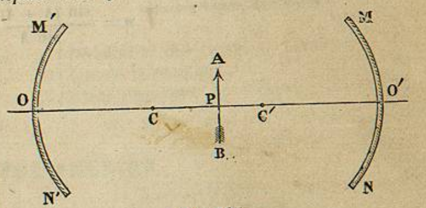

Fig. 727.

Solution. — Il est facile de voir que l'égalité des deux images réelles ne peut être obtenue, dans les conditions du problème, que si l'objet est placé dans l'intervalle des deux centres C et C'. En raisonnant alors comme précédemment, on trouvera, pour la longueur de l'image donnée par le miroir MN,

$$AB \frac{OC}{PO + PC};$$

pour la longueur de l'image donnée par le miroir M'N' :

$$AB \frac{O'C'}{PO' + PC'}.$$

Pour que les deux images soient égales, il suffit qu'on ait

$$\frac{OC}{PO + PC} = \frac{O'C'}{PO' + PC'}.$$

En ajoutant ces deux rapports terme à terme, et égalant le résultat au premier rapport, il vient

$$\frac{OC}{PO+PC}=\frac{OC+O'C'}{OO'+CC'};$$

si l'on substitue dans cette égalité les longueurs des différentes lignes qui y entrent, et si l'on remarque que PC est égal à PO — OC, on a

$$\frac{1,5}{2PO-1,5}=\frac{2,5}{3,5}=\frac{5}{7};$$

d'où l'on déduit facilement

$$PO=1^{m},8.$$

On peut également appliquer les formules données (721 et 724), qui conduiront plus rapidement au même résultat.

LXII. *Un prisme* BAC (*fig.* 728), *dont l'angle réfringent* A *est connu, est rencontré perpendiculairement à l'une de ses faces par un rayon lumineux* RI *qui se réfracte en* H *suivant* HS. *On mesure la déviation* δ *que le rayon subit par cette réfraction. Déduire, de la connaissance des angles* A *et* δ, *la valeur de l'indice de réfraction de la substance du prisme.*

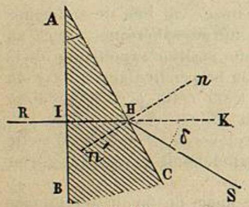

Fig. 728.

Solution. — Soit nn' la normale au point H; on a :

$$\frac{\sin SHn}{\sin RHn'}=n,$$

or, l'angle SHn se compose de deux parties, l'une SHK, égale à δ; l'autre KHn, égale à A, puisque les angles KHn et A ont leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'autre part, l'angle RHn', égal à KHn comme opposé par le sommet, est aussi égal à A; en substituant, il vient donc

$$n=\frac{\sin(A+\delta)}{\sin A}.$$

TABLE DES MATIÈRES

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

LIVRE PREMIER

PESANTEUR ET HYDROSTATIQUE