PREMIERS ÉLÉMENTS

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL

PREMIÈRE PARTIE

PREMIERS ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. — Le calcul différentiel est la partie des mathématiques qui traite des variations infiniment petites des fonctions.

2. — On sait qu'une variable y est dite *fonction* d'une autre variable x, si y varie avec x, et si y prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue une valeur déterminée à x. Ainsi, en coordonnées rectilignes, l'ordonnée d'une courbe est une fonction de l'abscisse.

Si la relation qui lie x et y est exprimée par une équation résolue par rapport à y, comme $y=f(x)$, on dit que y est une fonction *explicite* de x. Si cette relation est exprimée par une équation non résolue, comme $f(x, y)=0$, on dit que y est une fonction *implicite* de x. Dans l'un et l'autre cas, x prend le nom de *variable indépendante;* c'est celle à laquelle on attribue des valeurs particulières pour en déduire les valeurs correspondantes de la fonction y.

3. — De même, une variable z est dite fonction de deux autres variables x et y, si elle varie en même temps que x et y, et si elle prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue des valeurs déterminées à x et y. Ainsi, en coordonnées rectilignes, l'ordonnée z d'une surface courbe est une fonction des deux autres coordonnées x et y.

C'est une fonction *explicite* si la relation qui lie les trois variables est exprimée par une équation résolue par rapport à z comme $z=f(x,y)$; c'est une fonction *implicite* si cette relation est exprimée par une équation non résolue, comme $f(x,y,z)=0$. Dans l'un et l'autre cas, x et à y sont les *variables indépendantes ;* ce sont celles auxquelles on attribue des couples de valeurs particulières, pour en déduire les valeurs correspondantes de la fonction z.

4. — On pourrait avoir à considérer des fonctions de plus de deux variables indépendantes, comme $z=f(x,y,t)$, ou $f(x,y,z,t)=0$.

5. — On appelle *infiniment petit* une quantité qui tend vers zéro, et que l'on considère dans un état très-voisin de sa limite.

Il résulte de cette définition que si un infiniment petit α est ajouté à une quantité finie et déterminée a, on peut toujours négliger α devant a, puisque, à la limite, $a+\alpha$ se réduit à a. Il en serait de même si a tendait lui-même vers une limite finie a_1 ; car, à la limite, $a+\alpha$ se réduirait à a_1.

6. — Dans une question où l'on a divers infiniment petits à considérer, il y en a toujours un auquel on rapporte tous les autres, et que, pour cette raison, on appelle *infiniment petit principal*.

Soit α l'infiniment petit principal ; et soit β un autre infiniment petit qu'on lui compare. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers une limite finie k, différente de zéro, on dit que β est un *infiniment petit du premier ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha$. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers un infiniment petit du premier ordre $k\alpha$, on dit que β est un *infiniment petit du second ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha^2$. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers un infiniment petit de second ordre $k\alpha^2$, on dit que β est un *infiniment petit du troisième ordre ;* et l'on peut le représenter par $k\alpha^3$. En général, si un infiniment petit peut être représenté par $k\alpha^n$, on dit que c'est un *infiniment petit de l'ordre* n.

7. — La somme de plusieurs infiniment petits du même ordre, en nombre déterminé, est encore un infiniment petit du même ordre. Car si $k\alpha^n$, $k'\alpha^n$, $k''\alpha^n$, ..., représentent les infiniment petits considérés, leur somme sera

$$(k+k'+k''+\ldots)\,\alpha^n.$$

Or les termes étant en nombre déterminé, la quantité entre parenthèses est une quantité finie K ; la somme cherchée est donc $K\alpha^n$, c'est-à-dire un infiniment petit de l'ordre n.

8. — La différence de deux infiniment petits du même ordre $k\alpha^n$ et $k'\alpha^n$ est un infiniment petit du même ordre $(k-k')\,\alpha^n$.

9. — Le produit d'un infiniment petit $k\alpha^n$ par un facteur fini A est encore un infiniment petit du même ordre. Car $Ak\alpha^n$ ou $Ak\,.\,\alpha^n$ est encore le produit de α^n par un facteur fini Ak.

10. — Le rapport de deux infiniment petits du même ordre $k\alpha^n$ et $k'\alpha^n$ est une quantité généralement finie $\frac{k}{k'}$. (Ce n'est que dans des cas particuliers que ce rapport prend la valeur *zéro* ou une valeur *infinie*.)

11. — Un infiniment petit d'ordre n, soit $k'\alpha^n$, peut toujours être négligé vis-à-vis d'un infiniment petit de l'ordre immédiatement inférieur $k\alpha^{n-1}$. Car la somme $k\alpha^{n-1}+k'\alpha^n$ peut s'écrire $\alpha^{n-1}(k+k'\alpha)$. Or l'infiniment petit $k'\alpha$ peut être négligé vis-à-vis de la quantité finie k, et il reste $k\alpha^{n-1}$.

Généralement, tout infiniment petit peut être négligé vis-à-vis d'un infiniment petit d'un ordre inférieur ; comme $k'\alpha^3$ devant $k\alpha$, par exemple, ou $k'\alpha^3$ devant $k\alpha^2$; etc.

12. — Lorsque deux variables x et y sont liées par une relation telle que

$$(1) \qquad y=f(x),$$

si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résulte pour y un accroissement correspondant, positif ou négatif, Δy ; et l'on a

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x) ;$$

d'où l'on déduit par soustraction

$$(2) \qquad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Les accroissements Δx et Δy portent le nom de *différences*.

La fonction f est dite *continue*, si l'on peut prendre Δx assez petit pour que Δy puisse être rendu moindre que toute quantité donnée. Nous ne considérerons que les fonctions continues, les seules que l'on rencontre dans les applications. Dans ce cas, si Δx devient infiniment petit, il en est en général de même de Δy ; les différences prennent alors le nom de *différentielles ;* et l'on remplace la caractéristique Δ par la caractéristique d. On écrit ainsi

$$(3) \qquad dy=f(x+dx)-f(x).$$

La différentielle dy de la fonction y est donc l'accroissement que $f(x)$ a éprouvé quand on a ajouté à x sa différentielle dx.

La partie de l'analyse qui a pour objet principal la recherche des différentielles est le *calcul différentiel ;* et chercher la différentielle d'une fonction est ce que l'on appelle *différentier* cette fonction.

Nous nous occuperons d'abord des fonctions d'une seule variable, en commençant par les fonctions explicites.

II. — PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION

§ I. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES

FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE

13. — Divisons par Δx les deux membres de l'équation (2) du numéro précédent ; il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers *zéro*, Δy tendra aussi vers *zéro ;* mais le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne deviendra pas pour cela indéterminé ; il tend toujours, comme le calcul le démontrera, vers une limite déterminée; cette limite est encore une fonction de x, qui *dérive* de $f(x)$, et que pour cette raison on appelle *fonction dérivée* ou simplement *dérivée*, et qu'on désigne par la notation $f'(x)$.

On écrit en conséquence

$$(4) \qquad \lim.\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim.\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

On voit, d'après cette relation, que *la dérivée d'une fonction est la limite du rapport entre l'accroissement de cette fonction et l'accroissement de la variable*, et que, *pour obtenir cette dérivée, il faut, dans la fonction* $f(x)$, *changer* x *en* $x+\Delta x$, *retrancher* $f(x)$ *de* $f(x+\Delta x)$, *diviser le reste par* Δx, *et chercher la limite vers laquelle tend le quotient lorsque* Δx *tend vers zéro.*