c'est-à-dire que, pour obtenir alors la dérivée de y par rapport à x, *il faut prendre la dérivée de* y *par rapport à* α, *et la diviser par la dérivée de* x *par rapport à* α.

Cette dérivée est exprimée en fonction de α ; on l'obtiendrait en fonction de x, en mettant pour α sa valeur en x tirée de la relation $x=\psi(\alpha)$.

En multipliant ensuite par dx, on aurait la différentielle de y.

Si, par exemple, on a

$$y=\sin\alpha \quad \text{et} \quad x=k\alpha,$$

on en tire

$$\frac{dy}{d\alpha}=\cos\alpha \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\alpha}=k, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{d\alpha}=\frac{\cos\alpha}{k}.$$

Mais on a $\alpha=\frac{x}{k}$; on peut donc écrire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\frac{x}{k}}{k}, \quad \text{et par suite} \quad dy=\cos\frac{x}{k}\cdot\frac{dx}{k}.$$

FONCTIONS EXPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES

26. — Considérons la fonction

$$(1) \qquad z=f(u,v),$$

dans laquelle u et v sont des variables indépendantes quelconques. On peut d'abord ne faire varier que l'une des variables indépendantes, et changer par exemple u en $u+du$, en regardant v comme constant. La variation infiniment petite que subit alors la fonction f est ce que l'on appelle sa *différentielle partielle* prise par rapport à u. Elle est égale à la *dérivée partielle* de f prise par rapport à u, multipliée par du (14). On représente cette dérivée partielle de deux manières : soit par la notation $f'_u(u,v)$, soit par la notation $\frac{df}{du}$, dans laquelle il ne faut pas voir un quotient, mais une simple manière d'écrire la dérivée. L'accroissement infiniment petit que prend $f(u,v)$ quand on fait croître u de du peut donc s'écrire

$$f'_u(u,v)\,.\,du \quad \text{ou} \quad \frac{df}{du}\,.\,du.$$

De même, si l'on regardait u comme constant, et que l'on fît varier v de dv, la fonction $f(u,v)$ varierait d'une quantité infiniment petite qui serait sa différentielle partielle prise par rapport à v, et qui aurait pour valeur

$$f'_v(u,v)\,dv \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dv}\,.\,dv,$$

l'une quelconque des notations $f'_v(u,v)$ ou $\frac{df}{dv}$ représentant la dérivée partielle de la fonction par rapport à v.

27. — Supposons maintenant que l'on fasse varier à la fois u et v, l'un de du et l'autre de dv, la fonction z variera d'une quantité infiniment petite dz, que l'on appelle sa *différentielle totale*, et qui a pour valeur

$$dz=f(u+du,v+dv)-f(u,v).$$

Or, on ne troublera pas cette valeur en retranchant et ajoutant à la fois la quantité $f(u,v+dv)$; on peut donc écrire

$$(2) \quad dz=f(u+du,v+dv)-f(u,v+dv)+f(u,v+dv)-f(u,v).$$

Mais l'ensemble des deux premiers termes du second membre n'est autre chose que la différentielle partielle de la fonction $f(u,v+dv)$ prise par rapport à u, ou la différentielle partielle par rapport à u de la fonction $f(u,v)$, puisque dv est aussi voisin de zéro qu'on le voudra et disparaît devant la quantité finie v ; l'ensemble de ces deux termes peut donc s'écrire

$$f'_u(u,v)\,.\,du \quad \text{ou} \quad \frac{df}{du}\,.\,du.$$

De même, l'ensemble des deux derniers termes n'est autre chose que la différentielle partielle de $f(u, v)$ prise par rapport à v; ils peuvent donc s'écrire

$$f'_v(u, v)\, dv \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dv} . dv.$$

Ernesto García

On a donc enfin

$$(3) \qquad dz = f'_u(u, v)\, du + f'_v(u, v)\, dv,$$

1891

ou

$$(4) \qquad dz = \frac{df}{du} . du + \frac{df}{dv} . dv;$$

ce qui revient à dire que *la différentielle totale est la somme des différentielles partielles.*

28. — Supposons que l'on ait

$$(5) \qquad z = f(u, v, w),$$

u, v, w désignant trois variables indépendantes quelconques. Si l'on fait varier l'une d'elles seulement, et qu'on fasse croître u de du par exemple, la fonction variera d'une quantité infiniment petite qui sera sa différentielle partielle par rapport à u, et que l'on pourra écrire

$$f'_u(u, v, w) . du \quad \text{ou} \quad \frac{df}{du} . du.$$

De même pour les autres variables.

Si on les fait varier toutes les trois, et que u, v, w croissent respectivement de du, dv, dw, la fonction z variera d'une quantité infiniment petite dz, qui sera sa différentielle totale, et l'on aura

$$dz = f(u + du,\ v + dv,\ w + dw) - f(u, v, w);$$

mais cette relation peut s'écrire

$$\begin{aligned} dz = {} & f(u + du,\ v + dv, w + dw) - f(u, v + dv, w + dw) \\ & + f(u, v + dv, w + dw) - f(u, v, w + dw) \\ & + f(u, v, w + dw) - f(u, v, w). \end{aligned}$$

Or la première ligne du second membre est la différentielle partielle de $f(u, v + dv, w + dw)$ prise par rapport à u, ou, ce qui revient au même, la différentielle partielle de $f(u, v, w)$, puisque dv et dw sont aussi voisins de zéro qu'on le voudra, et disparaissent devant les quantités finies v et w. De même, la seconde ligne est la différentielle partielle de $f(u, v, w + dw)$, par rapport à v, ou, ce qui revient au même, la différentielle partielle de $f(u, v, w)$, puisque dw est aussi voisin de zéro qu'on le voudra et disparaît devant w. Enfin la troisième ligne est la différentielle partielle de $f(u, v, w)$ par rapport à w. On a donc

$$(6) \qquad dz = f'_u(u, v, w)\, du + f'_v(u, v, w)\, dv + f'_w(u, v, w)\, dw,$$

ou

$$(7) \qquad dz = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv + \frac{df}{dw} dw;$$

ce qui signifie encore que *la différentielle totale est égale à la somme des différentielles partielles.*

Ce principe pourrait être étendu de la même manière à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

FONCTIONS COMPOSÉES

29. — Reprenons l'équation

$$z = f(u, v).$$

Au lieu de regarder u et v comme des variables indépendantes, supposons-les toutes deux fonctions d'une même variable x; la fonction z sera alors ce que l'on appelle une *fonction composée* de x. Or cette supposition ne changera rien à la démonstration du n° 27; on aura donc encore

$$dz = f'_u(u, v)\, du + f'_v(u, v)\, dv.$$

Mais u et v étant des fonctions de x, on a alors

$$du = u'\,dx, \quad \text{et} \quad dv = v'\,dx,$$

u' et v' désignant les dérivées de u et de v par rapport à x. On aura donc

$$dz = f'_u(u, v)\,u'\,dx + f'_v(u, v)\,v'dx,$$

et, en divisant par dx,

$$\frac{dz}{dx} = f'_u(u, v)\,.\,u' + f'_v\,.\,(u, v)\,.\,v';$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{du}\,.\,u' + \frac{df}{dv}\,.\,v';$$

c'est-à-dire, en vertu du principe sur la différentiation des fonctions de fonctions (23), que *la dérivée d'une fonction composée* f (u, v) *est la somme de ses dérivées partielles par rapport à* u *et à* v, *obtenues en regardant successivement* u *et* v *comme des fonctions de* x.

On arriverait à une conclusion analogue pour la fonction $z = f(u, v, w)$, si u, v et w étaient des fonctions d'une même variable x, c'est-à-dire qu'on aurait

$$\frac{dz}{dx} = f'_u(u, v, w)\,.\,u' + f'_v(u, v, w)\,.\,v' + f'_w(u, v, w)\,.\,w';$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{du}\,.\,u' + \frac{df}{dv}\,.\,v' + \frac{df}{dw}\,.\,w'.$$

§ 2. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES

30. — Considérons d'abord l'équation

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

dans laquelle y est dite fonction implicite de x. Si x varie de dx, y variera d'une quantité correspondante dy liée à dx par la relation

$$f(x + dx,\ y + dy) = 0,$$

et, en retranchant ces deux relations membre à membre, on obtient

$$f(x + dx,\ y + dy) - f(x, y) = 0;$$

ce qui signifie que la différentielle totale de la fonction f est constamment nulle. Or, d'après ce qu'on a vu au n° 29, cette propriété peut s'écrire

$$(2) \qquad f'_x(x, y)\,.\,1 + f'_y(x, y)\,.\,y' = 0,$$

ou

$$(2) \qquad \frac{df}{dx} + y'\,.\,\frac{df}{dy} = 0,$$

attendu que x est une fonction de x dont la dérivée est 1, et que y est une fonction de x dont la dérivée est y'. On tire de là

$$(3) \qquad y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

c'est-à-dire que, *pour obtenir la dérivée d'une fonction implicite de* x, *exprimée par l'équation* f (x, y) = 0, *il faut prendre la dérivée partielle du premier membre par rapport à* x, *la diviser par la dérivée partielle par rapport à* y, *et changer le signe du résultat.*

Soit, par exemple, l'équation

$$y^3 - 3\,axy + x^3 = 0,$$

on trouvera

$$f'_x(x, y) = -3\,(ay - x^2), \quad f'_y(x, y) = 3\,(y^2 - ax),$$

et par suite

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

31. — Remarque. Lorsque la relation entre x et y se présente sous la forme $\varphi(y) = \psi(x)$, dans laquelle ces variables sont séparées, l'application de la règle précédente donne

$$y' = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(y)}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(x)}{\varphi'(y)};$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(y)\,dy = \psi'(x)\,dx;$$

c'est-à-dire que *quand les variables* x *et* y *sont séparées, la différentielle du premier membre est égale à la différentielle du second;* ce qu'on aurait pu prévoir, car pour que deux fonctions de variables différentes soient constamment égales, il faut que leurs accroissements infiniment petits simultanés soient égaux.

32. — Les règles qui précèdent permettent de généraliser facilement le principe sur la différentiation de la fonction x^m, en l'étendant au cas de m fractionnaire ou négatif.

I. En effet, soit d'abord

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

p et q étant deux nombres entiers. En élevant les deux membres à la puissance q, on obtient

$$y^q = x^p,$$

et, par conséquent, en vertu de la remarque ci-dessus (31),

$$qy^{q-1}\,dy = px^{p-1}\,dx,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}.y}{y^q},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}.x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \frac{p}{q}.x^{\frac{p}{q}-1};$$

ce qui revient à la règle du n° **16**.

Si, par exemple on a,

$$y = x^{\frac{3}{2}},$$

on en déduira

$$y' = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on a

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

on en déduira

$$y' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

II. Soit maintenant

$$y = x^{-m};$$

on en tire

$$yx^m - 1 = 0,$$

et, en appliquant la règle exprimée par l'équation (2) du n° 30,

$$myx^{m-1} + x^m.y' = 0;$$

d'où

$$y' = -m\frac{y}{x} = -m.\frac{x^{-m}}{x} = -mx^{-m-1};$$

ce qui revient encore à la règle du n° 16.

Si, par exemple, on a

$$y = x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{on en tire} \quad y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Si l'on a

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{on en tire} \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

33. — Soit maintenant la relation $f(x, y, z) = 0$, dans laquelle z est une fonction implicite des deux variables x et y. Si x et y varient respectivement de dx et de dy, z variera d'une quantité correspondante dz liée à dx et à dy, par la relation

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) = 0.$$

En retranchant les deux relations membre à membre, on aura donc

$$f(x + dx, y + dy, z + dy) - f(x, y, z) = 0;$$

ce qui exprime que la différentielle totale de la fonction f est constamment nulle.

Or, d'après ce qu'on a vu au n° 28, cette propriété est exprimée par la relation

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

(Il faut bien se rappeler que les notations $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ ne représentent pas des quotients, mais bien les dérivées partielles de la fonction $f(x, y, z)$, par rapport à x, à y et à z). La relation ci-dessus exprime donc que *la somme des différentielles partielles de la fonction* f (x, y, z), *par rapport aux trois variables est égale à zéro.*

On démontrerait de même que si l'on avait $f(x, y, z, t) = 0$, on en pourrait déduire

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dt}dt = 0.$$

III. — APPLICATION DES PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION AUX FONCTIONS LES PLUS USITÉES

34. — *Fonctions algébriques rationnelles.* Les fonctions que l'on rencontre le plus souvent sont les fonctions algébriques entières, telles que

$$(1) \qquad y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Tx + U.$$

La différentielle d'une somme étant la somme des différentielles de ses parties (20), il faut, pour obtenir la différentielle de y, différentier successivement chacun des termes du second membre. Or, chacun de ces termes est le produit d'un facteur constant par une puissance de x ; sa différentielle s'obtient donc (21, 2°) en multipliant le facteur constant par la différentielle du facteur variable. Or, celui-ci étant une puissance de x, on obtient sa différentielle en multipliant par l'exposant de x, diminuant cet exposant d'une unité et introduisant le facteur dx (16). En appliquant ces divers principes, on aura donc

$$dy = [mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} \ldots + T]\,dx;$$

le terme U disparaît, attendu que la différentielle d'une constante est nulle (19).

Si l'on a, par exemple,

$$y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7,$$