d'où

$$y' = -m\frac{y}{x} = -m.\frac{x^{-m}}{x} = -mx^{-m-1};$$

ce qui revient encore à la règle du nº 16.

Si, par exemple, on a

$$y = x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{on en tire} \quad y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Si l'on a

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{on en tire} \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

33. — Soit maintenant la relation $f(x, y, z) = 0$, dans laquelle z est une fonction implicite des deux variables x et y. Si x et y varient respectivement de dx et de dy, z variera d'une quantité correspondante dz liée à dx et à dy, par la relation

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) = 0.$$

En retranchant les deux relations membre à membre, on aura donc

$$f(x + dx, y + dy, z + dy) - f(x, y, z) = 0;$$

ce qui exprime que la différentielle totale de la fonction f est constamment nulle.

Or, d'après ce qu'on a vu au nº 28, cette propriété est exprimée par la relation

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

(Il faut bien se rappeler que les notations $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ ne représentent pas des quotients, mais bien les dérivées partielles de la fonction $f(x, y, z)$, par rapport à x, à y et à z). La relation ci-dessus exprime donc que *la somme des différentielles partielles de la fonction* f (x, y, z), *par rapport aux trois variables est égale à zéro.*

On démontrerait de même que si l'on avait $f(x, y, z, t) = 0$, on en pourrait déduire

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dt}dt = 0.$$

III. — APPLICATION DES PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION AUX FONCTIONS LES PLUS USITÉES

34. — *Fonctions algébriques rationnelles*. Les fonctions que l'on rencontre le plus souvent sont les fonctions algébriques entières, telles que

$$(1) \qquad y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Tx + U.$$

La différentielle d'une somme étant la somme des différentielles de ses parties (20), il faut, pour obtenir la différentielle de y, différentier successivement chacun des termes du second membre. Or, chacun de ces termes est le produit d'un facteur constant par une puissance de x; sa différentielle s'obtient donc (21, 2°) en multipliant le facteur constant par la différentielle du facteur variable. Or, celui-ci étant une puissance de x, on obtient sa différentielle en multipliant par l'exposant de x, diminuant cet exposant d'une unité et introduisant le facteur dx (16). En appliquant ces divers principes, on aura donc

$$dy = [mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} \ldots + T]\,dx;$$

le terme U disparaît, attendu que la différentielle d'une constante est nulle (19).

Si l'on a, par exemple,

$$y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7,$$

on trouvera

$$dy = (2x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x - 4)\,dx.$$

35. — Après les fonctions algébriques entières, celles qu'on rencontre le plus souvent sont les fractions algébriques ; leur différentielle s'obtient en appliquant la règle donnée au n° 22 (Rem. 1°) pour la différentiation d'un quotient.

Si l'on a, par exemple,

$$(1) \qquad y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4},$$

on obtiendra successivement

$$dy = \frac{(x^2-4x+4)d(x^2-5x+6) - (x^2-5x+6)d(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)^2}dx$$
$$= \frac{(x^2-4x+4)(2x-5) - (x^2-5x+6)(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2}dx$$
$$= \frac{x^2-4x+4}{(x^2-4x-4)^2}dx$$

ou

$$(2) \qquad dy = \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

Dans cet exemple il y a une vérification facile : les deux termes de la fraction (1) proposée admettent le facteur $x - 2$; si on le supprime, il reste

$$y = \frac{x-3}{x-2}.$$

En appliquant la règle de différentiation d'un quotient, on obtient

$$dy = \frac{(x-2)\,d(x-3) - (x-3)\,d(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)^2}dx$$
$$= \frac{dx}{(x-2)^2}$$

comme plus haut.

36. — *Fonctions algébriques irrationnelles.* La règle pour la différentiation d'un radical du second degré peut être facilement établie. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Posons

$$u = ax^2 + bx + c,$$

il viendra

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$$

et, en différentiant y comme une fonction de fonction (25),

$$dy = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{(2ax+b)\,dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

c'est-à-dire que, *pour obtenir la différentielle d'un radical du second degré, il faut prendre la différentielle de la quantité placée sous le radical, et la diviser par le double du radical.*

37. — On suit une marche analogue pour différentier un radical d'indice quelconque. Soit

$$y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}},$$

u étant une fonction de x. On en tirera (32)

$$dy = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,du = \frac{1}{n}\,\frac{du}{u^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}},$$

d'où il serait facile de déduire une règle.

Soit, par exemple,

$$y = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d},$$

on trouvera

$$dy = \frac{(3ax^2 + 2bx + c)\,dx}{3\sqrt[3]{(ax^3+bx^2+cx+d)^2}}.$$

38. — On peut rencontrer des expressions dans lesquelles les radicaux sont mêlés à des fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires.

Soit, comme exemple,

$$y = \frac{(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}}{3x^3}.$$

En appliquant d'abord la règle pour la différentiation d'un quotient, après avoir mis en facteur $\frac{1}{3}$, on trouvera

$$dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 d(1+2x^2)\sqrt{1-x^2} - (1+2x^2)\sqrt{1-x^2} \cdot dx^3}{x^6}$$

ou, en effectuant les différentiations indiquées au numérateur,

$$dy = \frac{1}{3} \frac{x^3\left[4x\sqrt{1-x^2} - \frac{(1+2x^2)x}{\sqrt{1-x^2}}\right] - (1+2x^2)\sqrt{1-x^2} \cdot 3x^2}{x^6} dx$$

Supprimant le facteur x^2 commun aux deux termes, et multipliant ensuite ces deux termes par $\sqrt{1-x^2}$, il vient

$$dy = \frac{1}{3} \frac{x[4x(1-x^2) - (1+2x^2)x] - 3(1+2x^2)(1-x^2)}{x^4\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Effectuant les calculs au numérateur, et réduisant, on trouve enfin

$$dy = -\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}.$$

On trouvera de même que

$$y = \frac{(8x^4+4x^2+3)\sqrt{x^2-1}}{15x^5}$$

donne par la différentiation

$$dy = \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}.$$

39. — *Fonctions exponentielles et logarithmiques.* Soit maintenant à différentier la fonction exponentielle

$$y = a^x.$$

La méthode la plus simple consiste à prendre d'abord les logarithmes des deux membres et à écrire

$$\log y = x \log a.$$

Les variables étant séparées, on peut (31) égaler les différentielles des deux membres, et écrire (17) en conséquence

$$\frac{\log e . dy}{y} = \log a . dx,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e} . y = \frac{\log a}{\log e} . a^x, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{\log a}{\log e} a^x dx.$$

Ainsi, pour obtenir la dérivée de a^x, il suffit de multiplier par le facteur constant $\frac{\log a}{\log e}$.

Si l'on avait $a = e$, il viendrait

$$y = e^x \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Ainsi la fonction e^x jouit de cette propriété qu'elle est égale à sa dérivée.

40. — L'exponentielle $y = a^{-x}$ peut être ramenée à la précédente en posant $-x = u$; d'où $du = -dx$. On a alors

$$y = a^u;$$

par suite

$$dy = \frac{\log a}{\log e} a^u du = -\frac{\log a}{\log e} a^{-x} dx.$$

Si a était égal à e, on aurait

$$y = e^{-x} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -e^{-x};$$

ainsi la fonction e^{-x} est égale et de signe contraire à sa dérivée.

41. — On peut avoir en exposant le produit de x par une constante. Soit, par exemple, $y = a^{mx}$. On posera $u = mx$, d'où $du = mdx$. On aura alors

$$dy = \frac{\log a}{\log e} a^u \, du = \frac{\log a}{\log e} a^{mx} \, . mdx.$$

On trouverait de même que $y = a^{-mx}$ donne par la différentiation

$$dy = -\frac{\log a}{\log e} a^{-mx} \, mdx.$$

On rencontre souvent des expressions de la forme

$$y = \mathrm{A}e^{mx} + \mathrm{B}e^{-mx}.$$

On en tire, en appliquant les règles précédentes,

$$dy = m\,(\mathrm{A}e^{mx} - \mathrm{B}e^{-mx})\,dx.$$

42. — On a vu au n° 17 comment on différentie le logarithme de x; mais on peut avoir à différentier le logarithme d'une fonction de x, par exemple,

$$y = \log'(x + \sqrt{1+x^2}).$$

On posera

$$u = x + \sqrt{1+x^2}, \quad \text{d'où} \quad du = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx,$$

on aura alors

$$y = \log' u, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{du}{u} = \frac{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx}{x + \sqrt{1+x^2}},$$

ou

$$dy = \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)\,dx}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

43. — On pourrait être embarrassé pour différentier la fonction $y = x^x$. Il suffit pour cela de prendre les logarithmes népériens des deux membres, ce qui donne

$$\log' y = x \log' x.$$

Les variables étant séparées, on peut égaler les différentielles des deux membres (31), et l'on trouve

$$\frac{dy}{y} = \left(\log' x + x \, . \frac{1}{x}\right) dx = (1 + \log' x)\, dx;$$

d'où

$$dy = y\,(1 + \log' x)\,dx = x^x (1 + \log' x)\,dx.$$

44. — *Fonctions circulaires*. On a vu (18) que la différentielle de $\sin x$ est $\cos x\,dx$.

Soit maintenant $y = \cos x$. Pour différentier cette fonction, on pourrait suivre une marche analogue à celle du n° 18; mais il est plus simple d'opérer de la manière suivante. Posons

$$x = \frac{\pi}{2} - u, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{\pi}{2} - x, \quad \text{et} \quad du = -dx.$$

Nous aurons

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u,$$

et par conséquent

$$dy = \cos u\,du = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).(-dx) = -\sin x\,dx.$$

Soit $y = \operatorname{tang} x$. On pourra écrire

$$y = \frac{\sin x}{\cos x};$$

et, en appliquant la règle pour la différentiation d'un quotient (22), on trouvera

$$dy = \frac{\cos x . d\sin x - \sin x . d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Soit de même $y = \cot x$; on écrira

$$y = \frac{\cos x}{\sin x},$$

d'où

$$dy = \frac{\sin x . d\cos x - \cos x\, d\sin x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$
$$= -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

45. — La sécante et la cosécante sont rarement employées; mais la différentiation de ces fonctions n'offrirait aucune difficulté. Soit, par exemple,

$$y = \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}.$$

On posera

$$u = \cos x, \quad \text{d'où} \quad du = -\sin x\,dx.$$

On aura alors

$$y = \frac{1}{u} = u^{-1};$$

et par conséquent

$$dy = -u^{-2}\,du = -\frac{du}{u^2},$$

ou bien

$$dy = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}.$$

Pour $y = \operatorname{coséc} x$, on trouverait

$$dy = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

46. — Au lieu des fonctions circulaires directes dont nous venons de parler, on peut avoir affaire aux fonctions circulaires inverses.

Soit, par exemple,

$$y = \operatorname{arc.} \sin x;$$

on en déduira d'abord

$$x = \sin y, \quad \text{d'où} \quad dx = \cos y\,dy,$$

ou

$$dx = \sqrt{1 - \sin^2 y} . dy = \sqrt{1 - x^2} . dy;$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Soit, en second lieu,

$$y = \operatorname{arc.} \cos x;$$

on en déduira

$$x = \cos y,$$

d'où

$$dx = -\sin y\,dy = -\sqrt{1 - \cos^2 y} . dy,$$

ou

$$dx = -\sqrt{1 - x^2} . dy,$$

d'où

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

différentielle dont la forme ne diffère de la précédente que par le signe.

Soit encore

$$y = \text{arc tang}\, x;$$

on en déduit

$$x = \text{tang}\, y;$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = (1 + \text{tang}^2 y)\, dy,$$

ou

$$dx = (1 + x^2)\, dy,$$

d'où

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Soit enfin

$$y = \text{arc cot}\, x;$$

on en déduit

$$x = \cot y.$$

d'où

$$dx = -\frac{dy}{\sin^2 y} = -(1 + \cot^2 y)\,.dy;$$

ou

$$dx = -(1 + x^2)\, dy,$$

d'où

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

différentielle dont la forme ne diffère de la précédente que par le signe.

47. — On peut rencontrer des fonctions analogues aux précédentes (45, 46), mais dans lesquelles x est multiplié par un facteur constant.

Soit, par exemple,

$$y = \sin mx;$$

d'après la règle de la différentiation des fonctions de fonctions (23), ou, en prenant mx pour variable, on trouvera

$$dy = \cos mx\,.\,dmx = m \cos mx\, dx;$$

c'est-à-dire qu'il faut opérer comme au n° 45, et multiplier le résultat par m.

Soit de même

$$y = \text{arc sin}\, \frac{x}{a};$$

en appliquant les mêmes règles, on trouvera

$$dy = \frac{d\,.\,\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{\frac{1}{a}\,dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

On trouvera semblablement que

$$y = \text{tang}\, mx$$

donne

$$dy = \frac{m dx}{\cos^2 mx},$$

et que

$$y = \text{arc tang}\, \frac{x}{a}$$

donne

$$dy = \frac{d\,.\,\frac{x}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{a dx}{a^2 + x^2}.$$

48. — Enfin les fonctions circulaires peuvent se trouver mêlées avec des fonctions algébriques ou logarithmiques. Nous en donnerons deux exemples.

Soit d'abord

$$y = c - \log' \cot \tfrac{1}{2} x.$$

Posons

$$\tfrac{1}{2} x = v, \quad \text{et} \quad \cot v = u;$$

il viendra

$$y = c - \log' u;$$

par conséquent

$$dy = -\frac{du}{u};$$

mais

$$du = -\frac{dv}{\sin^2 v},$$

et

$$dv = \tfrac{1}{2}\, dx;$$

il viendra donc, en substituant

$$dy = -\frac{\dfrac{-\frac{1}{2}\,dx}{\sin^2 \frac{1}{2}x}}{\cot.\frac{1}{2}x} = \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2}\, x \cos \frac{1}{2}\, x} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Soit, en second lieu,

$$y = \mathrm{R\,arc.\cos}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{R}}\right) - \sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}.$$

Posons

$$\mathrm{A} = \mathrm{R\,arc\,cos}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{R}}\right),\ u = 1 - \frac{x}{\mathrm{R}},\ \mathrm{B} = \sqrt{2\mathrm{R}x - x^2};$$

il viendra

$$y = \mathrm{A} - \mathrm{B}, \quad \text{d'où} \quad dy = d\mathrm{A} - d\mathrm{B};$$

$\mathrm{A} = \mathrm{R\,arc\,cos}\,u$, d'où

$$d\mathrm{A} = -\mathrm{R}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{\mathrm{R}}\right)}}$$

$\sqrt{1-\left(\frac{R-x}{R}\right)^2} = \frac{R^2-2Rx+x^2}{R^2}$

ou

$$d\mathrm{A} = \frac{\mathrm{R}\,dx}{\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}}$$

et

$$d\mathrm{B} = \frac{(2\mathrm{R} - 2x)\,dx}{2\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}} = \frac{(\mathrm{R} - x)\,dx}{\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}};$$

par conséquent

$$dy = \frac{\mathrm{R} - (\mathrm{R} - x)}{\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}}\,dx = \frac{x\,dx}{\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}} = dx\sqrt{\frac{x}{2\mathrm{R} - x}}$$

On peut, à l'aide des règles ci-dessus établies, différentier de même toutes les fonctions d'une variable.

49. — Les fonctions composées peuvent toujours être différentiées directement comme des fonctions de la variable indépendante x, et il y a rarement avantage à appliquer la règle du n° 29, qui nous a servi surtout à établir la méthode de différentiation des fonctions implicites. Cependant, pour compléter ce que nous avons à dire sur ce sujet, nous traiterons un exemple de fonction composée.

Soit

$$(1) \qquad z = u\sqrt{1 - v^2} + \frac{v}{u} = f(u, v),$$

relation dans laquelle on suppose $u = e^x$ et $v = \sin x$.

On aura d'abord

$$\frac{df}{du} = \sqrt{1 - v^2} - \frac{v}{u^2} \quad \text{et} \quad \frac{df}{dv} = \frac{-uv}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{1}{u}.$$

Par conséquent

$$(2) \quad dz = \left(\sqrt{1-v^2} - \frac{v}{u^2}\right) du - \left(\frac{uv}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{1}{u}\right) dv.$$

Ce résultat peut être facilement vérifié. Si l'on y met pour u et v leurs valeurs, en remarquant que,

$$du = e^x dx \quad \text{et} \quad dv = \cos x \, dx,$$

on trouve

$$dz = \left(\cos x - \frac{\sin x}{e^{2x}}\right) e^x dx - \left(\frac{e^x \sin x}{\cos x} + \frac{1}{e^x}\right) \cos x \, dx;$$

ce qu'on peut écrire

$$(3) \quad dz = (e^x \cos x - e^{-x} \sin x - e^x \sin x - e^{-x} \cos x) \, dx.$$

Or si dans la relation (1) on met pour u et v leurs valeurs, on a

$$z = e^x \cos x + e^{-x} \sin x,$$

et si l'on différentie directement, en appliquant les règles pour la différentiation d'une somme et d'un produit, on retombe sur le résultat exprimé par la relation (3).

IV. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS

§ I. — FONCTIONS EXPLICITES D'UNE VARIABLE

50. — La dérivée d'une fonction de x étant elle-même une fonction de x, on peut en prendre la dérivée ; on obtient ainsi ce que l'on appelle la *dérivée seconde* de la fonction. La dérivée première étant représentée par $f'(x)$ ou par y', on représente de même la dérivée seconde par $f''(x)$ ou par y''.

Cette seconde dérivée étant encore une fonction de x, on peut en prendre la dérivée ; et l'on obtient ce que l'on appelle

la *dérivée troisième*, que l'on représente par $f'''(x)$ ou par y'''.

En prenant la dérivée de la dérivée troisième, on obtiendrait la *dérivée quatrième*, que l'on représenterait par $f^{\text{IV}}(x)$ ou par y^{IV}, et ainsi de suite.

51. — Mais on emploie encore, pour représenter ces dérivées successives, une autre notation qu'il faut connaître.

On a vu (14) que la dérivée première peut être représentée par $\frac{dy}{dx}$, et porte alors plus particulièrement le nom de *coefficient différentiel*. Par analogie, on peut représenter la dérivée seconde y'', c'est-à-dire la dérivée de y', par $\frac{dy'}{dx}$; et, en mettant pour y' son expression $\frac{dy}{dx}$, on a

$$y'' = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}.$$

Or, dans le cours d'un même calcul, l'accroissement infiniment petit dx attribué à la variable indépendante est toujours considéré comme constant, ce qui revient à supposer que cette variable croît en progression arithmétique dont la raison est dx. L'expression ci-dessus peut donc s'écrire

$$y'' = \frac{d.dy}{dx^2}.$$

Au lieu d'écrire deux fois le signe d de la différentiation, on convient de ne l'écrire qu'une fois ; mais on l'affecte de l'indice ², et l'on écrit

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Sous cette forme, la dérivée seconde prend plus particulièrement le nom de *coefficient différentiel du second ordre*.