Par conséquent

$$(2)\quad dz = \left(\sqrt{1-v^2} - \frac{v}{u^2}\right) du - \left(\frac{uv}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{1}{u}\right) dv.$$

Ce résultat peut être facilement vérifié. Si l'on y met pour u et v leurs valeurs, en remarquant que,

$$du = e^x dx \quad \text{et} \quad dv = \cos x\, dx,$$

on trouve

$$dz = \left(\cos x - \frac{\sin x}{e^{2x}}\right) e^x dx - \left(\frac{e^x \sin x}{\cos x} + \frac{1}{e^x}\right) \cos x\, dx;$$

ce qu'on peut écrire

$$(3)\quad dz = (e^x \cos x - e^{-x} \sin x - e^x \sin x - e^{-x} \cos x)\, dx.$$

Or si dans la relation (1) on met pour u et v leurs valeurs, on a

$$z = e^x \cos x + e^{-x} \sin x,$$

et si l'on différentie directement, en appliquant les règles pour la différentiation d'une somme et d'un produit, on retombe sur le résultat exprimé par la relation (3).

IV. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS

§ I. — FONCTIONS EXPLICITES D'UNE VARIABLE

50. — La dérivée d'une fonction de x étant elle-même une fonction de x, on peut en prendre la dérivée ; on obtient ainsi ce que l'on appelle la *dérivée seconde* de la fonction. La dérivée première étant représentée par $f'(x)$ ou par y', on représente de même la dérivée seconde par $f''(x)$ ou par y''.

Cette seconde dérivée étant encore une fonction de x, on peut en prendre la dérivée ; et l'on obtient ce que l'on appelle

la *dérivée troisième*, que l'on représente par $f'''(x)$ ou par y'''.

En prenant la dérivée de la dérivée troisième, on obtiendrait la *dérivée quatrième*, que l'on représenterait par $f^{\text{IV}}(x)$ ou par y^{IV}, et ainsi de suite.

51. — Mais on emploie encore, pour représenter ces dérivées successives, une autre notation qu'il faut connaître.

On a vu (14) que la dérivée première peut être représentée par $\frac{dy}{dx}$, et porte alors plus particulièrement le nom de *coefficient différentiel*. Par analogie, on peut représenter la dérivée seconde y'', c'est-à-dire la dérivée de y', par $\frac{dy'}{dx}$; et, en mettant pour y' son expression $\frac{dy}{dx}$, on a

$$y'' = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}.$$

Or, dans le cours d'un même calcul, l'accroissement infiniment petit dx attribué à la variable indépendante est toujours considéré comme constant, ce qui revient à supposer que cette variable croît en progression arithmétique dont la raison est dx. L'expression ci-dessus peut donc s'écrire

$$y'' = \frac{d.dy}{dx^2}.$$

Au lieu d'écrire deux fois le signe d de la différentiation, on convient de ne l'écrire qu'une fois ; mais on l'affecte de l'indice ², et l'on écrit

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Sous cette forme, la dérivée seconde prend plus particulièrement le nom de *coefficient différentiel du second ordre*.

Alumno Jº Rojas y Lopez.

De même on peut représenter la dérivée troisième y''', ou la dérivée de y'', par

$$\frac{dy''}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d.\frac{d^2y}{dx^2}}{dx},$$

et, puisque dx est regardé comme constant, on peut écrire

$$y''' = \frac{d\,d^2y}{dx^3}.$$

On n'écrit le signe d qu'une fois en l'affectant de l'indice ^{3}, et l'on a

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3};$$

c'est le *coefficient différentiel du troisième ordre*.

En général, on représente d'une manière analogue la dérivée d'un ordre quelconque n ; et l'on écrit

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n};$$

c'est le *coefficient différentiel de l'ordre* n.

52. — Soit, par exemple, $y = x^m$, on en tirera

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3};$$

et en général

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n},$$

On peut remarquer que, pour $n = m$, on obtient

$$\frac{d^my}{dx^m} = m(m-1)\ldots3.2.1,$$

quantité constante ; en sorte que la dérivée de l'ordre $m+1$ est nulle, et qu'il en est de même de toutes les suivantes.

On en conclut qu'une fonction algébrique entière du degré m n'a pas plus de m dérivées successives ; la dérivée de l'ordre m est constante, et toutes les suivantes sont nulles.

Mais, pour toutes les autres fonctions, le nombre des dérivées successives est indéfini. Si, par exemple, on a $y = e^x$, on en déduira

$$\frac{dy}{dx} = e^x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = e^x;$$

et ainsi de suite ; toutes les dérivées sont égales entre elles et à la fonction e^x.

Si l'on a $y = \sin x$, on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \cos x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x; \quad \frac{d^4y}{d^4x} = +\sin x, \ldots;$$

les dérivées se reproduisent périodiquement dans l'ordre

$$+\cos x, \ -\sin x, \ -\cos x, \ +\sin x.$$

On verrait de même que les dérivées de e^{-x} ont toutes pour valeur absolue e^{-x}, mais qu'elles sont alternativement affectées du signe — et du signe +, et que les dérivées successives de $\cos x$ se reproduisent périodiquement dans l'ordre

$$-\sin x, \ -\cos x, \ +\sin x, \ +\cos x.$$

53. — La notation des différentielles successives se déduit de celle des dérivées.

Les différentielles successives de y sont :

$$dy, \ d.dy \quad \text{ou} \quad d^2y, \ d.d^2y \quad \text{ou} \quad d^3y,$$

et ainsi de suite.

Si maintenant on se rappelle que la différentielle d'une fonction de x est égale à sa dérivée multipliée par dx, et que le facteur dx doit être considéré comme constant, on aura

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}\,dx,$$

$$d^2y = f''(x)\,dx\,dx = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2,$$

$$d^3y = f'''(x)\,dx^2.dx = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^3,$$

et ainsi de suite, relations qu'il ne faut pas confondre avec des identités, attendu que

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots,$$

sont des notations spéciales et non des quotients.

On a, en général,

$$d^ny = \frac{d^ny}{dx^n}\,dx^n,$$

et l'on voit que la différentielle de l'ordre n est un infiniment petit du même ordre, puisque le facteur $\frac{d^ny}{dx^n}$, qui représente une dérivée, est généralement fini.

§ 2. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS EXPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES

54. — Soit $f(u,v)$ une fonction de deux variables indépendantes. On a vu que sa *dérivée partielle* (26) par rapport à u est représentée par $\frac{df}{du}$. Cette dérivée étant, en général, elle-même une fonction de u et de v, on peut en prendre la dérivée partielle par rapport à u; et, conformément à la notation adoptée pour les fonction d'une variable (51), on la représentera par $\frac{d^2f}{du^2}$. Cette dérivée seconde étant une fonction de u et de v, on pourra en prendre la dérivée partielle par rapport à u, et l'on aura la dérivée troisième $\frac{d^3f}{du^3}$; et ainsi de suite.

On verrait de la même manière que les dérivées partielles des divers ordres prises par rapport à v sont représentées par $\frac{df}{dv}, \frac{d^2f}{dv^2}, \frac{d^3f}{dv^3}, \ldots$

Mais, après avoir pris la dérivée partielle par rapport à u, $\frac{df}{du}$, comme cette dérivée est une fonction de u et de v, on peut en prendre la dérivée par rapport à v; on la représente, par analogie, par $\frac{d^2f}{du\,dv}$.

On pourrait, au contraire, après avoir pris la dérivée de $f(u,v)$ par rapport à v, $\frac{df}{dv}$, prendre la dérivée partielle de celle-ci par rapport à u; on la représente par $\frac{d^2f}{dv\,du}$.

Plus généralement, on peut, après avoir pris p dérivées partielles successives de $f(u,v)$ par rapport à u, prendre ensuite q dérivées partielles successives de la dernière par rapport à v.

Le résultat final de ce calcul est une dérivée de l'ordre $p+q$, que l'on représente par

$$\frac{d^nf}{du^p\,dv^q},$$

en remplaçant, pour abréger, $p+q$ par n.

Si, par exemple, on a pris deux dérivées partielles successives par rapport à u, puis trois dérivées partielles successives par rapport à v, le résultat final sera représenté par

$$\frac{d^5f}{du^3\,dv^2}.$$

55. — Dans ce genre de calcul, *l'ordre des différentiations est indifférent.*

On fait voir aisément, par exemple, qu'on a

$$\frac{d^2f}{du\,dv}=\frac{d^2f}{dv\,du}.$$

En effet, on a vu au n° 12, que si l'on a $y=f(x)$, on en tire

$$dy=f(x+dx)-f(x),$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}.$$

Si donc on a $z=f(u,v)$, et que l'on considère d'abord le second membre comme fonction de u, c'est-à-dire v comme constant, on aura

$$(2)\qquad \frac{dz}{du}=\frac{f(u+du,v)-f(u,v)}{du}.$$

Si l'on veut obtenir la dérivée de cette expression par rapport à v, il faudra, d'après la règle exprimée par la relation (1) elle-même, changer, dans le second membre de (2), la variable v en $v+dv$, retrancher du résultat la valeur primitive de ce second membre, et diviser la différence par dv, ce qui donnera

$$(3)\qquad \frac{d^2z}{du\,dv}=\frac{f(u+du,v+dv)-f(u,v+dv)-f(u+du,v)+f(u,v)}{du\,dv}.$$

Supposons maintenant que l'on fasse le calcul dans un ordre inverse. En ne faisant varier d'abord que v, on aura

$$\frac{dz}{dv}=\frac{f(u,v+dv)-f(u,v)}{dv}.$$

Pour obtenir la dérivée de cette expression par rapport à u, il faut, conformément à la règle exprimée par la relation (1),

changer, dans le second membre, la variable u en $u+du$, retrancher du résultat la valeur primitive de ce second membre, et diviser la différence par du, ce qui donne

$$(4)\qquad \frac{d^2z}{dv\,du}=\frac{f(u+du,v+dv)-f(u+du,v)-f(u,v+dv)+f(u,v)}{dv\,du}.$$

Or, si l'on compare les seconds membres des relations (3) et (4), on reconnaît qu'ils ne diffèrent que par l'ordre des termes du numérateur, ou par l'ordre des facteurs du dénominateur; ils sont donc égaux, et l'on a

$$\frac{d^2z}{du\,dv}=\frac{d^2z}{dv\,du}.$$

Ce théorème étant applicable aussi bien à une dérivée qu'à la fonction $f(u,v)$ elle-même, il en résulte qu'on pourra toujours intervertir l'ordre de deux différentiations consécutives quelconques, et amener par conséquent les différentiations à se succéder dans un ordre quelconque; ce qu'il s'agissait d'établir.

56. Cela posé, on a trouvé au n° 27 que la relation

$$z=f(u,v)$$

donne

$$(5)\qquad dz=\frac{df}{du}du+\frac{df}{dv}dv,$$

dz désignant la différentielle totale de $f(u,v)$.

Si l'on différentie les deux membres en faisant tout varier, l'application des règles relatives à la différentiation d'une somme et d'un produit donnera

$$(6)\qquad d^2z=d.\left(\frac{df}{du}\right)du+\frac{df}{du}d^2u+d.\left(\frac{df}{dv}\right)dv+\frac{df}{dv}d^2v.$$

Mais si l'on applique aux fonctions $\frac{df}{du}$ et $\frac{df}{dv}$ la règle exprimée par la relation (5), on obtient

$$d.\left(\frac{df}{du}\right)=\frac{d^2f}{du^2}du+\frac{d^2f}{du\,dv}.dv$$

et

$$d.\left(\frac{df}{dv}\right)=\frac{d^2f}{dv\,du}du+\frac{d^2f}{dv^2}dv.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (6), et remarquant que $\frac{d^2f}{du\,dv}=\frac{d^2f}{dv\,du}$, on trouve

$$(7)\quad d^2z=\frac{d^2f}{du^2}du^2+2\frac{d^2f}{du\,dv}du\,dv+\frac{d^2f}{dv^2}dv^2+\frac{df}{du}d^2u+\frac{df}{dv}d^2v.$$

57. — Pour obtenir d^3z, il faudrait différentier la relation (7) en faisant tout varier; la différentiation introduirait: 1° les quantités $d.\left(\frac{d^2f}{du^2}\right)$, $d.\left(\frac{d^2f}{du\,dv}\right)$, $d.\left(\frac{d^2f}{dv^2}\right)$, dont on obtiendrait la valeur en appliquant à ces fonctions la règle exprimée par l'équation (5), et 2° les quantités $d\left(\frac{df}{du}\right)$ et $d\left(\frac{df}{dv}\right)$ déjà obtenues plus haut; en faisant les substitutions, et tenant compte du théorème du n° 55, on arriverait à la valeur de d^3z. On suivrait une marche analogue pour obtenir d^4z et les différentielles suivantes. Mais le calcul va toujours en se compliquant, et, au delà de d^2z, les résultats ne sont pas utiles dans les applications ordinaires.

Remarques.— I. Dans le cas particulier où u et v sont remplacés par x et par y, et où l'on a

$$z=f(x,y),$$

on pose souvent

$$\frac{df}{dx}=p,\ \frac{df}{dy}=q,\ \frac{d^2f}{dx^2}=r,\ \frac{d^2f}{dx\,dy}=s,\ \frac{d^2f}{dy^2}=t.$$

Les équations (5) et (7) deviennent alors

$$(8)\quad \begin{cases} dz=p\,dx+q\,dy \\ d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2+p\,d^2x+q\,d^2y.\end{cases}$$

Ces notations sont adoptées par beaucoup d'auteurs.

II. Si les variables x et y, au lieu d'être indépendantes, étaient fonctions d'une même variable indépendante α, la variable z serait aussi fonction de α, et l'on aurait

$$dx=\frac{dx}{d\alpha}d\alpha,\ dy=\frac{dy}{d\alpha}d\alpha,\ d^2x=\frac{d^2x}{d\alpha^2}d\alpha^2,\ d^2y=\frac{d^2y}{d\alpha^2}d\alpha^2,$$

$$d^2z=\frac{d^2z}{d\alpha^2}d\alpha^2.$$

En substituant ces valeurs dans la relation (8) et divisant par $d\alpha^2$, on trouve

$$(9)\quad \frac{d^2z}{d\alpha^2}=r\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2+2s\frac{dx}{d\alpha}.\frac{dy}{d\alpha}+t\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2+p\frac{d^2x}{d\alpha^2}+q\frac{d^2y}{d\alpha^2}.$$

§ 3. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS COMPOSÉES

58. — Si, dans la fonction $f(u,v)$, les variables u et v, au lieu d'être indépendantes, sont fonctions d'une même variable x, la relation (7) du n° 56 n'en a pas moins lieu. Mais on a alors

$$du=u'dx,\ d^2u=u''dx^2,\ dv=v'dx,\ d^2v=v''dx^2,$$

u', u'', v', v'' désignant les deux premières dérivées de u et de v par rapport à x. Substituant ces valeurs et divisant par dx^2, on obtient

$$(10)\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2f}{du^2}u'^2+2\frac{d^2f}{du\,dv}u'v'+\frac{d^2f}{dv^2}v'^2+\frac{df}{du}u''+\frac{df}{dv}v''.$$

§ 4. — DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES DES FONCTIONS IMPLICITES

59. — Soit $f(x, y) = 0$, la relation qui lie deux variables x et y, la première étant la variable indépendante. Posons d'abord

$$z = f(x, y),$$

nous en déduirons, en vertu de l'équation (10) du n° 58,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}x'^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}x'y' + \frac{d^2f}{dy^2}y'^2 + \frac{df}{dx}x'' + \frac{df}{dy}\cdot y''.$$

Mais puisque la fonction $f(x, y)$ est constamment nulle, il en est de même de ses dérivées successives (19. Rem.); on a donc $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$. En même temps, x devenant la variable indépendante, on a $x' = 1$ et $x'' = 0$; l'équation ci-dessus devient donc

$$(11) \qquad \frac{d^2f}{dx^2} + 2y'\frac{d^2f}{dx\,dy} + y'^2\frac{d^2f}{dy^2} + y''\frac{df}{dy} = 0.$$

Il faut remarquer que cette relation peut se déduire de la relation

$$(12) \qquad \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0,$$

établie au n° 30. Il suffit pour cela de différentier le premier membre en faisant tout varier, et en regardant y' comme une fonction de x, et d'égaler à zéro la dérivée ainsi obtenue.

Si l'on opère de même sur la relation (11), c'est-à-dire si l'on différentie le premier membre en faisant tout varier, et en regardant y' et y'' comme des fonctions de x, puis qu'on égale à zéro la dérivée obtenue, on trouve

$$\cancel{(14)}\ (13) \qquad \left(\frac{d^3f}{dx^3} + 3y'\frac{d^3f}{dx^2dy} + 3y'^2\frac{d^3f}{dx\,dy^2} + y'^3\frac{d^3f}{dy^3}\right) + 3\left(\frac{d^2f}{dx\,dy} + y'\frac{d^2f}{dy^2}\right)y'' + y'''\frac{df}{dy} = 0,$$

équation qu'on pourrait obtenir aussi, mais moins simplement, en suivant la marche indiquée au n° 57, changeant u et v en x et en y et remarquant que puisque x devient variable indépendante, on a

$$x' = 1,\ x'' = 0,\ x''' = 0.$$

On voit que la première dérivée est donnée par la relation (12); cette dérivée étant connue, on substituera sa valeur dans la relation (11), qui donnera y''; les dérivées y' et y'' étant connues, on substituera leurs valeurs dans la relation (13), qui donnera y'''.

Les dérivées suivantes ne se rencontrent pas dans les applications; mais elles s'obtiendraient par des calculs analogues. Pour obtenir y^{iv}, par exemple, il faudrait égaler à zéro la dérivée du premier membre de l'équation (11) prise en faisant tout varier et en regardant y', y'' et y''' comme des fonctions de x.

V. — DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES

§ I. — FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

60. — Étant donnée une fonction de x, que nous représenterons par $f(x)$, on donne à la variable x un accroissement h, et l'on se propose de développer $f(x+h)$ en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de h; en d'autres termes, on se propose de trouver une série de ce genre qui puisse remplacer la fonction $f(x+h)$. Il faut pour cela que la série obtenue soit *convergente* (voy. l'*Appendice*), et qu'en prenant un nombre suffisant de termes, on puisse, quel que soit x, approcher autant qu'on le voudra de la valeur de $f(x+h)$.

61. — Si la fonction proposée est algébrique et entière par rapport à x, le développement demandé est facile à obtenir.