VI. — APPLICATIONS ANALYTIQUES

§ I. — EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS DE FONCTIONS EN SÉRIES

73. — *Développement de* e^x *et de* e^{-x}. Les dérivées successives de e^x sont toutes égales à e^x (52) ; et, pour $x=0$, elle se réduisent toutes à l'unité. En appliquant la formule de Maclaurin (69), on a donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,e^{\theta x}.$$

On a vu (65) que

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

tend vers zéro à mesure que n augmente ; d'ailleurs, $e^{\theta x}$ reste fini ; donc, le reste tend vers zéro, et la série peut toujours être employée.

74. — Si l'on a à développer e^{-x}, on remarquera que les dérivées successives de cette fonction sont alternativement $-e^{-x}$ et $+e^{-x}$ (52) ; et, pour $x=0$, elles se réduisent alternativement à -1 et à $+1$. D'ailleurs, la fonction proposée se réduit elle-même à $+1$; on a donc dans ce cas

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,e^{-\theta x},$$

et l'on verrait comme ci-dessus que le reste tend vers zéro.

75. — *Développement de* $\sin x$ *et de* $\cos x$. Les dérivées successives de $\sin x$ se reproduisent périodiquement dans l'ordre (52).

$$+\cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ +\sin x,\ \ldots,$$

et, pour $x=0$, elles prennent périodiquement les valeurs

$$+1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \text{etc.}$$

D'ailleurs, la fonction proposée elle-même se réduit à zéro. En appliquant la formule de Maclaurin, on trouve donc

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ \ldots\ + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(\theta x).$$

Or $\dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}$ tend vers zéro, et $f^n(\theta x)$ a pour valeur absolue $\cos \theta x$, n étant supposé impair ; le reste tend donc vers zéro.

76. — Si l'on a à développer $\cos x$, on remarque que ses dérivées successives se reproduisent périodiquement dans l'ordre (52)

$$-\sin x,\ -\cos x,\ +\sin x,\ +\cos x,\ \ldots.,$$

ce qui donne périodiquement pour $x=0$

$$0,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots.$$

D'ailleurs, la fonction proposée se réduit elle-même à $+1$. On a donc dans ce cas

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ \ldots\ \pm \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos \theta x,$$

si l'on suppose n pair. Le reste tend donc encore vers zéro.

77. — *Développement de* $\log'(1+x)$ *et de* $\log'(1-x)$

Soit d'abord

$$f(x) = \log'(1+x),$$

on trouvera successivement

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$
$$f''(x) = -1.(1+x)^{-2},$$
$$f'''(x) = +1.2\,(1+3)^{-3},$$
$$f^{\text{IV}}(x) = -1.2.3\,(1+x)^{-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^n(x) = \pm 1.2.3\ldots(n-1)\,(1+x)^{-n};$$

et, pour $x=0$,

$$\begin{aligned}
f\ (0)&=\log' 1=0,\\
f'\ (0)&=+1,\\
f''\ (0)&=-1,\\
f'''(0)&=+1.2,\\
f^{\text{IV}}(0)&=-1.2.3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La formule de Maclaurin donnera donc

$$\log'(1+x)=0+\frac{1}{1}x-\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1.2}{1.2.3}x^3-\frac{1.2.3}{1.2.3.4}x^4+\ldots$$
$$\pm\frac{1.2.3\ldots(n-1)x^n}{1.2.3\ldots(n-1)n}(1+\theta x)^{-n}$$

ou

$$(1)\quad \log'(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \ldots\ \pm\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}.$$

Or, le reste peut s'écrire

$$\pm\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

et l'on voit qu'il tendra vers zéro si $\dfrac{x}{1+\theta x}$ est égal à l'unité ou plus petit que l'unité, ce qui exige que x soit égal ou inférieur à l'unité.

78. — Soit maintenant

$$f(x)=\log'(1-x)\,;$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
f'\ (x)&=-(1-x)^{-1},\\
f''\ (x)&=+1.(1-x)^{-2},\\
f'''(x)&=-1.2\,(1-x)^{-3},\\
f^{\text{IV}}(x)&=+1.2.3\,(1-x)^{-4}\,;
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Et pour $x=0$,

$$\begin{aligned}
f\ (0)&=0,\\
f'\ (0)&=-1,\\
f''\ (0)&=-1,\\
f'''(0)&=-1.2,\\
f^{\text{IV}}(0)&=-1.2.3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On aura donc dans ce cas, en employant la seconde forme du reste (68),

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\log'(1-x)&=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\\
&\quad-\frac{x^n}{n-1}(1-\theta x)^{-n}.(1-\theta)^n.
\end{aligned}\right.$$

Le reste peut s'écrire

$$\frac{x^n}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n.$$

La quantité entre crochets étant plus petite que l'unité, puisque x est supposé moindre que 1, et x^n pouvant devenir aussi petit que l'on voudra, on voit que le reste tend vers zéro à mesure que n augmente.

79. — On déduit des deux formules précédentes (1) et (2) la formule qui sert à calculer les logarithmes. Si l'on suppose $x<1$, on peut les appliquer toutes deux, sans tenir compte des restes ; et, en retranchant ces formules membre à membre, on obtient

$$\log'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right].$$

On pose alors

$$x=\frac{1}{2n+1},$$

$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$

$n(1+x)=(1-x)(n+1)$

ecuación prec. y red.

d'où

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n},$$

et l'on a

$$(3)\quad \log'\left(\frac{n+1}{n}\right)=2\left[\frac{1}{1(2n+1)}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right]$$

Or, le premier membre revient à $\log'(n+1)-\log' n$; c'est donc la *différence tabulaire* entre les logarithmes des nombres consécutifs n et $n+1$.

Cela posé, on fera d'abord $n=1$ dans la formule (3), qui donnera ainsi $\log' 2$. On fera ensuite $n=2$ dans la même formule, qui donnera la différence entre $\log' 3$ et $\log' 2$, et par suite $\log' 3$. En faisant successivement $n=3$, $n=4$, $n=5$, ..., on obtiendra de même les logarithmes des nombres 4, 5, 6, ...; et l'on pourra construire ainsi une table des logarithmes népériens. Mais il est clair qu'on n'emploie la formule (3) que pour les logarithmes des nombres premiers ; les logarithmes des autres nombres s'obtiennent en faisant la somme des logarithmes de leurs facteurs.

La formule (3) est très-convergente. Les huit premiers termes donnent $\log' 2$, à moins d'un cent-millième. Quand on a atteint le nombre 1000, le premier terme de la série devient suffisant.

Ayant construit une table des logarithmes népériens, il suffit de les multiplier tous par une même quantité pour obtenir les logarithmes des mêmes nombres dans un système quelconque. Si, par exemple, il s'agit des logarithmes vulgaires dont la base est 10, on a, en désignant par v le logarithme vulgaire d'un nombre et par u son logarithme népérien,

$$10^v=e^u,$$

d'où

$$v\log' 10=u$$

et

$$v=\frac{1}{\log'.10}u.$$

Le nombre constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour obtenir des logarithmes vulgaires est donc dans ce cas

$$\frac{1}{\log' 10}$$

ou

$$\frac{1}{2{,}3025851}$$

ou enfin

$$0{,}4342945.$$

Ce multiplicateur fixe porte le nom de *module* du système dont la base est 10.

80. — *Développement de* $(a+b)^m$ *pour* m *quelconque*. Les nombres a et b étant généralement inégaux, soit $a>b$. On posera $b=ax$, d'où $(a+b)^m=a^m(1+x^m)$; et la question est ramenée à développer $(1+x)^m$, x étant moindre que l'unité.

Soit donc $\qquad (a+ax)^m = a^m(1+x^m)$

$$f(x)=(1+x)^m,$$

d'où

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m+2)(1+x)^{m-3}.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On trouvera successivement

$$f(0)=1,$$

d'où

$$f'(0)=m,$$
$$f''(0)=m(m-1),$$
$$f'''(0)=m(m-1)(m-2).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

enfin

$$f^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Par conséquent, la formule de Maclaurin donnera

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

C'est la formule connue du binôme, étendue au cas de m quelconque, et complétée par le reste

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

Il faut montrer que ce reste tend vers zéro à mesure que n augmente. La remarque du n° 65 n'est plus applicable à ce cas, attendu que dans $f^n(x)$ le coefficient

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

croît indéfiniment en valeur absolue. Mais on peut prendre le tour de démonstration suivant. Regardons d'abord m comme positif.

Supposons que nous prenions un terme de plus dans le développement, et soit R_{n+1} le nouveau reste, on aura

$$R_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2\ldots n.(n+1)}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}.$$

En comparant ces deux restes consécutifs, on reconnaît aisément que l'on a

$$R_{n+1} = R_n \cdot \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{x}{1+\theta x}.$$

Si l'on suppose qu'on ait poussé le développement assez loin pour que n soit plus grand que m, on aura, en valeur absolue,

$$R_{n+1} = R_n \cdot \frac{n-m}{n+1} \cdot \frac{x}{1+\theta x},$$

d'où, en remarquant que $n-m$ est moindre que $n+1$,

$$R_{n+1} < R_n \cdot \frac{x}{1+\theta x},$$

et à fortiori

$$R_{n+1} < R_n x.$$

Si $R_{n+2}, R_{n+3}, \ldots, R_{n+p}$ représentent de même les restes successifs qu'on obtiendrait en prenant $2, 3, \ldots p$ termes de plus, on trouverait de même

$$\begin{aligned} R_{n+2} &< R_{n+1} \cdot x, \\ R_{n+3} &< R_{n+2} \cdot x, \\ &\ldots\ldots \\ R_{n+p} &< R_{n+p-1} \cdot x, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant toutes ces inégalités membre à membre, et simplifiant,

$$R_{n+p} < R_n \cdot x^p.$$

Or, x étant moindre que 1 par hypothèse, on peut toujours prendre p assez grand pour que x^p soit moindre que toute quantité donnée. D'ailleurs R_n est une quantité déterminée et fixe; donc enfin R_{n+p} peut être rendu lui-même plus petit que toute quantité assignable.

Si m est négatif mais moindre que 1, la fraction $\frac{n-m}{n+1}$, qu'on peut alors écrire, en mettant le signe de m en évidence, $\frac{n+m}{n+1}$, est encore une quantité plus petite que l'unité; ainsi le raisonnement qui précède subsiste.

Si m est négatif et plus grand que 1, on peut toujours prendre n assez grand pour que le multiplicateur de R_n, c'est-à-dire $\frac{n+m}{n+1}\cdot\frac{x}{1+\theta x}$, soit plus petit qu'une fraction déterminée k, comprise entre x et l'unité. Car ce multiplicateur est moindre que $\frac{n+m}{n+1}\cdot x$; et si l'on satisfait à l'inégalité

$$(1) \qquad \frac{n+m}{n+1}x<k,$$

on satisfera à fortiori à l'inégalité

$$(2) \qquad \frac{n+m}{n+1}\cdot\frac{x}{1+\theta x}<k.$$

Or la relation (1) donne

$$nx+mx<kn+k.$$

Si mx est moindre que k, cette inégalité est satisfaite, quel que soit n, puisque x est moindre que k. Si mx est supérieur à k, on tire de cette relation

$$n>\frac{mx-k}{k-x},$$

inégalité à laquelle il est toujours possible de satisfaire.

Dès lors on aura

$$R_{n+1}<R_n\cdot k,$$

et l'on en déduira comme plus haut

$$R_{n+p}<R_n\cdot k^p,$$

et, comme k est moindre que 1, on pourra toujours prendre p assez grand pour que R_{n-p} soit aussi petit que l'on voudra. donc le reste tend vers zéro, puisque k^p peut devenir aussi petit que l'on voudra.

Soit, en second lieu, à développer $(a-b)^m$; on posera

comme plus haut $b=ax$; et la question sera ramenee a développer $(1-x)^m$. En opérant comme ci-dessus, on trouvera

$$(1-x)^m=1-\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3$$
$$+\ldots\pm R_n.$$

C'est encore la formule du binôme, complétée par le reste R_n.

Si l'on adopte la seconde forme du reste (68), on a

$$R_n=\frac{m(m-1\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}x^n(1-\theta x)^{m-n}(1-\theta)^n.$$

D'après la loi de formation de ce reste, on trouve aisément

$$R_{n+1}=R_n\cdot\frac{m-n}{n}\cdot x\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right),$$

ou, en valeur absolue, dès que n est plus grand que m,

$$R_{n+1}=R_n\cdot\frac{n-m}{n}\cdot x\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right).$$

Si m est positif, la quantité $\frac{n-m}{n}$ est une fraction; il en est de même d'ailleurs de la quantité entre crochets; on a donc

$$R_{n+1}<R_n\cdot x,$$

et l'on en déduira comme plus haut,

$$R_{n+p}<R_n\cdot x^p,$$

d'où il résulte que le reste tend vers zéro, puisque, x étant une fraction, x^p peut être rendu aussi petit qu'on voudra.

Si m est négatif, le multiplicateur de R_n devient

$$\frac{n+m}{n}x\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right);$$

on a donc

$$R_{n+1} < R_n \cdot \frac{n+m}{n} \cdot x.$$

Or, si k est une fraction comprise entre x et l'unité, et qu'on pose

$$\frac{n+m}{n} \cdot x < k, \quad \text{on en tire} \quad n > \frac{mx}{k-x},$$

relation à laquelle on peut toujours satisfaire. On peut donc écrire

$$R_{n+1} < R_n \cdot k,$$

d'où, comme ci-dessus,

$$R_{n+p} < S_n \cdot k^p.$$

Donc le reste tend vers zéro, puisque k^p peut devenir aussi petit que l'on voudra.

§ 2. — VÉRITABLE VALEUR DES EXPRESSIONS QUI PRENNENT L'UNE DES FORMES $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$

81. — Soit $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ une expression fractionnaire, dont les deux termes s'annulent pour une valeur particulière a de la variable x ; on aura

$$\varphi(a) = 0, \ \psi(a) = 0 ;$$

et l'expression se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour en trouver la vraie valeur, on commence par remplacer d'abord x par $a+h$, h étant une quantité que l'on fera ensuite tendre vers zéro ; le résulat définitif sera le même que si l'on eût fait immédiatement $x=a$; mais la forme indéterminée aura disparu. On aura, en effet,

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a) + \varphi'(a)\frac{h}{1} + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots}{\psi(a) + \psi'(a)\frac{h}{1} + \psi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \psi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots}.$$

Supprimant $\varphi(a)$ et $\psi(a)$, qui sont nuls par hypothèse, et divisant les deux termes de l'expression par h, on obtient

$$\frac{\varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^2}{1.2.3} + \cdots}{\psi'(a) + \psi''(a)\frac{h}{1.2} + \psi'''(a)\frac{h^2}{1.2.3} + \cdots}.$$

Faisant tendre maintenant h vers zéro, il ne reste que le premier terme de chaque développement, et il vient en définitive

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

c'est-à-dire que *lorsqu'une expression fractionnaire prend la forme $\frac{0}{0}$ pour une valeur particulière* a *de la variable, il suffit, pour obtenir la vraie valeur de cette expression, de remplacer chacun des deux termes par sa dérivée, et de faire ensuite* x = a.

Ce qui précède suppose uniquement qu'on puisse appliquer à chacun des deux termes la formule de Taylor (64), c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ soient continues depuis la valeur $x=a$ jusqu'à une valeur très-voisine $x=a+h$.

Si les dérivées $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ s'annulaient toutes deux pour $x=a$, il faudrait appliquer la règle précédente à l'expression $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, c'est-à-dire remplacer chacun des deux termes par sa dérivée, et faire ensuite $x=a$, ce qui donnerait $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$. On continuerait généralement ainsi à remplacer les