on a donc

$$R_{n+1} < R_n \cdot \frac{n+m}{n} \cdot x.$$

Or, si k est une fraction comprise entre x et l'unité, et qu'on pose

$$\frac{n+m}{n} \cdot x < k, \quad \text{on en tire} \quad n > \frac{mx}{k-x},$$

relation à laquelle on peut toujours satisfaire. On peut donc écrire

$$R_{n+1} < R_n \cdot k,$$

d'où, comme ci-dessus,

$$R_{n+p} < S_n \cdot k^p.$$

Donc le reste tend vers zéro, puisque k^p peut devenir aussi petit que l'on voudra.

§ 2. — VÉRITABLE VALEUR DES EXPRESSIONS QUI PRENNENT L'UNE DES FORMES $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$

81. — Soit $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ une expression fractionnaire, dont les deux termes s'annulent pour une valeur particulière a de la variable x ; on aura

$$\varphi(a) = 0, \ \psi(a) = 0;$$

et l'expression se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour en trouver la vraie valeur, on commence par remplacer d'abord x par $a+h$, h étant une quantité que l'on fera ensuite tendre vers zéro; le résulat définitif sera le même que si l'on eût fait immédiatement $x=a$; mais la forme indéterminée aura disparu. On aura, en effet,

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a) + \varphi'(a)\frac{h}{1} + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots}{\psi(a) + \psi'(a)\frac{h}{1} + \psi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \psi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots}.$$

Supprimant $\varphi(a)$ et $\psi(a)$, qui sont nuls par hypothèse, et divisant les deux termes de l'expression par h, on obtient

$$\frac{\varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^2}{1.2.3} + \cdots}{\psi'(a) + \psi''(a)\frac{h}{1.2} + \psi'''(a)\frac{h^2}{1.2.3} + \cdots}.$$

Faisant tendre maintenant h vers zéro, il ne reste que le premier terme de chaque développement, et il vient en définitive

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

c'est-à-dire que *lorsqu'une expression fractionnaire prend la forme $\frac{0}{0}$ pour une valeur particulière* a *de la variable, il suffit, pour obtenir la vraie valeur de cette expression, de remplacer chacun des deux termes par sa dérivée, et de faire ensuite* x = a.

Ce qui précède suppose uniquement qu'on puisse appliquer à chacun des deux termes la formule de Taylor (64), c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ soient continues depuis la valeur $x=a$ jusqu'à une valeur très-voisine $x=a+h$.

Si les dérivées $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ s'annulaient toutes deux pour $x=a$, il faudrait appliquer la règle précédente à l'expression $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, c'est-à-dire remplacer chacun des deux termes par sa dérivée, et faire ensuite $x=a$, ce qui donnerait $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$. On continuerait généralement ainsi à remplacer les deux termes de l'expression obtenue par leurs dérivées, jusqu'à ce qu'on obtienne deux termes qui ne s'annulent pas à la fois.

Exemple. L'expression $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ quand on y fait $x = 0$. Remplaçons les deux termes par leurs dérivées, nous aurons $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$. Les deux termes de cette seconde expression s'annulent encore pour $x = 0$; remplaçons-les par leurs dérivées, nous obtiendrons $\frac{\sin x}{\cos x}$, expression qui, pour $x = 0$, se réduit à $\frac{0}{1}$, c'est-à-dire à *zéro*. Telle est donc la vraie valeur de l'expression proposée.

82. — On ramène à la règle précédente les expressions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Soit, en effet, une expression $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ qui, pour $x = a$, prenne la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On pourra l'écrire $\frac{\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]}{\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]}$; désignons par $\Psi(x)$ et $\Phi(x)$ ses deux termes. Puisque l'on a $\psi(a) = \infty$ et $\varphi(a) = \infty$, il en résulte

$$\frac{1}{\psi(a)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(a)} = 0,$$

ou

$$\Psi(a) = 0, \quad \Phi(a) = 0.$$

La question revient donc à chercher la vraie valeur d'une expression

$$\frac{\Psi(x)}{\Phi(x)},$$

dont les deux termes s'annulent pour $x = a$. Cette valeur sera donc

$$\frac{\Psi'(a)}{\Phi'(a)}.$$

Exemple. Soit l'expression

$$\frac{(1-x)^{-1}}{\operatorname{tang} \frac{\pi x}{2}},$$

qui pour $x = 1$ prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$; on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{\cot \frac{\pi x}{2}}{1 - x},$$

qui pour $x = 1$ prend la forme $\frac{0}{0}$.

Remplaçant les deux termes de celle-ci par leurs dérivées, on obtient

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}}{1},$$

quantité qui pour $x = 1$ prend la valeur $\frac{\pi}{2}$; telle est la vraie valeur de l'expression proposée.

83. — On ramène encore à la même règle les expressions qui prennent la forme $0 \times \infty$. Soit en effet une expression $\varphi(x) . \psi(x)$, telle que $\varphi(a) = 0$ et $\psi(a) = \infty$. On pourra l'écrire

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)},$$

en représentant par $\Psi(x)$ l'inverse de $\varphi(x)$. Or, puisque $\psi(a)=\infty$, $\dfrac{1}{\psi(a)}=0$, c'est-à-dire $\Psi(a)=0$. La vraie valeur de l'expression $\dfrac{\varphi(x)}{\Psi(x)}$ est donc $\dfrac{\varphi'(a)}{\Psi'(a)}$.

Exemple. Soit l'expression $x.\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, qui, pour $x=\infty$, prend la forme $\infty\times 0$. On l'écrira d'abord

$$\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \quad \text{ou} \quad \frac{\log(1+u)}{u},$$

en faisant $\dfrac{1}{x}=u$. Pour $x=\infty$, il vient $u=0$; il faut donc chercher ce que devient $\dfrac{\log(1+u)}{u}$ pour $u=0$. Les deux termes devenant nuls en même temps, on les remplacera par leurs dérivées, et l'on aura $\dfrac{\dfrac{\log e}{1+u}}{1}$, expression qui, pour $u=0$ ou $x=\infty$, se réduit à $\log e$; telle est donc la vraie valeur de l'expression proposée.

§ 3. — MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

84. — *Une fonction* f (x) *est croissante ou décroissante à partir d'une valeur déterminée de* x *selon que sa dérivée est positive ou négative.* On a, en effet, par la formule de Taylor, bornée au premier terme (64),

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h);$$

par conséquent, $f(x+h)$ sera plus grand que $f(x)$, si $f'(x)$ conserve une valeur positive de x à $x+h$; et dans ce cas, la

fonction $f(x)$ sera *croissante*. Au contraire, $f(x+h)$ sera moindre que $f(x)$ si $f'(x)$ est négatif de x à $x+h$; et dans ce cas, la fonction $f(x)$ sera *décroissante*.

85. — Il peut arriver qu'une fonction $f(x)$ soit croissante de $x=a-h$ à $x=a$, puis décroissante de $x=a$ à $x=a+h$, h étant une quantité très-petite. On dit alors que $f(a)$ est un *maximum*.

Il peut arriver, au contraire, que la fonction soit décroissante de $x=a-h$ à $x=a$, puis croissante de $x=a$ à $x=a+h$. On dit alors que $f(a)$ est un *minimum*.

Dans le premier cas, $f'(x)$ passe du positif au négatif quand x atteint la valeur a; dans le second cas, $f'(x)$ passe, au contraire, du négatif au positif. — La fonction $f'(x)$ ne peut ainsi changer de signe sans passer par 0 ou par ∞. La condition nécessaire pour que $x=a$ corresponde à un maximum ou à un minimum de $f(x)$ est donc que, pour $x=a$, la dérivée $f'(x)$ devienne nulle ou infinie. Nous examinerons successivement ces deux cas.

86. — Supposons d'abord que la fonction $f(x)$ et toutes ses dérivées restent finies de $x=a-h$ à $x=a+h$. Remplaçons x par ces deux valeurs, développons $f(a-h)$ et $f(a+h)$ par la formule de Taylor; en faisant passer $f(a)$ dans le premier membre, nous obtiendrons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(a-h)-f(a) &= -f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2} \\ &\quad -f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+f^{\text{IV}}(a)\frac{h^4}{1.2.3.4}+\dots \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= +f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2} \\ &\quad +f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+f^{\text{IV}}(a)\frac{h^4}{1.2.3.4}+\dots \end{aligned}\right.$$

Pour que $f(a)$ soit un maximum ou un minimum, il faut que les deux différences $f(a-h)-f(a)$ et $f(a+h)-f(a)$ soient de même signe. Or on démontre en algèbre (voy. l'*Appendice*) que lorsqu'un polynome est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une variable h, on peut toujours prendre cette variable assez petite pour que le premier terme du polynome donne son signe à tout le développement. Pour que les seconds membres des relations (1) et (2) soient de même signe, il faut donc que les termes $-f'(a) \cdot h$ et $+f'(a)\,h.$, qui sont de signe contraire, disparaissent ; ce qui exige qu'on ait

$$(3) \qquad f'(a)=0.$$

Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum sont donc comprises parmi les racines de l'équation (3).

Supposons cette condition remplie ; les seconds membre des deux relations (1) et (2) auront le même premier terme $f''(a)\frac{h^2}{1.2}$; ils seront donc de même signe ; et ce signe sera celui de $f''(a)$, puisque h^2 est positif. Si $f''(a)$ est positif, il en sera de même des premiers membres de (1) et (2) ; on aura donc à la fois

$$f(a)<f(a-h) \quad \text{et} \quad f(a)<f(a+h)\,;$$

ainsi $f(a)$ sera un minimum. Si $f''(a)$ est négatif, il en sera de même des premiers membres de (1) et (2) ; on aura donc à la fois

$$f(a)>f(a-h) \quad \text{et} \quad f(a)>f(a+h)\,;$$

ainsi $f(a)$ sera un maximum. La valeur $x=a$, qui annule $f'(x)$, correspondra donc à un minimum ou à un maximum, suivant que $f''(a)$ sera positif ou négatif.

87. — Mais il pourrait arriver que $f''(a)$ fût nul. Les seconds membres des relations (1) et (2), ayant alors pour premier terme l'une $-f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}$ et l'autre $+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}$, qui sont de signe contraire, les premiers membres seraient de signe contraire, et il n'y aurait ni maximum ni minimum. Pour

qu'il y ait l'un ou l'autre, il faut donc que ces termes disparaissent, ce qui exige qu'on ait $f'''(a)=0$. Et dans ce cas les premiers membres des relations (1) et (2) seront tous deux positifs ou tous deux négatifs, c'est-à-dire qu'on aura un minimum ou un maximum, suivant que $f^{\text{IV}}(a)$ sera positif ou négatif.

On pourrait supposer aussi $f^{\text{IV}}(a)=0$ et passer aux dérivées suivantes ; on verrait ainsi que, *pour qu'il y ait minimum ou maximum, il faut que la première dérivée qui ne s'annule pas pour* x=a *soit d'ordre pair ; et que, dans ce cas, on aura un minimum ou un maximum selon que cette dérivée sera positive ou négative pour* x=a.

On voit donc quelle est la marche à suivre pour trouver les maxima et minima d'une fonction d'une variable : égaler sa première dérivée à zéro ; tirer les racines de l'équation ainsi posée ; substituer chacune de ces racines dans les dérivées successives de la fonction ; si la première dérivée qui ne s'annule pas par cette substitution est d'ordre impair, il n'y a ni maximum ni minimum ; si elle est d'ordre pair, on a un minimum ou un maximum selon qu'elle prend le signe + ou le signe —.

88. — *Exemples*. I. Soit

$$f(x)=x^5-4x^4+6x^3-4x^2+x.$$

On aura d'abord

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\ \ 5x^4-16x^3+18x^2-8x+1,\\
f''(x)&=\ 20x^3-48x^2+36x-8\\
f'''(x)&=\ 60x^2-96x+36,\\
f^{\text{IV}}(x)&=120x-96,\\
f^{\text{V}}(x)&=120.
\end{aligned}$$

L'équation $f'(x)=0$ a une racine simple $x=\frac{1}{5}$ et une racine triple $x=1$. Si l'on substitue $x=\frac{1}{5}$ dans la seconde dérivée, elle prend la valeur $-2{,}6$; il en résulte que $x=\frac{1}{5}$ correspond à un maximum.

La racine $x=1$ annule les dérivées $f''(x), f'''(x)$ et donne $f^{\text{iv}}(x)=+24$; il en résulte que $x=1$ correspond à un minimum.

89. — II. *Partager le nombre* a *en deux parties telles que le produit de la puissance* p *de la première par la puissance* q *de la seconde soit un maximum* (p *et* q *étant deux nombres entiers*).

On aura ici $f(x)=x^p(a-x)^q$, en désignant par x la première partie. En égalant à zéro la dérivée de cette fonction, on trouve

$$px^{p-1}(a-x)^q - qx^p(a-x)^{q-1}=0$$

ou

$$x^{p-1}(a-x)^{q-1}.\,[p(a-x)-qx]=0.$$

Cette équation admet trois racines :

$$x=0,\quad x=a\quad \text{et}\quad x=\frac{p}{p+q}a.$$

Les deux premières ne répondent pas à la question ; il faut donc considérer la troisième.

On trouve

$$f''(x)=[p(a-x)-qx].\frac{d.x^{p-1}(a-x)^{q-1}}{dx}-(p+q)x^{p-1}(a-x)^{q-1}.$$

Si l'on met pour x la valeur $\frac{p}{p+q}.a$, le premier terme disparaît, et le second prend une valeur négative ; la valeur substituée correspond donc à un maximum.

De

$$x=\frac{p}{p+q}.a,\quad \text{on déduit}\quad a-x=\frac{q}{p+q}.a,$$

d'où $x=1+\frac{p}{q}$

$$\frac{x}{a-x}=\frac{p}{q},$$

c'est-à-dire que les deux parties du nombre a doivent être proportionnelles aux exposants p et q. Quant au maximum cherché, il a pour valeur

$$\frac{p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}}.a^{p+q}.$$

90. — III. *Inscrire dans une ellipse un rectangle dont la surface soit un maximum.* — Les médianes du rectangle inscrit partageant chacune en deux parties égales deux cordes parallèles à l'autre, forment un système de diamètres conjugués rectangulaire ; ce sont donc les axes de la courbe. Si x et y sont les coordonnées de l'un des sommets du rectangle, rapportées à ces axes, la surface du rectangle est exprimée par $4xy$, ou, en mettant pour y sa valeur,

$$4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

La fonction à rendre maximum est donc $x\sqrt{a^2-x^2}$, ou, ce qui revient au même, $\sqrt{a^2x^2-x^4}$. On peut donc poser

$$f(x)=a^2x^2-x^4.$$

La dérivée égalée à zéro conduit à l'équation

$$2a^2x-4x^3=0,$$

ou

$$x(a^2-2x^2)=0.$$

Cette équation a trois racines:

$$x=0, \quad \text{et} \quad x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La première ne répond pas à la question. Si l'on substitue l'un des deux autres dans la seconde dérivée

$$2a^2-12x^2,$$ $2a^2-$

on obtient $-4a^2$, quantité négative. Les valeurs

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

correspondent donc à un maximum. Elles ne forment d'ailleurs qu'une seule et même solution, attendu que si x et y sont les coordonnées d'un des sommets du rectangle, $-x$ et $-y$ sont les coordonnées du sommet opposé.

De

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{on déduit} \quad y=\frac{b}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}.$$

On obtient donc un des sommets du rectangle demandé en cherchant l'intersection de l'ellipse avec la droite

$$y=\frac{b}{a}x,$$

qui n'est autre que la diagonale du rectangle construit sur les deux demi-axes.

Si l'ellipse devient un cercle, le rectangle inscrit maximum devient un carré.

91. — IV. *Étant donné le volume d'un cylindre, déterminer ses dimensions de manière que sa surface soit un minimum.* On a à résoudre ce problème toutes les fois que l'on veut construire un vase cylindrique d'une capacité donnée et employer le moins de matière possible. Mais il faut distinguer deux cas.

Le vase peut être ouvert à la partie supérieure. Soit alors y sa hauteur et x le rayon de sa base; si V est la capacité donnée, on aura

$$\pi x^2 y=V,$$

nous représenterons V par πa^3 pour la commodité de l'écriture. Nous aurons ainsi

$$(1) \qquad x^2 y=a^3.$$

La surface du cylindre sera exprimée par

$$\pi x^2+2\pi xy,$$

ou, en mettant pour y sa valeur tirée de la relation (1),

$$\pi x^2+\frac{2\pi a^3}{x}.$$

La quantité à rendre minimum est donc

$$f(x)=x^2+\frac{2a^3}{x}.$$

En égalant en zéro sa dérivée, on forme l'équation

$$2x-\frac{2a^3}{x^2}=0, \quad \text{d'où l'on tire} \quad x^3=a^3, \quad \text{ou} \quad x=a.$$

Par suite l'équation (1) donne aussi $y=a$. C'est-à-dire qu'*on obtient le minimum de surface en faisant le rayon de la base égal à la hauteur.* Ce minimum de surface est

$$\pi a^2+2\pi a^2 \quad \text{ou} \quad 3\pi a^2,$$

ou, en remarquant que $a=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$,

$$3\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}, \quad \text{ou enfin,} \quad 3\sqrt[3]{\pi V^2}.$$

C'est bien un minimum, car on a $f''(x)=2+\frac{4a^3}{x^3}$, quantité positive pour $x=a$.

Le vase peut être fermé à la partie supérieure. En conservant les mêmes notations, la relation (1) subsiste encore; mais la surface est exprimée par

$$2\pi x^2+2\pi xy, \quad \text{ou} \quad 2\pi x^2+\frac{2\pi a^3}{x},$$

et la quantité à rendre minimum est alors

$$f(x)=x^2+\frac{a^3}{2}.$$

La dérivée égalée à zéro donne l'équation

$$2x-\frac{a^3}{x^3}, \quad \text{d'où} \quad x^3=\frac{a^3}{2};$$

si l'on met dans (1) $2x^3$ à la place de a^3, on obtient $y=2x$. C'est-à-dire que dans ce cas *on obtient le minimum de surface en faisant la hauteur égale au diamètre de la base.* Le minimum a pour valeur

$$2\pi x^2+4\pi x^2, \quad \text{ou} \quad 6\pi x^2,$$

ou

$$\frac{6\pi a^2}{\sqrt[3]{4}}, \quad \text{ou encore} \quad 6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}.$$

On reconnaîtrait comme ci-dessus que c'est bien un minimum.

92. — Nous avons dit que $f'(x)$ peut changer de signe en passant par la valeur *zéro* ou par la valeur *infinie;* nous avons examiné le premier cas; il nous reste à parler du second.

Concevons donc que pour $x=a$, $f'(x)$ devienne infini, la fonction $f(x)$ restant d'ailleurs finie. Si, de $x=a-h$ à $x=a$, $f'(x)$ est positif, et qu'il devienne négatif de $x=a$ à $x=a+h$, $f(a)$ sera un maximum; car la fonction $f(x)$ croîtra de $a-h$ à a, et décroîtra de a à $a+h$.

Si, de $x=a-h$ à $x=a$, $f'(x)$ est négatif, et qu'il devienne positif de $x=a$ à $x=a+h$, $f(a)$ sera un minimum; car $f(x)$ décroîtra de $a-h$ à a, et croîtra de a à $a+h$.

Soit, par exemple, la fonction

$$f(x)=1+\tfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}},$$

on trouve

$$f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Pour $x=0$, cette dérivée devient infinie. D'ailleurs elle est négative ou positive en même temps que x; de $x=-h$ à $x=+h$ elle passe donc du négatif au positif; donc $f(0)$ ou 1 est un minimum.

C'est surtout dans la discussion des courbes que l'on rencontre des exemples de maxima ou de minima donnés par $f'(a)=\infty$.

§ 4. — MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

93. — On dit qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes est *maximum* pour $x=a$ et $y=b$, lorsque la quantité $f(a+h, b+k)$ est moindre que $f(a, b)$, les quantités h et k étant des accroissements positifs ou négatifs aussi petits que l'on voudra. On dit que la fonction $f(x, y)$ est m-