ou, en remarquant que $a = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$,

$$3\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}, \quad \text{ou enfin,} \quad 3\sqrt[3]{\pi V^2}.$$

C'est bien un minimum, car on a $f''(x) = 2 + \frac{4a^3}{x^3}$, quantité positive pour $x = a$.

Le vase peut être fermé à la partie supérieure. En conservant les mêmes notations, la relation (1) subsiste encore; mais la surface est exprimée par

$$2\pi x^2 + 2\pi xy, \quad \text{ou} \quad 2\pi x^2 + \frac{2\pi a^3}{x},$$

et la quantité à rendre minimum est alors

$$f(x) = x^2 + \frac{a^3}{2}.$$

La dérivée égalée à zéro donne l'équation

$$2x - \frac{a^3}{x^3}, \quad \text{d'où} \quad x^3 = \frac{a^3}{2};$$

si l'on met dans (1) $2x^3$ à la place de a^3, on obtient $y = 2x$. C'est-à-dire que dans ce cas *on obtient le minimum de surface en faisant la hauteur égale au diamètre de la base.* Le minimum a pour valeur

$$2\pi x^2 + 4\pi x^2, \quad \text{ou} \quad 6\pi x^2,$$

ou

$$\frac{6\pi a^2}{\sqrt[3]{4}}, \quad \text{ou encore} \quad 6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}.$$

On reconnaîtrait comme ci-dessus que c'est bien un minimum.

92. — Nous avons dit que $f'(x)$ peut changer de signe en passant par la valeur *zéro* ou par la valeur *infinie;* nous avons examiné le premier cas; il nous reste à parler du second.

Concevons donc que pour $x = a$, $f'(x)$ devienne infini, la fonction $f(x)$ restant d'ailleurs finie. Si, de $x = a - h$ à $x = a$, $f'(x)$ est positif, et qu'il devienne négatif de $x = a$ à $x = a + h$, $f(a)$ sera un maximum; car la fonction $f(x)$ croîtra de $a - h$ à a, et décroîtra de a à $a + h$.

Si, de $x = a - h$ à $x = a$, $f'(x)$ est négatif, et qu'il devienne positif de $x = a$ à $x = a + h$, $f(a)$ sera un minimum; car $f(x)$ décroîtra de $a - h$ à a, et croîtra de a à $a + h$.

Soit, par exemple, la fonction

$$f(x) = 1 + \tfrac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}},$$

on trouve

$$f'(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Pour $x = 0$, cette dérivée devient infinie. D'ailleurs elle est négative ou positive en même temps que x; de $x = -h$ à $x = +h$ elle passe donc du négatif au positif; donc $f(0)$ ou 1 est un minimum.

C'est surtout dans la discussion des courbes que l'on rencontre des exemples de maxima ou de minima donnés par $f'(a) = \infty$.

§ 4. — MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

93. — On dit qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes est *maximum* pour $x = a$ et $y = b$, lorsque la quantité $f(a + h, b + k)$ est moindre que $f(a, b)$, les quantités h et k étant des accroissements positifs ou négatifs auss petits que l'on voudra. On dit que la fonction $f(x, y)$ est m -

nimum pour $x=a$, $y=b$, lorsque, pour les mêmes accroissements h et k, la quantité $f(a+h,\ b+k)$ est plus grande que $f(a,b)$.

Posons $k=\varepsilon h$, ε étant le rapport algébrique, d'ailleurs arbitraire, que l'on établit entre k et h. Développons $f(x+h, y+\varepsilon h)$ par la formule de Taylor (70); nous aurons, en passant $f(x, y)$ dans le premier membre,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x+h,\ y+\varepsilon h)-f(x,\ y)=\frac{h}{1}\left(\frac{df}{dx}+\varepsilon\frac{df}{dy}\right)\\ & \quad +\frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}+2\varepsilon\frac{d^2f}{dx\,dy}+\varepsilon^2\frac{d^2f}{dy^2}\right)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

relation dans laquelle nous supposerons que x et y aient les valeurs a et b.

Pour que la différence $f(x+h, y+k)-f(x,\ y)$ conserve son signe, quels que soient les signes des accroissements h et k, il faut que le second membre de (1) conserve son signe, quel que soit le signe de h. Or, ce développement étant ordonné par rapport aux puissances croissantes de h, on peut toujours supposer h assez petit pour que le premier terme donne son signe à tout le développement; il faut donc que le terme affecté de la première puissance de h disparaisse et qu'on ait

$$\frac{df}{dx}+\varepsilon\frac{df}{dy}=0.$$

Mais cette condition doit être remplie quel que soit le rapport ε; il faut donc que l'on ait séparément

$$(2)\qquad \frac{df}{dx}=0,\quad \text{et}\quad \frac{df}{dy}=0,$$

ce sont les conditions communes au maximum et au minimum. Les valeurs $x=a$ et $y=b$ devront satisfaire à ces deux équations; elles seront donc comprises parmi les systèmes de valeurs qu'admettent ces deux équations.

94. — Supposons les conditions (2) remplies; le système $x=a$, $y=b$ pourra répondre à un maximum ou à un minimum. Pour que ce soit un maximum, il faut que la différence qui forme le premier membre de la relation (1) soit négative; or, le second membre commence alors par le terme en h^2 qui donnera son signe à tout le développement si h est suffisamment petit; il faut donc que ce terme en h^2 soit négatif, et qu'on ait par conséquent, quel que soit ε,

$$(3)\qquad \frac{d^2f}{dx^2}+2\varepsilon\frac{d^2f}{dx\,dy}+\varepsilon^2\frac{d^2f}{dy^2}<0$$

quand on mettra pour x et pour y les valeurs a et b données par les équations (2). Soient A, B, C les valeurs que prennent dans ce cas les quantités

$$\frac{d^2f}{dx^2},\quad \frac{d^2f}{dx\,dy},\quad \frac{d^2f}{dy^2}.$$

On devra avoir, quel que soit ε,

$$(4)\qquad A+2B\varepsilon+C\varepsilon^2<0.$$

D'après les propriétés des trinomes du second degré, cette condition exige qu'on ait à la fois

$$(5)\qquad C<0,\quad \text{et}\quad B^2-AC\leqq 0;$$

la seconde relation est nécessaire pour que le trinome conserve son signe, quel que soit ε, et la première est nécessaire pour que ce signe soit négatif. Si les relations (5) sont satisfaites, le système $x=a$, $y=b$ correspondra à un maximum.

On verrait de la même manière que, pour que ce système corresponde à un minimum, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$(6)\qquad C>0,\quad \text{avec}\quad B^2-AC\leqq 0,$$

95. — *Exemple.* Soit proposé d'inscrire dans une sphère de rayon R un parallélépipède rectangle dont le volume soit un maximum. Rapportons la sphère à trois axes parallèles aux arêtes du parallélépipède; et soient x, y, z les coordonnées de l'un des sommets. Le volume du parallélépipède aura pour valeur $8xyz$, ou, en remarquant que

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$8xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, ou encore $8\sqrt{x^2y^2(R^2-x^2-y)^2}$.
La fonction à rendre maximum est donc

$$f(x,y)=R^2x^2y^2-x^4y^2-x^2y^4.$$

On en tire successivement

$$\frac{df}{dx}=2R^2xy^2-4x^3y^2-2xy^4;\quad \frac{df}{dy}=2R^2x^2y-2x^4y-4x^2y^3;$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}=2R^2y^2-12x^2y^2-2y^4;\quad \frac{d^2f}{dx\,dy}=4R^2xy-8x^3y-8xy^3;$$
$$\frac{d^2f}{dy^2}=2R^2x^2-2x^4-12x^2y^2.$$

Si l'on égale à zéro les dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$, en supprimant dans la première le facteur $2xy^2$, et dans la seconde le facteur $2x^2y$, qui donneraient des solutions étrangères à la question que l'on a en vue, on obtient les deux équations

$$R^2-2x^2-y^2=0,\quad \text{et}\quad R^2-x^2-2y^2=0,$$

qui donnent

$$x=y=\frac{R}{\sqrt{3}},$$

en ne prenant que la solution positive. Si l'on substitue ces valeurs dans les dérivées partielles du second ordre, on trouve après réduction

$$A=-\frac{8}{9}R^4;\quad B=-\frac{4}{9}R^4;\quad C=-\frac{8}{9}R^4.$$

Le coefficient C est donc négatif; on trouve d'ailleurs

$$B^2-AC=-\frac{16}{27}R^8,$$

quantité négative; les deux conditions (5) sont donc remplies, et les valeurs $x=y=\frac{R}{\sqrt{3}}$ répondent à un maximum.

Ces valeurs donnent $z=\frac{R}{\sqrt{3}}$; il en résulte que le parallélépipède maximum est le cube. Son volume est $8\cdot\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.

96. — Si le terme en h^2 dans le développement (1) devenait nul pour $x=a$ et $y=b$, il faudrait pousser le développement plus loin. On verrait que le terme en h^3 doit disparaître, et que dans ce cas il y a maximum ou minimum, suivant que le terme en h^4 prendra une valeur négative ou positive. Mais cette circonstance ne se présente pas d'ordinaire dans les applications.

On pourrait aussi généraliser la question qui fait l'objet de ce paragraphe, et l'on reconnaîtrait, par des moyens analogues, que pour qu'une fonction de plusieurs variables indépendantes devienne maximum ou minimum pour un système de valeurs de ces variables, il faut que ces valeurs annulent les dérivées partielles du premier ordre, etc. Mais nous n'insisterons pas sur ce sujet plus curieux qu'utile, pour lequel nous renverrons aux traités plus étendus. Pour des raisons analogues, nous n'examinerons pas ici le cas où les dérivées partielles du premier ordre deviendraient infinies.

VII. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

§ 1. — TANGENTES ET NORMALES AUX COURBES PLANES.

97. — On sait que l'on appelle *tangente* à une courbe, en un point donné de cette courbe, la limite des positions que