L'enveloppe demandée se compose donc des deux hyperboles équilatères qui ont les axes pour asymptotes et pour puissance $\frac{r^2}{2}$.

Si l'on porte dans l'équation (1) la valeur de y tirée de l'équation (2), on obtient une équation en x qui est bicarrée et qui a ses racines égales deux à deux. On vérifie ainsi que l'enveloppe est tangente en deux points à chacune des enveloppées.

§ 3. — CONVEXITÉ ET COURBURE DES LIGNES PLANES.

109. — Un arc de courbe, aussi petit que l'on voudra, est concave du côté de sa corde, et convexe du côté opposé, c'est-à-dire du côté des tangentes menées par ses extrémités.

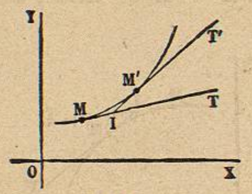

Fig. 5.

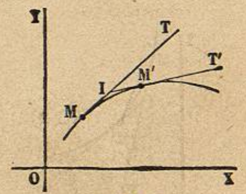

Fig. 6.

Considérons un arc très-petit MM' (fig. 5 et 6) d'une courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = f(x)$. Soient x et $x + h$ les abscisses de ses extrémités.

Si, comme dans la figure 5, les tangentes MT, M'T' menées aux extrémités de l'arc MM' se coupent *au-dessous* de cet arc (en regardant l'axe OY comme vertical pour fixer les idées), l'arc tourne sa convexité vers le bas, c'est-à-dire vers les y négatifs. En même temps le coefficient angulaire de la tangente M'T' est plus grand que le coefficient angulaire de la tangente MT ; ainsi le coefficient angulaire de la tangente, c'est-à-dire $f'(x)$, est une quantité croissante, depuis l'abscisse x jusqu'à l'abscisse $x + h$.

Si, comme dans la figure 6, les tangentes MT et M'T' se coupent *au-dessus* de l'arc MM', cet arc tourne sa convexité vers le haut, c'est-à-dire vers les y positifs. En même temps le coefficient angulaire de la tangente M'T' est plus petit que celui de la tangente MT ; ainsi, dans ce cas, $f'(x)$ est une quantité décroissante, depuis l'abscisse x jusqu'à l'abscisse $x + h$.

Or, d'après ce qu'on a vu au n° 84, la fonction $f'(x)$ est croissante ou décroissante, de x à $x + h$, suivant que sa dérivée $f''(x)$ est positive ou négative. On peut donc dire que l'arc MM' tourne sa convexité vers le bas ou vers le haut, selon que, de x à $x + h$, la seconde dérivée $f''(x)$ est positive ou négative.

Nous avons supposé l'ordonnée croissante dans les figures 5 et 6; les mêmes résultats subsistent en supposant l'ordonnée décroissante comme dans les figures 7 et 8. Ainsi, dans la

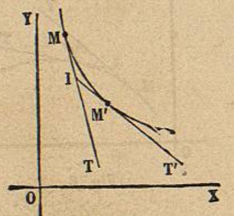

Fig. 7.

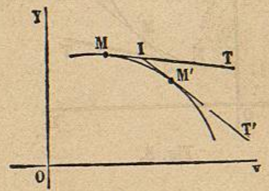

Fig. 8.

figure 7, l'arc MM' tourne sa convexité vers le bas; or le coefficient angulaire de M'T' est moindre en valeur absolue que celui de MT ; et, comme ils sont tous deux négatifs, $f'(x)$ est une fonction qui croît algébriquement. Dans la figure 8, au contraire, l'arc MM' tourne sa convexité vers le haut ; or le coefficient angulaire de M'T' est plus grand en valeur absolue que celui de MT ; et, comme ils sont tous deux négatifs, $f'(x)$ est une fonction qui décroît algébriquement

D'ailleurs, dans tout ce que nous venons de dire, la position de l'axe des x par rapport à l'arc considéré est indifférente ; donc enfin *une courbe* $y = f(x)$ *tourne sa convexité*, à partir d'un point déterminé M ayant x pour abscisse, *vers les y négatifs ou vers les y positifs, suivant que la seconde dérivée* $f''(x)$ *est positive ou négative* pour cette valeur de x.

Remarque. — On vérifie à l'aide des considérations qui précèdent la règle donnée au n° 86, pour reconnaître les maxima ou minima d'une fonction d'une variable. Si l'ordonnée d'une courbe a un maximum ou un minimum, en ce point la tangente doit être parallèle à l'axe des x, et par conséquent la première dérivée doit être nulle. S'il y a maximum, la courbe tourne sa convexité vers les y positifs, et par conséquent la seconde dérivée doit être négative. S'il y a minimum, la courbe tourne sa convexité vers les y négatifs, et par conséquent la seconde dérivée doit être positive. Mais ces considérations deviennent insuffisantes quand la seconde dérivée s'annule, et il faut recourir à la théorie exposée au numéro cité.

110. — Considérons, par exemple, la courbe qui a pour équation

$$y = \sin x,$$

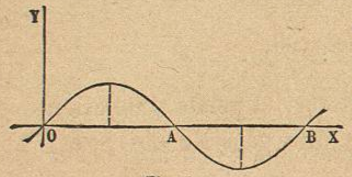

Fig. 9.

et qui a la forme représentée par la figure 9. On tire de cette équation

$$y'' = -\sin x.$$

Par conséquent, on reconnaît que depuis $x = 0$, qui répond à l'origine, jusqu'à $x = \pi$, qui répond au point A où la courbe rencontre de nouveau l'axe des x, $f''(x)$ est négatif et que la courbe tourne sa convexité vers les y positifs. Au contraire, depuis $x = \pi$ jusqu'à $x = 2\pi$, c'est-à-dire depuis le point A jusqu'au point B, où la courbe coupe, pour la troisième fois, l'axe des x, $f''(x)$ est positif, la courbe tourne sa convexité vers les y négatifs.

Les mêmes résultats se reproduisent périodiquement pour

les valeurs de x supérieures à 2π, ou pour les valeurs négatives de cette variable.

111. — Il peut arriver que le coefficient angulaire de la tangente, ou $f'(x)$, après avoir été croissant de $x = a - h$ à $x = a$, devienne décroissant de $x = a$ à $x = a + h$, ou *vice versa*; en d'autres termes, il peut arriver que l'abscisse $x = a$ corresponde à un maximum ou à un minimum de $f'(x)$. On sait qu'alors sa dérivée $f''(x)$ prend pour $x = a$ la valeur $f''(a) = 0$, ou la valeur $f''(a) = \infty$ (85).

Les points qui présentent cette circonstance se nomment des *points d'inflexion.* Ce sont des points où la convexité de la courbe change de sens; si, par exemple, de $x = a - h$ à $x = a$, la courbe tournait sa convexité vers les y négatifs de $x = a$ à $x = a + h$, elle tourne sa convexité vers les y positifs; ou bien c'est l'inverse qui a lieu. Dans les deux cas la courbe passe d'un côté à l'autre de sa tangente, c'est-à-dire que si elle était d'abord d'un côté de la tangente de $x = a - h$ à $x = a$, elle passe de l'autre côté de $x = a$ à $x = a + h$.

Dans la courbe $y = \sin x$ (fig. 9) les points O, A, B,... sont des points d'inflexion ; car pour ces points on a

$$f''(x) = -\sin x = 0.$$

Nous aurons occasion de revenir sur les points d'inflexion en nous occupant d'une manière plus générale des *points singuliers.*

112. — Les notions sur la *courbure* des lignes résultent de la comparaison des arcs de courbe quelconques avec les arcs de cercle.

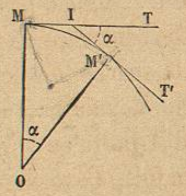

Fig. 10.

Un arc de cercle de longueur déterminée est d'autant plus courbe que l'angle aigu formé par les tangentes menées à ses extrémités est plus grand. Soit, par exemple, l'arc MM'; menons les rayons OM et OM', et les tangentes MT et M'T' qui se coupent au point I. Si l'arc MM′ a une longueur déterminée, il sera d'autant plus courbe que l'angle TIT′ sera plus grand. Or cet angle est égal à l'angle MOM′; on peut donc dire qu'un arc de cercle de longueur déterminée est d'autant plus courbe qu'il répond à un angle au centre plus grand; ou, ce qui revient au même, qu'il est d'autant plus courbe qu'il appartient à un cercle d'un rayon plus petit. Ainsi, *pour un arc de cercle de longueur donnée, la courbure varie en raison inverse du rayon.*

C'est ce que l'on peut voir encore d'une autre manière. On sait qu'on a

$$\mathrm{MM}' = \mathrm{OM} \times \text{arc } \mathrm{MOM}',$$

ou en appelant s l'arc MM′, α l'angle MOM′ (ou l'arc qui lui sert de mesure dans le cercle dont le rayon est 1) et r la longueur OM,

$$s = r\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha}{s} = \frac{1}{r}. \tag{1}$$

On prend l'angle α pour la mesure de la courbure de l'arc S; on voit dès lors que pour un arc de même longueur elle varie en raison inverse du rayon.

Le quotient $\frac{\alpha}{s}$ représente la *courbure par unité de longueur de l'arc s*. D'après la relation (1), elle est égale à l'inverse du rayon; et c'est dans ce sens que $\frac{1}{r}$ sert de mesure à la courbure.

113. — Pour étendre ces notions à une courbe plane quelconque, on compare les très-petits arcs de cette courbe à des

arcs de cercle. Cette comparaison peut d'abord se faire d'une manière élémentaire, comme il suit.

I. Soit AB la courbe considérée dont l'équation est

$$y = f(x).$$

Soit M un point quelconque de cette courbe, dont les coordonnées sont x et y, et soient M′ et M″ deux points consécutifs très-voisins du premier. Par les trois points M, M′, M″, qui ne sont point en ligne droite, on peut faire passer un cercle; soit C son centre; joignons les rayons CM et CM′. Si les points M, M′, M″ sont très-rapprochés, l'arc de cercle qui les joint différera très-peu de l'arc correspondant de la courbe proposée; et si on les rapproche de plus en plus, de manière à se confondre avec le point M, l'arc de cercle tendra à se confondre avec l'arc correspondant de la courbe AB. La limite vers laquelle tend ainsi le cercle mené par les trois points consécutifs M, M′, M″ est ce que l'on appelle le *cercle de courbure* de la courbe au point M; son centre est le *centre de courbure*, et son rayon prend le nom de *rayon de courbure*.

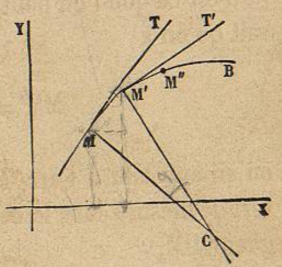

Fig. 11.

On voit que le centre de courbure relatif au point M est à la rencontre de la normale en M avec une normale M′C infiniment voisine. On voit aussi qu'à la limite les deux longueurs MC et M′C peuvent être considérées comme égales.

114. — Soit ρ le rayon de courbure CM; désignons par ds l'arc infiniment petit MM′, et par $d\alpha$ l'angle infiniment petit MCM′. Cet angle, formé par les deux rayons CM, CM′, est égal à l'angle formé par les deux tangentes MT, M′T′, et porte, pour cette raison, le nom d'*angle de contingence*.

Puisque l'arc MM′ se confond avec l'arc correspondant du cercle de courbure, on a

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{\rho}, \quad \text{d'où} \quad \rho=\frac{ds}{d\alpha}.$$

Cette formule et les considérations géométriques qui précèdent peuvent d'abord servir à trouver l'expression du rayon de courbure.

Les coordonnées du point M étant x et y, celles du point M′ sont

$$x+dx, \quad \text{et} \quad y+dy;$$

la distance de ces deux points, ou l'arc MM′ regardé comme ayant pour limite sa corde, a donc pour valeur

$$ds=\lim.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

ou

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Le coefficient angulaire de MT étant y', celui de M′T′ est de même $y'+dy'$; la tangente de l'angle de ces deux droites est donc donnée par la relation

$$\text{tang MCM}'=\frac{y'-(y'+dy')}{1+y'(y'+dy')};$$

ou, en prenant l'arc pour la tangente, ce qui est permis, attendu que l'arc est infiniment petit, et, en négligeant l'infiniment petit dy' devant y',

$$d\alpha=\frac{-dy'}{1+y'^2}.$$

Par suite

$$\rho=dx.\sqrt{1+y'^2}.\frac{1+y'^2}{-dy'}=-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dy'}{dx}\right)};$$

ou enfin

$$(1) \qquad \rho=-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure. Elle ne donne pas pour ρ une valeur négative, attendu que, d'après la figure qui a servi à l'établir, la courbe tourne sa convexité vers les y positifs, et que dès lors y'' est négatif (109).

Si l'on fait la figure pour le cas où la courbe AB tourne sa convexité vers les y négatifs, on voit que les calculs restent les mêmes, si ce n'est que pour avoir la tangente de l'angle de MT avec MT′, il faut, en appliquant la formule connue qui donne la tangente de l'angle de deux droites, retrancher y' de $y'+dy'$, au lieu de soustraire $y'+dy'$ de y' comme tout à l'heure. On obtient alors

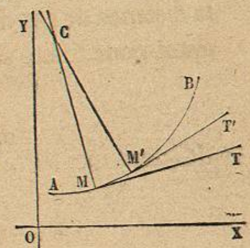

Fig. 12.

$$(2) \qquad \rho=+\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

et comme y'' est alors positif, on obtient encore pour ρ une valeur positive.

II. Mais on peut établir la même formule par les considérations analytiques qui suivent.

Considérons d'abord deux courbes quelconques

$$y=f(x) \quad \text{et} \quad y=\varphi(x),$$

qui ont un point commun répondant à l'abscisse a, de telle sorte qu'on ait $f(a) = \varphi(a)$. Si dans les équations de ces courbes on remplace x par $a+h$, h désignant une quantité infiniment petite, on aura (64) en admettant que de $x=a$ à $x=a+h$, les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ et toutes leurs dérivées conservent des valeurs finies,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1} + f''(a)\frac{h^2}{1.2} + f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

et

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \varphi'(a)\frac{h}{1} + \varphi''(a)\frac{h^2}{1.2} + \varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Si l'on a $f'(a) = \varphi'(a)$, les deux courbes ont au point commun la même tangente, et l'on dit qu'elles ont entre elles un contact du *premier ordre*, et leurs ordonnées

$$f(a+h) \quad \text{et} \quad \varphi(a+h)$$

ne diffèrent que d'un infiniment petit du deuxième ordre.

Si l'on a en outre $f''(a), = \varphi''(a)$, on dit que les courbes ont un contact du *deuxième ordre;* et leurs ordonnées

$$f(a+h), \quad \text{et} \quad \varphi(a+h)$$

ne diffèrent que d'un infiniment petit du troisième ordre.

En général, si les n premières dérivées prennent des valeurs égales pour $x=a$, on dit que les courbes ont un contact du $n^{\text{ième}}$ *ordre*, et leurs ordonnées

$$f(a+h) \quad \text{et} \quad \varphi(a+h)$$

ne diffèrent que d'un infiniment petit de l'ordre $n+1$.

Si l'une des courbes est algébrique et de degré n, et qu'elle ait avec l'autre courbe un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, on dit que la première courbe est *osculatrice* par rapport à la seconde.

Conformément à cette définition, un cercle tangent à une

courbe est dit *osculateur*, par rapport à cette courbe, s'il a avec elle un contact du deuxième ordre.

Proposons-nous de trouver le cercle osculateur à une courbe donnée $y = f(x)$ au point qui a pour coordonnées x et y. Si X et Y sont les coordonnées de son centre, et ρ son rayon, son équation sera de la forme

$$(1) \qquad (x-X)^2 + (y-Y)^2 = \rho^2.$$

On en tire, en différentiant deux fois de suite,

$$(2) \qquad (x-X) + y'(y-Y) = 0,$$

$$(3) \qquad 1 + y'^2 + y''(y-Y) = 0.$$

Pour que ce cercle soit osculateur à la courbe donnée au point x et y, il faut que y' et y'' soient les mêmes pour la courbe et pour le cercle. Dès lors l'équation (2) signifie que le centre du cercle est sur la normale au point commun; car elle exprime que les coordonnées X et Y satisfont à l'équation de la normale. Quant à l'équation (3), elle exprime que le centre du cercle est sur la normale à la courbe proposée, au point infiniment voisin qui a pour coordonnées $x + dx$ et $y + dy$; car si, dans l'équation (2), on remplace x par $x + dx$, et y par $y + dy$ pour avoir la normale au point infiniment voisin, on retombe après réductions sur l'équation (3).

Le rayon ρ se déduit aisément des trois relations ci-dessus écrites. La troisième donne

$$y - Y = -\frac{(1+y'^2)}{y''};$$

substituant cette valeur dans la relation (2), on en déduit

$$x - X = +\frac{y'(1+y'^2)}{y''};$$

et, par suite, la relation (1) donne

$$\rho^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

c'est la valeur obtenue pour le rayon de courbure par la première méthode.

On devra prendre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que y'' sera positif ou négatif, pour que la valeur de ρ, qui exprime une longueur absolue, soit positive. C'est-à-dire qu'il faudra prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la convexité de la courbe sera tournée vers les y négatifs ou vers les y positifs.

Ce calcul montre l'identité du cercle osculateur avec le cercle de courbure passant par trois points consécutifs infiniment voisins, tel que nous l'avions d'abord considéré

Nous appliquerons la formule du rayon de courbure à deux exemples.

115. — I. Nous prendrons pour premier exemple l'ellipse. De l'équation de cette courbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{on tire d'abord} \quad y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y};$$

d'où

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3}\right) = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Par suite,

$$(3) \qquad \rho = + \frac{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

On trouve, par exemple, que pour

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = b, \quad \text{on a} \quad \rho = \frac{a^2}{b};$$

et que, pour

$$x = a \quad \text{et} \quad y = 0, \quad \text{on a} \quad \rho = \frac{b^2}{a}.$$

Mais on peut déduire de la formule (3) une construction géométrique. Soit M le point où l'on veut déterminer le rayon de courbure ; on joint ce point aux deux foyers F et F′ ; on mène la bissectrice MN de l'angle FMF′ ; c'est la normale au point M ; par son pied N on lui élève une perpendiculaire NI terminée à l'un des rayons vecteurs MF′ ; et au point I on élève une perpendiculaire IC à ce rayon vecteur ; le point C où elle coupe la normale est le centre de courbure correspondant au point M ; et MC est le rayon de courbure.

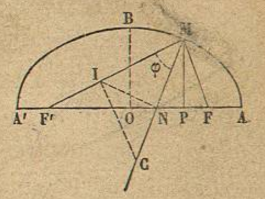

Fig. 13.

En effet, menons l'ordonnée MP. La sous-normale NP a pour valeur

$$NP = yy' = y \times -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2}.$$

La valeur de la normale MN est donc

$$MN = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{NP}^2} = \sqrt{y^2 + \frac{b^4x^2}{a^4}} = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{a^2}.$$

Soit φ l'angle NMF′ ; on a

$$MI = \frac{MN}{\cos\varphi}, \quad MC = \frac{MI}{\cos\varphi}, \quad \text{donc} \quad MC = \frac{MN}{\cos^2\varphi}.$$

Or l'angle φ est la différence des angles MNA et MF'A, qui ont respectivement pour tangente

$$\frac{a^2y}{b^2x}, \quad \text{et} \quad \frac{y}{x+c};$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\dfrac{a^2y}{b^2x} - \dfrac{y}{x+c}}{1 + \dfrac{a^2y^2}{b^2x(x+c)}} = \frac{a^2y(x+c) - b^2xy}{a^2y^2 + b^2x^2 + b^2cx}$$

$$= \frac{c^2xy + a^2cy}{a^2b^2 + b^2cx} = \frac{cy}{b^2}.$$

Par conséquent,

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{b^4}{b^4 + c^2y^2} = \frac{a^2b^4}{a^4y^2 + b^4x^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de MC, on obtient

$$\mathrm{MC} = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{a^2} \times \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2b^4} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \rho,$$

ce qui justifie la construction.

Cette construction est applicable à l'hyperbole et à la parabole.

116. — II. Nous prendrons pour second exemple la cycloïde. De ses équations

$$x = \mathrm{R}(\alpha - \sin\alpha), \quad y = \mathrm{R}(1 - \cos\alpha),$$

on a tiré au n° 103, II,

$$y' = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

On en déduit

$$1 + y'^2 = \frac{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2} = \frac{2}{1-\cos\alpha},$$

on trouve ensuite

$$dy' = \frac{(1-\cos\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\, d\alpha = -\frac{d\alpha}{1-\cos\alpha},$$

on a d'ailleurs,

$$dx = \mathrm{R}(1-\cos\alpha)\, d\alpha.$$

Par conséquent

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{\mathrm{R}} \cdot \frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}.$$

Substituant dans l'expression du rayon de courbure, on obtient

$$\rho = + \frac{\left(\dfrac{2}{1-\cos\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{\mathrm{R}(1-\cos\alpha)^2}} = 2\mathrm{R}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha} = 4\mathrm{R}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Or, si l'on se reporte à la figure du n° 103, on reconnaît que l'on a

$$\mathrm{MA} = 2\mathrm{R}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Donc

$$\rho = 2\mathrm{MA},$$

c'est-à-dire que *dans la cycloïde le rayon de courbure est le double de la normale.*

§ 4. — DÉVELOPPÉES DES LIGNES PLANES

117. — On appelle *développée* d'une courbe plane le lieu géométrique de ses centres de courbure. Soit ABCDE.. une courbe plane quelconque ; et soient A, B, C, D, E,... des